ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2020 – 2021	**PERIODO ACADÉMICO ORDINARIO 1**
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES **COORDINADOR:** Antonio Chong Escobar	**PROFESORES:** **Paralelos 01 y 02:** Antonio Chong Escobar; **Paralelos 03, 04 y 06:** Hernando Sánchez Caicedo; **Paralelos 07 y 08:** Joseph Páez Chávez.
EVALUACIÓN: SEGUNDA	**FECHA:** 07 DE SEPTIEMBRE DE 2020

COMPONENTE TEÓRICO	
EXAMEN (50 Puntos)	
PROM. LECCIONES + PROM. PRUEBAS DE LECTURA (50 Puntos)	
TOTAL (100 Puntos)	

COMPROMISO DE HONOR

Como estudiante de la asignatura, reconozco que en la presente evaluación:

1) debo **ubicar la cámara de mi dispositivo**, como laptop o tablet, de forma que los profesores encargados de la evaluación tengan una visión panorámica de mi persona, las hojas en las que voy a desarrollar los temas y los apuntes que utilizaré durante la evaluación. Además, tendré **suficiente iluminación** para que mi rostro sea visible. **En el caso de que no ubique mi cámara correctamente o mi rostro no sea visible**, tendré una penalización del 100% de la calificación de la evaluación.
2) **estoy autorizado a comunicarme sólo con** los profesores responsables de la recepción de la evaluación.
3) el uso de **teléfono celular sólo es permitido para** tomar fotos de mis resoluciones escritas a mano que subiré a la plataforma establecida por el profesor de la asignatura en los formatos requeridos.
4) debo **resolver la evaluación de manera individual**, sin consultar con alguna otra persona de forma presencial o a través de un instrumento de comunicación, como un teléfono celular.
5) **no debo usar** gafas, relojes, gorras, ni audífonos.
6) **estoy autorizado a consultar sólo en** libros, notas o apuntes que posea en versión física.
7) **no debo usar calculadora**, ni cualquier otro instrumento para hacer cálculos como laptops o tablets.
8) **los temas los debo desarrollar de manera** ordenada y clara, siguiendo todos los lineamientos establecidos por el profesor.

Para que el examen del estudiante sea calificado:

Antes de iniciar el examen, el estudiante debe escribir a mano la siguiente **ACEPTACIÓN DEL COMPROMISO DE HONOR**, completarla, tomarle una foto en disposición vertical, convertirla en pdf, y enviarla a través de la plataforma indicada por el profesor como un archivo con el nombre:

Paralelo ## Primer Apellido Primer Nombre Ex2 CH

ACEPTACIÓN DEL COMPROMISO DE HONOR
del examen de la 2da evaluación de Ecuaciones Diferenciales (2020-1)

Fecha: lunes 7 de septiembre de 2020

Yo, ____,
firmo a continuación, como constancia de haber leído y aceptado todos los 8 items del compromiso de honor.

"Como estudiante de la ESPOL **me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad**, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ________________ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** ________________ **PARALELO:** ___

Ubicar aquí una identificación que tenga su foto, como cédula, carné ESPOL o licencia de conducir, para proceder a tomar la foto de la aceptación del compromiso de honor.

VERSIÓN 1 DEL EXAMEN
(EVALUADA A LOS PARALELOS 01 Y 02 DEL PROFESOR ANTONIO CHONG ESCOBAR)

(Por cada tema, debe enviar al email del profesor un archivo con el desarrollo a mano hasta la hora establecida.)

Tema 1
Literal a (10 puntos)
Utilizando series de potencias alrededor de $t_0 = 0$, determine la solución general de la ecuación diferencial ordinaria $ty''(t) + (3 + 2t)y'(t) + 6y(t) = 0$. En el caso de que alguna de las series que forman la solución general sea convergente a una función elemental, debe identificar dicha función.

Literal b (10 puntos)
Si conoce que la suma de las derivadas de primer y segundo orden de $y(x)$ da como resultado el producto entre las funciones $\sigma(x) = -x$ y $\omega(x) = sen(x)$, entonces determine la solución general de la ecuación diferencial que describe el comportamiento de $y(x)$. Para esto, no utilice la transformada de Laplace.

Tema 2
Literal a (7 Puntos)
Sea $A(S)$ la transformada de Laplace de $a(t)$. Determine una expresión para $a(1)$, si se conoce que

$$A(S) = log_2\left(\frac{S-2}{S+3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-2)^n S\, e^{-3nS}\,\frac{1}{S^2 - 81}\right).$$

Literal b (13 Puntos)
Usando la transformada de Laplace, determine la solución del problema de valor inicial

$\theta y''(\theta) - 2y'(\theta) + \theta y(\theta) = 0\ ;\ y(0) = \frac{7}{3};\ y'(0) = k$, tal que k es una constante fija.

Tema 3 (10 puntos)
Cierto sistema mecánico en el que están involucradas las constantes $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$ y $k_3 = 1$ se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/k_3 \\ -1/k_2 & -1/(k_1k_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Usando el método de valores y vectores propios, determine la solución general del sistema. Luego, encuentre $x(t)$ y $y(t)$ si $x(0) = 2$ y $y(0) = 1$. Finalmente, determine los valores límite de $x(t)$ y $y(t)$ cuando $t \to \infty$.

VERSIÓN 2 DEL EXAMEN
(EVALUADA AL PARALELO 03 DEL PROFESOR HERNANDO SÁNCHEZ CAICEDO)

1) La solución de la ecuación $y'' + y' = 1$ es:
a.- $y = t + c_1e^{-t} + c_2$
b.- $y = c_1e^{-t} + c_2e^{t} + 1$
c.- $y = t + c_1e^{-t} + c_2e^{t}$
d.- $y = 1 + c_1e^{-t} + c_2e^{t}$
2) Para el problema siguiente determine el intervalo donde con certeza existe solución única dos veces diferenciable: $y'' + (cosx)y' + 3(ln|x-1|)y = 0 \quad y(2) = 3 \quad y'(2) = 1$
a.- $1 < x < \infty$
b.- $-\infty < x < \infty$
c.- $x \geq 1$
d.- $0 < x < 2$
3) Determine a_n de modo que se satisfaga la ecuación: $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.
a.- $a_n = \frac{2^n}{n!}a_0 \quad n = 0,1,2,3,....$
b.- $a_n = (-1)^n\frac{2^n}{n!}a_0 \quad n = 0,1,2,3 ...$
c.- $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}a_0 \quad n = 0,1,2,3 ...$
d.- $a_n = (-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}a_0 \quad n = 0,1,2,3 ...$
4) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ es la solución del problema $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ determine los coeficientes a_2 y a_3.
a.- $a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = 0$
b.- $a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{2}$
c.- $a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{1}{2}$
d.- $a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = -\frac{1}{2}$
5) Si $\mathcal{L}\{sent\} = \frac{1}{s^2+1}$ donde $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace, ¿cuál sería la transformada de $f(t) = tsent$?
a.- $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$
b.- $e^{-s}(\frac{1}{s^2+1})$
c.- $e^{-s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2$
d.- $(e^{-2s} - e^{s})^2$
6) ¿Cuál es la transformada inversa de Laplace de la función: $\frac{2s}{s^2-2s-3}$?
a.- $e^{t}(2\cosh(2t) + senh(2t))$
b.- $e^{t}(2\cos(2t) + sen(2t))$
c.- $e^{2t}\cosh(2t) + e^{t}senh(2t)$
d.- $e^{2t}\cos(2t) + e^{t}sen(2t)$
7) Si $f(t) = 1 - u_1(t)$ entonces su transformada de Laplace F(s) es:
a.- $F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$
b.- $F(s) = (1 - e^{-s})$
c.- $F(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}$
d.- $F(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} - 1)$
8) Para el par de vectores siguientes encuentre los puntos en que no son linealmente independientes:

$$x_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

a.- $Solo\ en\ t = 0$
b.- $En\ t = 0\ y\ en\ t = 1$
c.- $Solo\ en\ t = 1$
d.- $En\ t = 1\ \ y\ \ en\ \ t = 2$
9) (Subir archivo con detalles) Para el problema de valor inicial, muestre su solución con la transformada de Laplace:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

10) (Muestre todo el proceso) Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$$

VERSIÓN 3 DEL EXAMEN
(EVALUADA AL PARALELO 04 DEL PROFESOR HERNANDO SÁNCHEZ CAICEDO)

1) La solución de la ecuación $vv'' + (v')^2 = 0$ es:
a.- $v^2 = c_1 t + c_2$
b.- $v = \sqrt{c_1 t} + c_2$
c.- $v = c_1 t^2 + c_2 t$
d.- $v^2 = (c_1 t + c_2)^2$

2) Para el problema siguiente determine el intervalo donde con certeza existe solución única dos veces diferenciable: $x(x+4)y'' + 3xy' + 4y = 2 \qquad y(-3) = 0 \quad y'(-3) = -1$
a.- $-4 < x < 0$
b.- $-3 < x \leq 4$
c.- $0 < x < \infty$
d.- $-\infty < x < 0$

3) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ calcule y'' y determine el coeficiente de x^n.
a.- $(n+2)^2(n+1)$ para n=0,1,2,3…..
b.- $n^2(n-1)$ para n=0,1,2,3…..
c.- $(n+1)(n-1)$ para n=0,1,2,3…..
d.- $(2n-2)(n+1)^2$ para n=0,1,2,3…..

4) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es la solución del problema $y'' - xy' - y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$ determine los coeficientes a_2 y a_3.
a.- $a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = -\frac{1}{3}$
b.- $a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = \frac{1}{2}$
c.- $a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{1}{3}$
d.- $a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = -\frac{1}{3}$

5) Si $\mathcal{L}\{cost\} = \frac{s}{s^2+1}$ donde $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace, ¿cuál sería la transformada de $f(t) = tcost$?
a.- $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
b.- $e^{-s}(\frac{1}{s^2+1})$
c.- $e^{-s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2$
d.- $(e^{-2s} - e^s)^2$

6) ¿Cuál es la transformada inversa de Laplace de la función: $\frac{2s-3}{s^2-4}$?
a.- $2\cosh(2t) - \frac{3}{2}senh(2t)$
b.- $2\cos(2t) - \frac{3}{2}sen(2t)$
c.- $2\cos(2t) - 3senh(2t)$
d.- $2\cos(2t) - 3sen(2t)$

7) Si $f(t) = tu_1(t)$ entonces su transformada de Laplace F(s) es:
a.- $F(s) = \frac{e^{-s}}{s}(1 + \frac{1}{s})$
b.- $F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$
c.- $F(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}$
d.- $F(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} - 1)$

8) Para el par de vectores siguientes encuentre los puntos en que no son linealmente independientes:

$$x_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

a.- $En\ t = 0 \ \ y\ \ en\ \ t = 2$
b.- $Solo\ en\ t = 0$
c.- $Solo\ en\ t = 2$
d.- $En\ t = 1 \ \ y\ \ en\ \ t = 2$

9) (Subir archivo con detalles) Para el problema de valor inicial, muestre su solución con la transformada de Laplace:

$$y'^{v} - 4y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \quad y''(0) = -2 \qquad y'''(0) = 0$$

10) (Muestre todo el proceso) Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

VERSIÓN 4 DEL EXAMEN
(EVALUADA AL PARALELO 06 DEL PROFESOR HERNANDO SÁNCHEZ CAICEDO)

1) La solución de la ecuación $t^2v'' + 2tv' - 1 = 0$ es:
a.- $v = lnt + \frac{c_1}{t} + C_2$
b.- $v = c_1 lnt + \frac{c_2}{t} + 1$
c.- $v = c_1 lnt + \frac{1}{t} + C_2$
d.- $v = \frac{c_1}{t} + C_2 lnt + t$

2) Para el problema siguiente determine el intervalo donde con certeza existe solución única dos veces diferenciable: $(x+1)y'' - 3xy' + 4y = senx \quad y(-2) = 2 \quad y'(-2) = 1$
a.- $-\infty < x < -1$
b.- $-1 < x < 1$
c.- $-2 < x < 0$
d.- $-\infty < x < -2$

3) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ calcule y'' y determine el coeficiente de x^4 en la segunda derivada.
a.- $30a_3$
b.- $56a_4$
c.- $6a_3$
d.- $12a_4$

4) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ es la solución del problema $y'' - xy' - y = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = -1$, determine los coeficientes a_2 y a_3.
a.- $a_2 = 0 \quad a_3 = -\frac{1}{3}$
b.- $a_2 = \frac{1}{3} \quad a_3 = -\frac{1}{3}$
c.- $a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = -\frac{1}{3}$
d.- $a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{1}{2}$

5) Si $\mathcal{L}\{cosht\} = \frac{s}{s^2-1}$ donde $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace, ¿cuál sería la transformada de $f(t) = tcosht$?
a.- $\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$
b.- $e^{-s}(\frac{1}{s^2-1})$
c.- $e^{-s}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)^2$
d.- $(e^{-2s} + e^s)^2$

6) ¿Cuál es la transformada inversa de Laplace de la función: $\frac{1-2s}{s^2+4s+3}$?
a.- $-e^{-2t}(\text{seh}(t) + 2coh(t))$
b.- $e^t(2\cos(t) + sen(t))$
c.- $e^{2t}\cosh(t) + e^t senh(t)$
d.- $e^{2t}\cos(t) + e^t sen(t)$

7) Si $f(t) = 1 - tu_1(t)$ entonces su transformada de Laplace F(s) es:
a.- $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}(1+s)$
b.- $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2}(1-s)$
c.- $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}(1-s)$
d.- $F(s) = -\frac{e^{-s}}{s^2}(1+s)$

8) Para el par de vectores siguientes encuentre los puntos en que no son linealmente independientes:

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

a.- $Solo\ en\ t = 1$
b.- $En\ t = 1\ y\ en\ t = 2$
c.- $Solo\ en\ t = 2$
d.- $En\ t = 2 \quad y \quad en\ \ t = 3$

9) (Subir archivo con detalles) Para el problema de valor inicial, muestre su solución con la transformada de Laplace:

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

10) (Muestre todo el proceso) Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema:

$$z' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

VERSIÓN 5 DEL EXAMEN

(EVALUADA A LOS PARALELOS 07 Y 08 DEL PROFESOR JOSEPH PÁEZ CHÁVEZ)

Parte teórica

1

(5 Points)

Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de orden superior $n \geq 2$ (EDHn) estudiada en clase. Entonces, siempre se cumple que

- [ ] La EDHn tiene a lo mucho n soluciones linealmente independientes. ✓
- [ ] Si $y_1 \in C^n(I, \mathbb{R})$ es solución de la EDHn entonces αy_1 también es solución de la EDHn, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. ✓
- [ ] La EDHn tiene a lo mucho $n-1$ soluciones linealmente independientes.
- [ ] La EDHn tiene a lo mucho 2 soluciones linealmente independientes.
- [ ] Ninguna de las opciones.

2

(5 Points)

Suponga que para una ecuación diferencial lineal homogénea (EDH) de coeficientes constantes se obtiene el polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2$. Entonces, siempre se cumple que

- [ ] La EDH es de orden 5. ✓
- [ ] Una solución de la EDH es $y(t) = t\cos(t)$. ✓
- [ ] La EDH es de orden 3.
- [ ] Una solución de la EDH es $y(t) = e^t$.
- [ ] Ninguna de las opciones.

3

(5 Points)

Considere el método de series de potencias aplicado al problema $xy'' + y = 0$ (EDH) alrededor del punto $x = 0$. Entonces, siempre se cumple que

- [ ] La EDH tiene el punto singular regular $x = 0$. ✓
- [ ] La EDH tiene la ecuación indicial $r(r-1) = 0$. ✓
- [ ] La EDH tiene el punto ordinario $x = 0$.
- [ ] La EDH tiene la ecuación indicial $r(r+1) = 0$.
- [ ] Ninguna de las opciones.

Parte práctica 1 (tema de desarrollo)

Considere la ecuación

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(z)\sin(t-z)\,dz, \quad t \geq 0.$$

Usando transformada de Laplace encuentre $y(t)$ para toda $t \geq 0$.

1

Usando transformada de Laplace el problema planteado se puede escribir como
(5 Points)

- [ ] $Y(s) = \dfrac{Y(s)}{s^2+1} + \dfrac{2}{s^3}$ ✓
- [ ] $Y(s) = \displaystyle\int_0^s \dfrac{Y(s)}{s^2+1}\,ds + \dfrac{2}{s^3}$
- [ ] $Y(s) = \dfrac{Y(s)}{s^3} + \dfrac{2}{s^2+1}$
- [ ] $Y(s) = \displaystyle\int_0^s \dfrac{Y(s)}{s^3}\,ds + \dfrac{2}{s^2+1}$
- [ ] Ninguna de las opciones.

2

Despejando la transformada de Laplace de la solución buscada se tiene
(5 Points)

- [ ] $Y(s) = \dfrac{2s^2+2}{s^5}$ ✓
- [ ] $Y(s) = \dfrac{s^5}{2s^2+2}$
- [ ] $Y(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3}$
- [ ] $Y(s) = \dfrac{2s^2+2}{s^5}e^{-s}$
- [ ] Ninguna de las opciones.

3

La solución al problema planteado es
(5 Points)

- [ ] $y(t) = \dfrac{1}{12}t^4 + t^2$ ✓
- [ ] $y(t) = \dfrac{1}{12}t^2 + t^4$
- [ ] $y(t) = 12t^4 + t^2$
- [ ] $y(t) = \dfrac{1}{12}t^4 + t^2u(t-1)$
- [ ] Ninguna de las opciones.

Como validación del puntaje de las preguntas de esta sección, proceda a cargar un único archivo pdf que incluya el desarrollo paso a paso, de forma clara y ordenada. Para verificación de autenticidad, cada hoja deberá mostrar en la esquina inferior derecha el carnet universitario, cédula de identidad, papeleta de votación o licencia de conducir.

Parte práctica 2 (tema de desarrollo)

Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x'(t) + y'(t) - 4x(t) - y(t) = e^t, \\ x'(t) + 3x(t) + y(t) = 0. \end{cases}$$

Usando el método del operador diferencial (aplicando la regla de Cramer) encuentre $x(t)$, $y(t)$ para toda $t \geq 0$, asumiendo $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

1

Usando el método del operador diferencial el problema planteado contiene la ecuación

(5 Points)

- [ ] $2(D-2)x + (D-1)y = e^t$ ✓
- [ ] $(D+3)x + y = 0$ ✓
- [ ] $(D-4)x + (D-1)y = e^t$
- [ ] $(D+3)x + Dy = 0$
- [ ] Ninguna de las opciones.

2

Usando la regla de Cramer se obtiene la ecuación

(5 Points)

- [ ] $x''(t) + x(t) = -e^t$ ✓
- [ ] $y''(t) + y(t) = 4e^t$ ✓
- [ ] $x''(t) + 3x'(t) + x(t) = 0$
- [ ] $2y''(t) + y'(t) - 4y(t) = e^t$
- [ ] Ninguna de las opciones.

3

(5 Points)

La solución $x(t)$ al problema original es

- [ ] $x(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) - \sin(t) - e^t)$ ✓
- [ ] $x(t) = \cos(t) - \sin(t) - e^t$
- [ ] $x(t) = \cos(t) - \sin(t) - e^{-t}$
- [ ] $x(t) = 2e^t - \cos(t) + 2\sin(t)$
- [ ] Ninguna de las opciones.

4

(5 Points)

La solución $y(t)$ al problema original es

- [ ] $y(t) = 2e^t - \cos(t) + 2\sin(t)$ ✓
- [ ] $y(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) - \sin(t) - e^t)$
- [ ] $y(t) = e^t - 2\sin(t)$
- [ ] $y(t) = e^t - \cos(t) + 2\sin(t) + 1$
- [ ] Ninguna de las opciones.

Como validación del puntaje de las preguntas de esta sección, proceda a cargar un único archivo pdf que incluya el desarrollo paso a paso, de forma clara y ordenada. Para verificación de autenticidad, cada hoja deberá mostrar en la esquina inferior derecha el carnet universitario, cédula de identidad, papeleta de votación o licencia de conducir.