PRIMER TEMA

Considera la función:

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}}$$

a) Determine si la función es continua en el origen.

b) Encuentre la derivada parcial respecto a x $\frac{\partial f}{\partial x}$ para los puntos distintos al origen.

c) Usando la definición, encuentre la derivada parcial respecto a x en el origen $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

d) Repita el literal b) y c) pero para la derivada parcial respecto a y.

e) Determine si f es una función diferenciable en el origen.

a) Se calcula el limite para comprobar la continuidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^4\theta+r^4\sin^4\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}r^2\cos^4\theta+r^2\sin^4\theta=0$$

La función si es continua en (0,0)

b) Empleando las reglas de derivación.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)=\frac{4x^3(x^2+y^2)-2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

c) Usando la definición de derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4+0^4}{h^2+0^2}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}h=0$$

d) El mismo proceso aplicado para la derivada parcial respecto a x lo aplicamos para la derivada parcia respecto a y:

Para puntos distintos del origen:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)=\frac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

En el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^4+h^4}{0^2+h^2}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}h=0$$

e) Antes de usar la definición de diferenciabilidad, veamos si la función es C^1 en el origen.

Como ya sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en el origen, veamos si es continua en el origen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^3(x^2+y^2)-2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\lim_{r\to 0}\frac{4r^5\cos^3(\theta)-2r^5\cos(\theta)\left(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)\right)}{r^4}$$
$$=\lim_{r\to 0}4r\cos^3(\theta)-2r\cos(\theta)\left(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Lo mismo para la derivada respecto a y:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{4r^5\sin^3(\theta) - 2r^5\sin(\theta)\left(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)\right)}{r^4}$$
$$= \lim_{r\to 0} 4r\sin^3(\theta) - 2r\sin(\theta)\left(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)\right) = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Las derivadas parciales son continuas en el origen, la función es clase C^1 en el origen, entonces por teorema la función es diferenciable en el origen.
Aplicando la definición de diferenciabilidad:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]\cdot[h_1, \quad h_2]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$
$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^4+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^4+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{r^3}$$
$$= \lim_{r\to 0} r\,(\cos^4\theta+\sin^4\theta) = 0$$

Por definición también se ha comprobado que la función si es diferenciable en el origen.

El estudiante sabe determinar la continuidad de una función, calcular derivadas parciales y determinar diferenciabilidad en un punto	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	Establece los requisitos para determinar continuidad en un punto y concluye que la función es continua en el origen	Adicionalmente, determina las derivadas parciales en y fuera del origen con respecto a "x"	Adicionalmente, determina las derivadas parciales en y fuera del origen con respecto a "y"	Adicional a todo lo anterior determina y demuestra la diferenciabilidad de la función en el punto de origen
	0-5	6-10	11-15	16-20

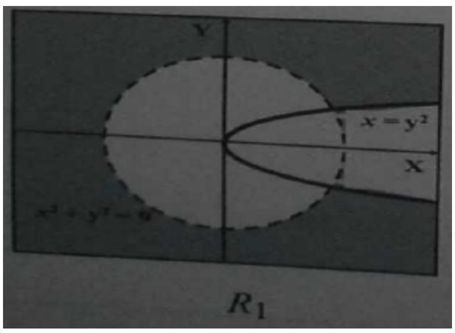
SEGUNDO TEMA

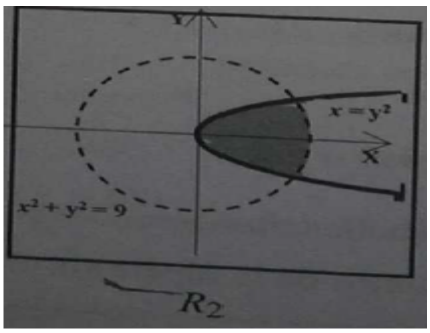
Hallar el dominio de la función $f(x,y)=\sqrt{\frac{y^2-x}{x^2+y^2-9}}$ y realizar el bosquejo del mismo en el plano.

$$(x,y) \in Dom\, f \Leftrightarrow \frac{y^2-x}{x^2+y^2-9} \geq 0$$

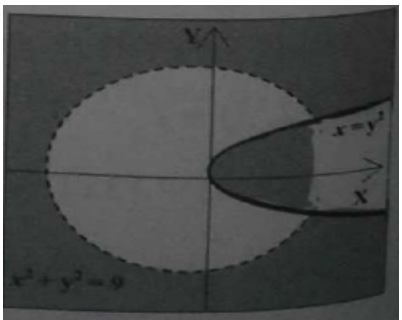
$$\Leftrightarrow (y^2-x \geq 0 \;\wedge\; x^2+y^2-9>0) \;\vee\; (y^2-x \leq 0 \;\wedge\; x^2+y^2-9<0)$$
$$\Leftrightarrow (y^2 \geq x \;\wedge\; x^2+y^2>9) \;\vee\; (y^2 \leq x \;\wedge\; x^2+y^2<9)$$
$$\Leftrightarrow (x \leq y^2 \;\wedge\; x^2+y^2>3^2) \;\vee\; (y^2 \leq x \;\wedge\; x^2+y^2<3^2)$$

Sean $R_1 = \{(x,y) \,/\, x \leq y^2 \;\wedge\; x^2+y^2>3^2\}$ y
$R_2 = \{(x,y) \,/\, y^2 \leq x \;\wedge\; x^2+y^2<3^2\}$





entonces $Dom\, f = R_1 \cup R_2$



$D_f = R_1 \cup R_2$

El estudiante debe estar en la capacidad de calcular el dominio de funciones de varias variables	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	Plantea la desigualdad donde la función tiene sentido, pero no resuelve dichas desigualdades y no grafica ninguna de las regiones involucradas	Plantea la desigualdad donde la función tiene sentido, resuelve dichas desigualdades pero comete errores al resolver, no grafica ninguna las regiones involucradas	Plantea la desigualdad donde la función tiene sentido, resuelve dichas desigualdades de forma correcta pero no grafica ninguna las regiones involucradas	Plantea la desigualdad donde la función tiene sentido, resuelve dichas desigualdades de forma correcta y grafica todas las regiones involucradas
	0-2	3-9	10-14	15

TERCER TEMA

La segunda derivada direccional de $\boldsymbol{f(x,y)}$ es definida como $\boldsymbol{D_u^2 f(x,y) = D_u[D_u f(x,y)]}$. Si $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + 5x^2y + y^3}$, u=$\boldsymbol{< \frac{3}{5}, \frac{4}{5} >}$, calcule $\boldsymbol{D_u^2 f(2,1)}$.

Como $\mathrm{f(x,y,z) = x^2 + 5x^2y + y^2}$ entonces
$\nabla f(x,y,z) = (2x + 10xy, 5x^2 + 2y)$, así
$D_u f(x,y) = (2x + 10xy, 5x^2 + 2y)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}\ \left(x + 5xy + \frac{5}{2}x^2 + y\right)$. Ahora
$D_u(D_u f(x,y)) = \nabla D_u f(x,y)\ (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ pero
$\nabla D_u f(x,y) = \sqrt{2}\ (1 + 5y + 5x, 1)$, entonces
$D_u(D_u f(x,y)) = \sqrt{2}\ (1 + 5y + 5x, 1)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 5y + 5x \ \therefore\ D_u(D_u f(2,1) =$
$17.$

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante debe ser capaz de comprender sobre la utilidad del vector gradiente en el cálculo de derivadas direccionales.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante determina el vector gradiente de la función	Obtiene la derivada direccional de la función como producto punto del vector gradiente y el vector unitario	Emplea el criterio de la segunda derivada para obtener la expresión general de lo solicitado	Aplica correctamente la expresión obtendia para calcular la segunda derivada en el punto (2,1)
	0-2	3-9	10-14	15

CUARTO TEMA

La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por

$$\mathbf{T(x,y,z)\ =\ 200}e^{x^2-3y^2+9z^2}$$

donde T se mide en $°\mathrm{C}$ y $\mathrm{x,y,z}$ en metros. Determine la razón de cambio de temperatura en el punto $\mathrm{P} = (\mathbf{3,3,1})$ en dirección al punto $(\mathbf{0,4,3})$.

Claramente la derivada direccional da una respuesta, por lo que es necesario obtener el vector gradiente y el vector unitario direccional. Entonces:

$\nabla T(x,y,z) = 200e^{2x^2-3y^2+9z^2}(4x,-6y,18z)$, luego

$\nabla T(3,3,1) = 200(12,-18,18)$, el vector direccional unitario es $\frac{1}{5}(0,4,3)$. Así

$Df_u(3,3,1) = 40(12,-18,18)(0,4,3) = 40(-18) = -720$.

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante debe ser capaz de comprender sobre la utilidad del vector gradiente en el cálculo de derivadas direccionales.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	El estudiante determina el vector gradiente en el punto dado.	Establece la dirección unitaria correspondiente.	Emplea el gradiente para plantear la fórmula de la derivada direccional.	Opera la fórmula de la derivada direccional para emitir una conclusión pertinente.
	0-2	3-7	8-9	10

QUINTO TEMA

Verificar el Teorema de Green para el campo vectorial $\boldsymbol{F(x,y) = (e^x - x^2y, 3x^2y)}$ **en la región R encerrada por las curvas:** $y = x^2, \quad x = y^2$

Vemos que se cumple la hipótesis del TEOREMA DE GREEN, el campo es de clase C^1, la Región R encerrada por una curva cerrada y suave (conexa)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + 6xy$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dydx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 6xy)\, dydx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2\sqrt{x} + 3x \cdot x\right) - (x^2 \cdot x^2 + 3x \cdot (x^2)^2)dx$$

$$= \frac{41}{70}$$

Mediante la integral de línea

$$\alpha_1(t) = (t, t^2);$$

$$\alpha_1(t) = (t^2, t) \int_0^1 \boldsymbol{F}\,(\alpha_1(t))°\alpha_1'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \boldsymbol{F}\,(t, t^2)°(1,2t)dt$$

$$= \int_0^1 (e^t - t^2 \cdot t^2, 3t^2 \cdot t^2)\,°(1,2t)dt$$

$$= \int_0^1 (e^t - t^4 + 6t^5)\, dt = e - \frac{1}{5}$$

Sobre $\alpha_2(t)$

$$\boldsymbol{F}(\alpha_2(t)) = \boldsymbol{F}(t^2, t) \int_{\alpha_0} d\,\alpha_2$$

$$= \int_0^1 \left(e^{t^2} - t^5, 3t^5\right)°(2t, 1)dt$$

$$= \int_0^1 \left(2te^{t^2} - 2t^6 + 3t^5\right) dt$$

$$= e - \frac{11}{14}$$

$$\therefore \int \boldsymbol{F}\, d\alpha = \int -\boldsymbol{F} d\alpha_1 - \int \boldsymbol{F}\, d\alpha_2 = \left(e - \frac{1}{5}\right) - \left(e - \frac{11}{14}\right) = \frac{41}{70}$$

RÚBRICA

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo interpretar y aplicar el teorema de Green para el cálculo de integrales de línea.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo plantear la integral de línea a través del teorema de Green.	Identifica la curva cerrada y la región plana limita por dicha curva, pero aplica mal el teorema de Green.	Verifica hipótesis del teorema, y aplica correctamente el teorema de Green, pero no resuelve la integral.	Identifica la curva cerrada, la región plana limita por dicha curva, verifica hipótesis y aplica correctamente el teorema de Green resolviendo la integral.
	0	1 - 10	11 - 19	20

SEXTO TEMA

Sea $\boldsymbol{g(x,y,z) = f\left(\frac{y^2-x}{xy^2}, \frac{z^3-x}{xz^3}\right)}$**, con** $\boldsymbol{f(u,v)}$ **de clase** $\boldsymbol{C^2}$

Demuestre que $\boldsymbol{x^2 g_x + \frac{y^3}{2} g_y + \frac{z^4}{3} g_z = 0}$

Sea $u(x,y,z) = \frac{y^2-x}{xy^2}$ y $v(x,y,z) = \frac{z^3-x}{xz^3}$, entonces

$$g_x = f_u u_x + f_v v_x$$

Calculando u_x y v_x, tenemos

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2-x}{xy^2} = \frac{-xy^2-(y^2-x)y^2}{x^2y^4}$$

$$= -\frac{y^2(x+y^2-x)}{x^2y^4}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

Y

$$v_x = \frac{-xz^3 - z^3(z^3-x)}{x^2z^6}$$

$$= \frac{-z^3(x+z^3-x)}{x^2z^6} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

Análogamente $g_y = f_u u_y + f_v v_y$

$$u_y = \frac{2y(xy^2) - 2yx(y^2-x)}{x^2y^4}$$

$$= 2xy\frac{y^2 - y^2 + x}{x^2y^4}$$
$$= \frac{2}{y^3}$$
$v_y = 0 \leftarrow$ no es función de y

entonces $g_y = \frac{2}{y^3} f_u$

$$g_z = f_u u_z + f_v v_z$$

$u_z = 0 \leftarrow no\ es\ función\ de\ z$

$$v_z = \frac{3z^2(xz^3) - 3z^2x(z^3 - x)}{x^2z^6}$$
$$= 3z^2x\frac{z^3 - z^3 + x}{x^2z^6}$$
$$= \frac{3}{z^4}$$
$$g_z = \frac{3}{z^4} f_v$$

Es decir

$$x^2 g_x + \frac{y^3}{2} g_y + \frac{z^4}{3} g_z \quad = -\left(f_u + f_v\right) + f_u + f_v = 0$$

Capacidades deseadas	**Desempeño literal**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar la regla de la cadena de segundo orden para funciones de varias variables	No sabe cómo plantear el problema	Aplica la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial g}{\partial u}$ y evalúa de forma correcta los términos que componen la expresión	Aplica la regla de la cadena para hallar cada una de las derivadas de g, pero se equivoca en la evaluación de algún término de la expresión	El estudiante calcula y demuestra en forma correcta y expresa la respuesta de forma clara
	0	1-10	11-19	20