Rúbrica

Pregunta 2

	Resuelve de forma satisfactoria
Determina una base para W	4
Se expresa un vector del dominio como combinación lineal de la base de W extendida.	3
Se define la transformación lineal .	3

2. Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2};\ -5a + 6b + 4c - 2d = 0\right\}$ y $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (5, -5, 10)$

2.2. Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2};\ 5a + 3b - 2c - d = 0\right\}$ y $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (10, 5, 15)$

2.3. Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: \mathbb{R}^4 \to P_2(\mathbb{R})$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;\ -5a + 6b + 4c - 2d = 0\right\}$ y $T(1,0,0,0) = 5x^2 - 5x + 10$

2.4.
Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: \mathbb{R}^4 \to P_2(\mathbb{R})$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;\ 5a + 3b - 2c - d = 0\right\}$ y $T(1,0,0,0) = 10x^2 + 5x + 15$.

Pregunta 3

	Resuelve de forma satisfactoria
Determina una base de S	2
Obtiene la base ortonormal de S	4
Determinar del vector v_1	2
Determina el vector v_2 y expresar v como $v_1 + v_2$	2

3.1. Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Escriba el vector $v = (1, -1, 2)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^{\perp}$.

3.2. Sea $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$. Escriba el vector $v = (4, -1, 1)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^{\perp}$.

3.3. Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x - 2y - z = 0\}$. Escriba el vector $v = (1, 0, -1)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^{\perp}$.

3.4. Sea $H = \{(x, y, z) \in R^3 : 3x - y + z = 0\}$. Escriba el vector $v = \left(\frac{1}{3}, 1, -1\right)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^{\perp}$.

3.5. Sea $H = \{(x, y, z) \in R^3 : x - y - 2z = 0\}$. Escriba el vector $v = (1, -1, 0)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^{\perp}$.

Pregunta 4

	Resuelve de forma satisfactoria	
Determina los valores propios de la matiz	2	
Determina el espacio propio (por lo menos el asociado al valor propio de multiplicidad dos) para cada caso de k obtenido	3	3
Justifica la elección del valor de k que hace a A diagonalizable.	2	

4.1. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 3 & -3 & k \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de nxn tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -3 & 0 \\ 6 & -5-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & k-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\mathrm{k} - \lambda)[(4-\lambda)(-5-\lambda) + 18] = 0$$

$$(\mathrm{k} - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$$

$$(\mathrm{k} - \lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

Si $k = -2$

$$E_{\lambda=1} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=-2} = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Si $k = 1$

$$E_{\lambda=1} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=-2} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Por lo tanto si $k \neq -2$ la matriz A es diagonalizable

4.2. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de nxn tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det\begin{bmatrix} k-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\mathrm{k}-\lambda)[(-1-\lambda)(4-\lambda)+4] = 0$$

$$(\mathrm{k}-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = 0$$

$$(\mathrm{k}-\lambda)(\lambda)(\lambda-3) = 0$$

Si $k = 3$

$$E_{\lambda=0} = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=3} = gen\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Si $k = 0$

$$E_{\lambda=0} = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=3} = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 0$ la matriz A es diagonalizable

4.3 **Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable**

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & k & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de nxn tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$det\begin{bmatrix} -4-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ 6 & 6 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$(\mathrm{k}-\lambda)[(-4-\lambda)(5-\lambda)+18] = 0$$
$$(\mathrm{k}-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = 0$$
$$(\mathrm{k}-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

Si $k = -1$

$$E_{\lambda=-1} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=2} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Si $k = 2$

$$E_{\lambda=-1} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=2} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 2$ la matriz A es diagonalizable

4.4. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & k \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de nxn tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 6 & k-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$(\mathrm{k}-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

Si $k = 2$

$$E_{\lambda=2} = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=4} = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Si $k = 4$

$$E_{\lambda=2} = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=4} = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 4$ la matriz A es diagonalizable

4.5. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} k & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de nxn tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} k-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 7-\lambda & -1 \\ 0 & 6 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\mathrm{k} - \lambda)[(7-\lambda)(2-\lambda)+6] = 0$$

$$(\mathrm{k} - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = 0$$

$$(\mathrm{k} - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$$

Si $k = 4$

$$E_{\lambda=4} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=5} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Si $k = 5$

$$E_{\lambda=4} = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda=5} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 5$ la matriz A es diagonalizable

Pregunta 5

	Inadecuado	En desarrollo	Satisfactorio	Avanzado
	En blanco o sólo incoherencias	Intenta demostrar y escribe algo relacionado	Demuestra con procedimientos casi completos con pocas fallas	Demuestra satisfactoriamente
	0	0 < Calificación ≤ 5	5 < Calificación < 10	10

Sea T: V $\rightarrow$ W una transformación lineal. Demuestre que:

a) T es inyectiva $\Rightarrow$ dimV ≤ dimW
b) T es sobreyectiva $\Rightarrow$ dimV ≥ dimW
c) T es inversible $\Rightarrow$ dimV = dimW
d) {T(v_1),T(v_2),T(v_3)} es L.I. en W $\Rightarrow$ {v_1,v_2,v_3} es L.I. en V
e) dim V≠ dim W $\Rightarrow$ T no es un isomorfismo

f) $dimV > dimW \Rightarrow$ T no es un inyectiva

Sea $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$

Hallar la distancia de $(4,-1,1)$ a H y el punto de H más cercano a $(4,-1,1)$

- Determinar una base para H

$$x_1 = 2x_2 + 2x_3$$

$$H = \{(2x_2 + 2x_3, x_2, x_3) / x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H = \{(2,1,0), (2,0,1)\}$$

- Determinar una base para $H^\perp$

$$((x_1, x_2, x_3)/(2,1,0)) = 0 \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}$$

$$((x_1, x_2, x_3)/(2,0,1)) = 0$$

$$H^\perp = \{(x_1, -2x_1, -2x_1) / x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H^\perp = \{(-1, 2, 2)\}$$

- Determinar la base ortonormal de $H^\perp$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,2,2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- Determinar la distancia de $z = (4,-1,1)$ a H

$$\text{Proy}_{H^\perp} z = \left((4,-1,1) / \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right)$$

$$d((4,-1,1), H) = \left\|\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right)\right\| = \frac{4}{3}$$

- Determinar el punto de H más cercano a $(4,-1,1)$

$$\text{Proy}_H (4,-1,1) = (4,-1,1) - \text{proy}_{H^\perp}(4,-1,1)$$

$$= (4,-1,1) - \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{32}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{17}{9}\right)$$

Scanned by TapScanner

Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

Hallar la distancia de $(1,-1,2)$ a S y el punto de S más cercano a $(1,-1,2)$

- Determinar una base para S

$$x_3 = 2x_1 + 2x_2$$

$$S = \{(x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } S = \{(1,0,2), (0,1,2)\}$$

- Determinar una base para $S^{\perp}$

$$((x_1, x_2, x_3) / (1,0,2)) = 0$$

$$((x_1, x_2, x_3) / (0,1,2)) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$S^{\perp} = \{(-2x_3, -2x_3, x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } S^{\perp} = \{(2,2,-1)\}$$

- Determinar la base ortonormal de $S^{\perp}$

$$v_1 = (2,2,-1)$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Base}^{ON}\ S^{\perp} = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$$

- Determinar la distancia de $z = (1,-1,2)$ a S

$$d((1,-1,2), S) = \|proy_{S^{\perp}} z\|$$

$$= \|$$

$$proy_{S^{\perp}} z = \left((1,-1,2) / \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right)\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

$$d((1,-1,2), S) = \left\|\left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)\right\| = \frac{2}{3}$$

- Determinar el punto de S más cercano a $(1,-1,2)$

$$proy_S (1,-1,2) = (1,-1,2) - proy_{S^{\perp}}(1,-1,2)$$

$$= (1,-1,2) - \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{13}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{16}{9}\right)$$

Sea $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$

Hallar la distancia de $(1, -1, 0)$ a H y el punto de H más cercano a $(1, -1, 0)$

- Determinar una base para H

$x = y + 2z$

$H = \{(y + 2z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\}$

$(y+2z, y, z) = (y, y, 0) + (2z, 0, z)$
$= y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$

Base $H = \{(1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$

- Determinar una base para $H^{\perp}$

$((x, y, z) / (1, 1, 0)) = 0$

$((x, y, z) / (2, 0, 1)) = 0$

$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$

$H^{\perp} = \{(x, -x, -2x) / x \in \mathbb{R}\}$

Base $H^{\perp} = \{(-1, +1, 2)\}$

- Determinar la base ortonormal de $H^{\perp}$

$v_1 = (-1, 1, 2)$

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1, 1, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Base $\overset{ON}{H^{\perp}} = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

- Calcular $\text{proy}_{H^{\perp}} v = (v / u_1) u_1$

$\text{proy}_{H^{\perp}} (1, -1, 0) = \left((1, -1, 0) / \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$= -\frac{2}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

- Halla la distancia

$d((1, -1, 0), H) = \|\text{proy}_{H^{\perp}} v\| = \left\|\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$

- Determinar el punto de H más cercano a $(1, -1, 0)$

$\text{proy}_H (1, -1, 0) = (1, -1, 0) - \text{proy}_{H^{\perp}} (1, -1, 0)$

$= (1, -1, 0) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Sea $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 0\}$

Hallar la distancia de $(1/3, 1, -1)$ a H y el punto de H más cercano a $(1/3, 1, -1)$

- Determinar una base para H

$z = 3x - y$

$H = \{(x, y, 3x-y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ $(x, y, 3x-y) = (0, y, -y) + (x, 0, 3x)$
$= y(0, 1, -1) + x(1, 0, 3)$

Base $H = \{(0, 1, -1), (1, 0, 3)\}$

- Determinar una base para $H^\perp$

$((x, y, z) / (0, 1, -1)) = 0$

$((x, y, z) / (1, 0, 3)) = 0$

$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -3z \end{cases}$

$H^\perp = \{(-3z, z, z) / z \in \mathbb{R}\}$

Base $H^\perp = \{(-3, 1, 1)\}$

- Determinar la base ortonormal de $H^\perp$

$v_1 = (-3, 1, 1)$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-3, 1, 1)}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\text{Base}^{ON}_{H^\perp} = \left\{\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)\right\}$$

- Calcular $\text{proy}_{H^\perp} v$

$$\text{proy}_{H^\perp}\left(\frac{1}{3}, 1, -1\right) = \left((1/3, 1, -1) / \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{11}}\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\right)$$

- Hallar la distancia

$$d((1/3, 1, -1), H) = \|\text{proy}_{H^\perp} v\| = \left\|\left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\right)\right\| = \frac{1}{11^2}$$

- Determinar el punto de H más cercano a $\left(\frac{1}{3}, 1, -1\right)$

$$\text{Proy}_H\left(\frac{1}{3}, 1, -1\right) = \left(\frac{1}{3}, 1, -1\right) - \left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{12}{11}\right)$$

Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$

Hallar la distancia de $(1,0,-1)$ a S y el punto de S más cercano a $(1,0,-1)$

- Determinar una base para S

$$x = 2y + z$$

$$S = \{(2y+z, y, z) / y, z \in \mathbb{R}\} \quad (2y+z, y, z) = (2y, y, 0) + (z, 0, z) = y(2,1,0) + z(1,0,1)$$

$$\text{Base } S = \{(2,1,0), (1,0,1)\}$$

- Determinar una base para $S^\perp$

$$((x,y,z)/(2,1,0)) = 0 \qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -x \end{cases}$$

$$((x,y,z)/(2,1,0)) = 0$$

$$S^\perp = \{(x, -2x, -x) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } S^\perp = \{(-1, 2, 1)\}$$

- Determinar la base ortonormal de $S^\perp$

$$v_1 = (-1, 2, 1)$$

$$u_1 = \frac{(-1,2,1)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\text{Base}^{ON}\, S^\perp = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

- Determinar la distancia de $z = (1,0,-1)$ a S

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{S^\perp} z &= (z/u_1) \cdot u_1 \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$d((1,0,-1), S) = \|\text{Proy}_{S^\perp} z\| = \left\|\left(-\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{2}{3}$$

- Determinar el punto de S más cercano a $(1,0,-1)$

$$\begin{aligned} \text{proy}_S(1,0,-1) &= (1,0,-1) - \text{proy}_{S^\perp}(1,0,-1) \\ &= (1,0,-1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$