FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	24/enero/2022

Tema # 1

1. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}\,dx$$

Solución:

Considere el cambio de variable:

$$u = \arctan(2x)$$
$$du = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2)dx = \frac{2}{1+4x^2}dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\arctan(2x)}{1+4x^2}dx$$

$$\int \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4}u^2 + C$$

$$\int \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\arctan(2x)\right)^2 + C$$

Por lo que:

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\arctan(2x)\right)^2\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}\left(\left(\arctan(1)\right)^2 - \left(\arctan(0)\right)^2\right)$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - (0)^2\right)$$

$$\boxed{\therefore \int_0^{1/2} \frac{arctan(2x)}{1+4x^2}dx = \frac{\pi^2}{64}}$$

2. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_0^{1/4} \frac{\boldsymbol{arcsen(2x)}}{\sqrt{\mathbf{1-4x^2}}}\boldsymbol{dx}$$

Solución:

Considere el cambio de variable:

$$u = arcsen(2x)$$
$$du = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2)dx = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

Entonces:

$$\int \frac{arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\ arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

$$\int \frac{arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\int u\ du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4}u^2 + C$$

$$\int \frac{arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{4}\big(arcsen(2x)\big)^2 + C$$

Por lo que:

$$\int_0^{1/4} \frac{arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{4}\big(arcsen(2x)\big)^2\Big|_0^{1/4} = \frac{1}{4}\left(\left(arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - \big(arcsen(0)\big)^2\right)$$

$$\int_0^{1/4} \frac{arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - (0)^2\right)$$

$$\boxed{\therefore \int_0^{1/4} \frac{arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{\pi^2}{144}}$$

3. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_{1}^{3} \frac{\boldsymbol{arctan}(\sqrt{\boldsymbol{x}})}{\sqrt{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})} \boldsymbol{dx}$$

Solución:

Considere el cambio de variable:

$$u = arctan(\sqrt{x})$$
$$du = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$$

Entonces:

$$\int \frac{arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \mathbf{2} \int \frac{arctan(\sqrt{x})}{\mathbf{2}\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$\int \frac{arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int u \, du = \cancel{2} \cdot \frac{u^2}{\cancel{2}} + C = u^2 + C$$

$$\int \frac{arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \left(arctan(\sqrt{x})\right)^2 + C$$

Por lo que:

$$\int_{1}^{3} \frac{arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \left(arctan(\sqrt{x})\right)^2 \Big|_{1}^{3} = \left(arctan(\sqrt{3})\right)^2 - \left(arctan(1)\right)^2$$

$$\int_{1}^{3} \frac{arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = \pi^2\left(\frac{16-9}{144}\right)$$

$$\boxed{\therefore \int_{1}^{3} \frac{arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \frac{7\pi^2}{144}}$$

4. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{\boldsymbol{cot}(\boldsymbol{2x})}}{\boldsymbol{sen}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{2x})} \boldsymbol{dx}$$

Solución:

Considere el cambio de variable:

$$u = cot(2x)$$
$$du = -csc^2(2x)\cdot(2)dx = -2csc^2(2x)dx = -\frac{2}{sen^2(2x)}dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{cot(2x)}}{sen^2(2x)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sqrt{cot(2x)}}{sen^2(2x)}dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$

$$\int \frac{\sqrt{cot(2x)}}{sen^2(2x)}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{u^3} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{cot^3(2x)} + C$$

Por lo que:

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{cot(2x)}}{sen^2(2x)}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{cot^3(2x)}\Big|_{\pi/8}^{\pi/4}$$

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{cot(2x)}}{sen^2(2x)}dx = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{cot^3\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{cot^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) = -\frac{1}{3}\left(0-\sqrt{1}\right)$$

$$\boxed{\therefore \int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{cot(2x)}}{sen^2(2x)}dx = \frac{1}{3}}$$

5. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_{0}^{\pi/12} \frac{\sqrt{tan(3x)}}{cos^2(3x)}dx$$

Solución:

Considere el cambio de variable:

$$u = tan(3x)$$
$$du = sec^2(3x)\cdot(3)dx = 3sec^2(3x)dx = \frac{3}{cos^2(3x)}dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{tan(3x)}}{cos^2(3x)}dx = \frac{1}{\mathbf{3}}\int \frac{\mathbf{3}\sqrt{tan(3x)}}{cos^2(3x)}dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du$$

$$\int \frac{\sqrt{tan(3x)}}{cos^2(3x)}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{u^3} + C = \frac{2}{9}\sqrt{tan^3(3x)} + C$$

Por lo que:

$$\int_0^{\pi/12} \frac{\sqrt{tan(3x)}}{cos^2(3x)}dx = \frac{2}{9}\sqrt{tan^3(3x)}\Big|_0^{\pi/12}$$

$$\int_0^{\pi/12} \frac{\sqrt{tan(3x)}}{cos^2(3x)}dx = \frac{2}{9}\left(\sqrt{tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{tan^3(0)}\right) = \frac{2}{9}\left(\sqrt{1} - 0\right)$$

$$\boxed{\therefore \int_0^{\pi/12} \frac{\sqrt{tan(3x)}}{cos^2(3x)}dx = \frac{2}{9}}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	24/enero/2022

Tema # 2

6. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\boldsymbol{\alpha x^2} + \boldsymbol{\beta x}) \mathbf{2}^{\boldsymbol{\theta x}} \boldsymbol{dx} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha, \beta, \theta} \ \boldsymbol{son\ constantes}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u = \alpha x^2 + \beta x \qquad dv = 2^{\theta x} dx$$
$$du = (2\alpha x + \beta) dx \qquad v = \frac{2^{\theta x}}{\theta ln(2)}$$

$$\int (\alpha x^2 + \beta x) 2^{\theta x} dx = \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x}{\theta ln(2)}\right) 2^{\theta x} - \frac{1}{\theta ln(2)} \int (2\alpha x + \beta) 2^{\theta x} dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u = 2\alpha x + \beta \qquad dv = 2^{\theta x} dx$$
$$du = 2\alpha\, dx \qquad v = \frac{2^{\theta x}}{\theta ln(2)}$$

$$\int (2\alpha x + \beta) 2^{\theta x} dx = \left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta ln(2)}\right) 2^{\theta x} - \frac{2\alpha}{\theta ln(2)} \int 2^{\theta x} dx$$

$$\int (2\alpha x + \beta) 2^{\theta x} dx = \left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta ln(2)}\right) 2^{\theta x} - \frac{2\alpha}{\theta ln(2)} \cdot \frac{2^{\theta x}}{\theta ln(2)} + K$$

$$\boxed{\therefore \int (\alpha x^2 + \beta x) 2^{\theta x} dx = \frac{1}{\theta ln(2)} \left[\alpha x^2 + \beta x - \frac{2\alpha x + \beta}{\theta ln(2)} + \frac{2\alpha}{\theta^2 ln^2(2)}\right] 2^{\theta x} + C \; ; C \in \mathbb{R}}$$

7. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x}) \boldsymbol{sen(\theta x) dx} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha, \beta, \theta \ son\ constantes}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u = \alpha x^2 + \beta x \qquad dv = sen(\theta x)dx$$
$$du = (2\alpha x + \beta)dx \qquad v = -\frac{1}{\theta}cos(\theta x)$$

$$\int (\alpha x^2 + \beta x)sen(\theta x)dx = -\left(\frac{\alpha x^2 + \beta x}{\theta}\right)cos(\theta x) + \frac{1}{\theta}\int (2\alpha x + \beta)cos(\theta x)dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u = 2\alpha x + \beta \qquad dv = cos(\theta x)dx$$
$$du = 2\alpha\, dx \qquad v = \frac{1}{\theta}sen(\theta x)$$

$$\int (2\alpha x + \beta)cos(\theta x)dx = \left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta}\right)sen(\theta x) - \frac{2\alpha}{\theta}\int sen(\theta x)dx$$

$$\int (2\alpha x + \beta)cos(\theta x)dx = \left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta}\right)sen(\theta x) + \frac{2\alpha}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta}cos(\theta x) + K$$

$$\boxed{\therefore \int (\alpha x^2 + \beta x)sen(\theta x)dx = \frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta}\right)sen(\theta x) - \left(\alpha x^2 + \beta x - \frac{2\alpha}{\theta^2}\right)cos(\theta x)\right] + C\ ;C \in \mathbb{R}}$$

8. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x}) \boldsymbol{cos(\theta x) dx} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha, \beta, \theta \ son\ constantes}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u = \alpha x^2 + \beta x \qquad dv = cos(\theta x)dx$$
$$du = (2\alpha x + \beta)dx \qquad v = \frac{1}{\theta}sen(\theta x)$$

$$\int (\alpha x^2+\beta x)cos(\theta x)dx=\left(\frac{\alpha x^2+\beta x}{\theta}\right)sen(\theta x)-\frac{1}{\theta}\int (2\alpha x+\beta)sen(\theta x)dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u=2\alpha x+\beta \qquad dv=sen(\theta x)dx$$
$$du=2\alpha\, dx \qquad v=-\frac{1}{\theta}cos(\theta x)$$

$$\int (2\alpha x+\beta)sen(\theta x)dx=-\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\theta}\right)cos(\theta x)+\frac{2\alpha}{\theta}\int cos(\theta x)dx$$

$$\int (2\alpha x+\beta)sen(\theta x)dx=-\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\theta}\right)cos(\theta x)+\frac{2\alpha}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta}sen(\theta x)+K$$

$$\boxed{\therefore \int (\alpha x^2+\beta x)cos(\theta x)dx=\frac{1}{\theta}\left[\left(\alpha x^2+\beta x-\frac{2\alpha}{\theta^2}\right)sen(\theta x)+\left(\frac{2\alpha x+\beta}{\theta}\right)cos(\theta x)\right]+C\ ;C\in\mathbb{R}}$$

9. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \boldsymbol{(\alpha x-\beta x^2)2^{-\theta x}dx} \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha,\beta,\theta\ son\ constantes}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u=\alpha x-\beta x^2 \qquad dv=2^{-\theta x}dx$$
$$du=(\alpha-2\beta x)dx \qquad v=-\frac{2^{-\theta x}}{\theta ln(2)}$$

$$\int (\alpha x-\beta x^2)2^{-\theta x}dx=-\left(\frac{\alpha x-\beta x^2}{\theta ln(2)}\right)2^{-\theta x}+\frac{1}{\theta ln(2)}\int (\alpha-2\beta x)2^{-\theta x}dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u=\alpha-2\beta x \qquad dv=2^{-\theta x}dx$$
$$du=-2\beta\, dx \qquad v=-\frac{2^{-\theta x}}{\theta ln(2)}$$

$$\int (\alpha-2\beta x)2^{-\theta x}dx=-\left(\frac{\alpha-2\beta x}{\theta ln(2)}\right)2^{-\theta x}-\frac{2\beta}{\theta ln(2)}\int 2^{-\theta x}dx$$

$$\int(\alpha-2\beta x)2^{-\theta x}dx=-\left(\frac{\alpha-2\beta x}{\theta ln(2)}\right)2^{-\theta x}+\frac{2\beta}{\theta ln(2)}\cdot\frac{2^{-\theta x}}{\theta ln(2)}+K$$

$$\boxed{\therefore\int(\alpha x-\beta x^2)2^{-\theta x}dx=-\frac{1}{\theta ln(2)}\left[\alpha x-\beta x^2+\frac{\alpha-2\beta x}{\theta ln(2)}-\frac{2\beta}{\theta^2 ln^2(2)}\right]2^{-\theta x}+C\,;C\in\mathbb{R}}$$

10. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int(\boldsymbol{\alpha x-\beta x^2})\boldsymbol{cos(\theta x)dx}\quad;\quad\boldsymbol{\alpha,\beta,\theta\ son\ constantes}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u=\alpha x-\beta x^2 \qquad dv=cos(\theta x)dx$$
$$du=(\alpha-2\beta x)dx \qquad v=\frac{1}{\theta}sen(\theta x)$$

$$\int(\alpha x-\beta x^2)cos(\theta x)dx=\left(\frac{\alpha x-\beta x^2}{\theta}\right)sen(\theta x)-\frac{1}{\theta}\int(\alpha-2\beta x)sen(\theta x)dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$u=\alpha-2\beta x \qquad dv=sen(\theta x)dx$$
$$du=-2\beta\ dx \qquad v=-\frac{1}{\theta}cos(\theta x)$$

$$\int(\alpha-2\beta x)sen(\theta x)dx=-\left(\frac{\alpha-2\beta x}{\theta}\right)cos(\theta x)-\frac{2\beta}{\theta}\int cos(\theta x)dx$$

$$\int(\alpha-2\beta x)sen(\theta x)dx=-\left(\frac{\alpha-2\beta x}{\theta}\right)cos(\theta x)-\frac{2\beta}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta}sen(\theta x)+K$$

$$\boxed{\therefore\int(\alpha x-\beta x^2)cos(\theta x)dx=\frac{1}{\theta}\left[\left(\alpha x-\beta x^2+\frac{2\beta}{\theta^2}\right)sen(\theta x)+\left(\frac{\alpha-2\beta x}{\theta}\right)cos(\theta x)\right]+C\,;C\in\mathbb{R}}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	24/enero/2022

Tema # 3

11. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}\,dx$$

Solución:

Se aplica división sintética al polinomio del denominador:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -3 & 7 & -5 \\ \boxed{1} & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x - 1)(x^2 - 2x + 5)$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} = \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$2x^2 - 3x + 9 = A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$Cuando\ x = 1{:}\quad 8 = A(4) + (B + C)(0) \quad \rightarrow \quad A = 2$$

$$Del\ término\ cuadrático{:}\quad 2 = 2 + B \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$Del\ término\ independiente{:}\quad 9 = 10 - C \quad \rightarrow \quad C = 1$$

$$\int \frac{2x^2-3x+9}{x^3-3x^2+7x-5}dx = \int \left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1+4}\right)dx$$

$$\int \frac{2x^2-3x+9}{x^3-3x^2+7x-5}dx = 2\int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}dx$$

$$\boxed{\therefore \int \frac{2x^2-3x+9}{x^3-3x^2+7x-5}dx = 2ln|x-1|+\frac{1}{2}arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+C\,;C\in\mathbb{R}}$$

12. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{\mathbf{4x^2-2x+1}}{\mathbf{x^3+x^2-x-1}}\mathbf{dx}$$

Solución:

$$x^3+x^2-x-1 = (x^3+x^2)-(x+1) = x^2(x+1)-(x+1)$$
$$x^3+x^2-x-1 = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{4x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{4x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A(x+1)^2+B(x^2-1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$4x^2-2x+1 = A(x+1)^2+B(x^2-1)+C(x-1)$$

$$Cuando\ x=1:\ \ 3 = A(4)+B(0)+C(0)\quad\rightarrow\quad A=\frac{3}{4}$$

$$Del\ término\ cuadrático:\quad 4=\frac{3}{4}+B\quad\rightarrow\quad B=\frac{13}{4}$$

$$Del\ término\ independiente:\quad 1 = A-B-C\quad\rightarrow\quad C=-\frac{7}{2}$$

$$\int \frac{4x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1}dx = \int\left(\frac{3/4}{x-1}+\frac{13/4}{x+1}-\frac{7/2}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$\int \frac{4x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1}dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{13}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{\therefore \int \frac{4x^2-2x+1}{x^3+x^2-x-1}dx = \frac{3}{4}ln|x-1| + \frac{13}{4}ln|x+1| + \frac{7}{2(x+1)} + C\,;C \in \mathbb{R}}$$

13. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2-14x+15}}{\boldsymbol{x^3-3x^2+x+5}}\boldsymbol{dx}$$

Solución:

Se aplica división sintética al polinomio del denominador:

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{-1} & 1 & -3 & 1 & 5 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$x^3-3x^2+x+5 = (x+1)(x^2-4x+5)$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{x^2-14x+15}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

$$\frac{x^2-14x+15}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)}{x^3-3x^2+x+5}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$x^2-14x+15 = A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)$$

$$Cuando\ x=-1: \ \ 30 = A(10)+(-B+C)(0) \ \ \rightarrow \ \ A=3$$

$$Del\ término\ cuadrático: \ \ 1 = 3+B \ \ \rightarrow \ \ B=-2$$

$$Del\ término\ independiente: \ \ 15 = 15+C \ \ \rightarrow \ \ C=0$$

$$\int \frac{x^2-14x+15}{x^3-3x^2+x+5}dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x^2-4x+5}\right)dx$$

$$\int \frac{x^2-14x+15}{x^3-3x^2+x+5}dx = 3\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{2x\boldsymbol{-4+4}}{x^2-4x+5}dx$$

$$\int \frac{x^2-14x+15}{x^3-3x^2+x+5}dx = 3\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx - \int \frac{4}{(x-2)^2+1^2}dx$$

$$\boxed{\therefore \int \frac{x^2-14x+15}{x^3-3x^2+x+5}dx = 3ln|x+1| - ln|x^2-4x+5| - 4arctan(x-2) + C\ ; C \in \mathbb{R}}$$

14. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{\mathbf{3x^2-2x+1}}{\mathbf{x^3-x^2-x+1}}\mathbf{dx}$$

Solución:

$$x^3-x^2-x+1 = (x^3-x^2)-(x-1) = x^2(x-1)-(x-1)$$
$$x^3-x^2-x+1 = (x^2-1)(x-1) = (x+1)(x-1)^2$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$3x^2-2x+1 = A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)$$

$$Cuando\ x=-1:\ \ 6 = A(4)+B(0)+C(0) \quad \rightarrow \quad A = \frac{3}{2}$$

$$Del\ término\ cuadrático: \quad 3 = \frac{3}{2}+B \quad \rightarrow \quad B = \frac{3}{2}$$

$$Del\ término\ independiente: \quad 1 = A-B+C \quad \rightarrow \quad C = 1$$

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \left(\frac{3/2}{x+1} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{\therefore \int \frac{3x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{3}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\,;C \in \mathbb{R}}$$

15. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{\mathbf{1-4x-3x^2-3x^3}}{\mathbf{x^4+x^3+x^2}}\mathbf{dx}$$

Solución:

$$x^4+x^3+x^2 = x^2(x^2+x+1)$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{1-4x-3x^2-3x^3}{x^4+x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$\frac{1-4x-3x^2-3x^3}{x^4+x^3+x^2} = \frac{Ax(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)x^2}{x^4+x^3+x^2}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$1-4x-3x^2-3x^3 = Ax(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)x^2$$

$$Cuando\ x=0:\ 1 = A(0)+B(1)+C(0) \quad \rightarrow \quad B=1$$

$$1-4x-3x^2-3x^3 = Ax^3+Ax^2+Ax+x^2+x+1+Cx^3+Dx^2$$

$$Del\ término\ lineal: \quad -4 = A+B \quad \rightarrow \quad A=-5$$

$$Del\ término\ cuadrático: \quad -3 = A+1+D \quad \rightarrow \quad D=1$$

$$Del\ término\ cúbico: \quad -3 = A+C \quad \rightarrow \quad C=2$$

$$\int \frac{1-4x-3x^2-3x^3}{x^4+x^3+x^2}dx = \int \left(-\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$\int \frac{1-4x-3x^2-3x^3}{x^4+x^3+x^2}dx = -5\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$\boxed{\therefore \int \frac{1-4x-3x^2-3x^3}{x^4+x^3+x^2}dx = -5ln|x| - \frac{1}{x} + ln|x^2+x+1| + C\,;C \in \mathbb{R}}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	24/enero/2022

Tema # 4

16. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-2}^{1} (4 - |x|)\,dx$$

Solución:

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-2}^{1} (4 - |x|)dx = \int_{-2}^{0} (4 + x)dx + \int_{0}^{1} (4 - x)dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular P, con n subintervalos de igual longitud y los puntos muestra $\bar{x}_i$ se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $\bar{x}_i = x_i$.

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-2}^{0} (4 + x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0 - (-2)}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = -2$$
$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{2}{n}$$
$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{2}{n}\right)$$
$$x_3 = -2 + 3\Delta x = -2 + 3\left(\frac{2}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + \cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right) = -2 + 2 = 0$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 4 + x_i = 4 + \left(-2 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right) = 2 + \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-2}^{0}(4+x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{2i}{n}\right)$$

$$\int_{-2}^{0}(4+x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}2+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)\left(2n+\frac{\cancel{2}}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}\right)\right)$$

$$\int_{-2}^{0}(4+x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)(2n+n+1) = \lim_{n\to+\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right) = 6+0$$

Por lo que:

$$\int_{-2}^{0}(4+x)\,dx = 6$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_{0}^{1}(4-x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
x_1 &= \Delta x = \frac{1}{n}\\
x_2 &= 2\Delta x = 2\left(\frac{1}{n}\right)\\
x_3 &= 3\Delta x = 3\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_i &= i\Delta x = i\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_n &= n\Delta x = \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right) = 1
\end{aligned}
$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 4 - x_i = 4 - i\left(\frac{1}{n}\right) = 4 - \frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_0^1 (4-x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(4 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(4 - \frac{i}{n}\right)$$

$$\int_0^1 (4-x)dx = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 4 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(4n - \frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_0^1 (4-x)dx = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(4n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{7}{2} - 0$$

Por lo que:

$$\int_0^1 (4-x)dx = \frac{7}{2}$$

Pero:

$$\int_{-2}^{1} (4-|x|)dx = \int_{-2}^{0} (4+x)dx + \int_0^1 (4-x)dx = 6 + \frac{7}{2}$$

$$\boxed{\therefore \int_{-2}^{1} (4-|x|)dx = \frac{19}{2}}$$

17. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-1}^{2}(|x|+1)dx$$

Solución:

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-1}^{2}(|x|+1)dx=\int_{-1}^{0}(-x+1)dx+\int_{0}^{2}(x+1)dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular P, con n subintervalos de igual longitud y los puntos muestra $\bar{x}_i$ se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, $\bar{x}_i = x_i$.

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i)\Delta x_i=\lim_{n\to +\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-1}^{0}(-x+1)dx=\lim_{n\to +\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{0-(-1)}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1\\
x_1 &= -1+\Delta x=-1+\frac{1}{n}\\
x_2 &= -1+2\Delta x=-1+2\left(\frac{1}{n}\right)\\
x_3 &= -1+3\Delta x=-1+3\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_i &= -1+i\Delta x=-1+i\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$x_n = -1 + n\Delta x = -1 + \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -1 + 1 = 0$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = -x_i + 1 = -\left(-1 + i\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1 = 2 - \frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-1}^{0}(-x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2-\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(2-\frac{i}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^{0}(-x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(2n - \frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-1}^{0}(-x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(2n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{3}{2} - 0$$

Por lo que:

$$\int_{-1}^{0}(-x+1)dx = \frac{3}{2}$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_{0}^{2}(x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \Delta x = \frac{2}{n} \\ x_2 &= 2\Delta x = 2\left(\frac{2}{n}\right) \\ x_3 &= 3\Delta x = 3\left(\frac{2}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_i &= i\Delta x = i\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$x_n = n\Delta x = \cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right) = 2$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = x_i + 1 = i\left(\frac{2}{n}\right) + 1 = \frac{2i}{n} + 1$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_0^2 (x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right)$$

$$\int_0^2 (x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}\right) + n\right)$$

$$\int_0^2 (x+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)(n+1+n) = \lim_{n\to+\infty} 2\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2(2+0)$$

Por lo que:

$$\int_0^2 (x+1)dx = 4$$

Pero:

$$\int_{-1}^{2} (|x|+1)dx = \int_{-1}^{0} (-x+1)dx + \int_0^2 (x+1)dx = \frac{3}{2} + 4$$

$$\boxed{\therefore \int_{-1}^{2} (|x|+1)dx = \frac{11}{2}}$$

18. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-1}^{4} (|x-2|)dx$$

Solución:

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-1}^{4}(|x-2|)dx = \int_{-1}^{2}(2-x)dx + \int_{2}^{4}(x-2)dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular P, con n subintervalos de igual longitud y los puntos muestra $\bar{x}_i$ se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $\bar{x}_i = x_i$.

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-1}^{2}(2-x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1 \\
x_1 &= -1 + \Delta x = -1 + \frac{3}{n} \\
x_2 &= -1 + 2\Delta x = -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right) \\
x_3 &= -1 + 3\Delta x = -1 + 3\left(\frac{3}{n}\right) \\
&\vdots \\
x_i &= -1 + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{3}{n}\right) \\
&\vdots \\
x_n &= -1 + n\Delta x = -1 + \cancel{n}\left(\frac{3}{\cancel{n}}\right) = -1 + 3 = 2
\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 2 - x_i = 2 - \left(-1 + i\left(\frac{3}{n}\right)\right) = 3 - \frac{3i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-1}^{2}(2-x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(3-\frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(3-\frac{3i}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^{2}(2-x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}3-\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left(3n-\frac{3}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-1}^{2}(2-x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left(3n-\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2n}\right) = \frac{9}{2}-0$$

Por lo que:

$$\int_{-1}^{2}(2-x)dx = \frac{9}{2}$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_{2}^{4}(x-2)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\\
x_1 &= 2+\Delta x = 2+\frac{2}{n}\\
x_2 &= 2+2\Delta x = 2+2\left(\frac{2}{n}\right)\\
x_3 &= 2+3\Delta x = 2+3\left(\frac{2}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_i &= 2+i\Delta x = 2+i\left(\frac{2}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_n &= 2+n\Delta x = 2+\cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right) = 2+2 = 4
\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = x_i - 2 = \left(\cancel{2}+\frac{2i}{n}\right)-\cancel{2} = \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_2^4 (x-2)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\int_2^4 (x-2)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{n^{\cancel{2}}}\right)\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{2}{n}\right) = 2+0$$

Por lo que:

$$\int_2^4 (x-2)dx = 2$$

Pero:

$$\int_{-1}^4 (|x-2|)dx = \int_{-1}^2 (2-x)dx + \int_2^4 (x-2)dx = \frac{9}{2} + 2$$

$$\boxed{\therefore \int_{-1}^4 (|x-2|)dx = \frac{13}{2}}$$

19. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-3}^{0} (|x+2|)dx$$

Solución:

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-3}^0 (|x+2|)dx = \int_{-3}^{-2} (-x-2)dx + \int_{-2}^0 (x+2)dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular P, con n subintervalos de igual longitud y los puntos muestra $\bar{x}_i$ se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $\bar{x}_i = x_i$.

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-3}^{-2}(-x-2)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{-2-(-3)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= -3\\
x_1 &= -3+\Delta x = -3+\frac{1}{n}\\
x_2 &= -3+2\Delta x = -3+2\left(\frac{1}{n}\right)\\
x_3 &= -3+3\Delta x = -3+3\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_i &= -3+i\Delta x = -3+i\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\vdots\\
x_n &= -3+n\Delta x = -3+\cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -3+1 = -2
\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = -x_i-2 = -\left(-3+i\left(\frac{1}{n}\right)\right)-2 = 1-\frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-3}^{-2}(-x-2)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)$$

$$\int_{-3}^{-2}(-x-2)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(n-\frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-3}^{-2}(-x-2)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(n-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}-0$$

Por lo que:

$$\int_{-3}^{-2}(-x-2)dx = \frac{1}{2}$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_{-2}^{0}(x+2)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= -2 \\ x_1 &= -2+\Delta x = -2+\frac{2}{n} \\ x_2 &= -2+2\Delta x = -2+2\left(\frac{2}{n}\right) \\ x_3 &= -2+3\Delta x = -2+3\left(\frac{2}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_i &= -2+i\Delta x = -2+i\left(\frac{2}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_n &= -2+n\Delta x = -2+\cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right) = -2+2 = 0 \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = x_i + 2 = \left(-\cancel{2}+\frac{2i}{n}\right)+\cancel{2} = \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-2}^{0}(x+2)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\int_{-2}^{0}(x+2)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n^{\cancel{2}}}\right)\left(\frac{n(\cancel{n}+1)}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right) = 2+0$$

Por lo que:

$$\int_{-2}^{0}(x+2)dx = 2$$

Pero:

$$\int_{-3}^{0}(|x+2|)dx = \int_{-3}^{-2}(-x-2)dx + \int_{-2}^{0}(x+2)dx = \frac{1}{2} + 2$$

$$\boxed{\therefore \int_{-3}^{0}(|x+2|)dx = \frac{5}{2}}$$

20. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-1}^{2}(\mathbf{3} - |\boldsymbol{x}|)\boldsymbol{dx}$$

Solución:

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-1}^{2}(3-|x|)dx = \int_{-1}^{0}(3+x)dx + \int_{0}^{2}(3-x)dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular P, con n subintervalos de igual longitud y los puntos muestra $\bar{x}_i$ se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $\bar{x}_i = x_i$.

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-1}^{0}(3+x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0-(-1)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = -1$$
$$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + \frac{1}{n}$$

$$x_2 = -1 + 2\Delta x = -1 + 2\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$x_3 = -1 + 3\Delta x = -1 + 3\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n = -1 + n\Delta x = -1 + \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -1 + 1 = 0$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 3 + x_i = 3 + \left(-1 + i\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2 + \frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-1}^{0}(3+x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{i}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^{0}(3+x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(2n + \frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-1}^{0}(3+x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(2n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{5}{2} + 0$$

Por lo que:

$$\int_{-1}^{0}(3+x)dx = \frac{5}{2}$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_{0}^{2}(3-x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 2\Delta x = 2\left(\frac{2}{n}\right)$$
$$x_3 = 3\Delta x = 3\left(\frac{2}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_i = i\Delta x = i\left(\frac{2}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n = n\Delta x = \cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right) = 2$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 3 - x_i = 3 - i\left(\frac{2}{n}\right) = 3 - \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_0^2 (3-x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n}\right)$$

$$\int_0^2 (3-x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 3 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)\left(3n - \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}\right)\right)$$

$$\int_0^2 (3-x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)(3n - n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{2}{n}\right) = 4 - 0$$

Por lo que:

$$\int_0^2 (3-x)dx = 4$$

Pero:

$$\int_{-1}^{2} (3 - |x|)dx = \int_{-1}^{0} (3+x)dx + \int_0^2 (3-x)dx = \frac{5}{2} + 4$$

$$\boxed{\therefore \int_{-1}^{2} (3 - |x|)dx = \frac{13}{2}}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	24/enero/2022

Tema # 5

21. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = k$, entonces $\int_a^b f^2(x)dx = k^2$."

Solución:

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua $f(x) = x\,;x \in [0,2]$:

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x^2)|_0^2 = \frac{1}{2}(4-0) = 2$$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}(x^3)|_0^2 = \frac{1}{3}(8-0) = \frac{8}{3}$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado: $a = 0$, $b = 2$ y $k = 2$.

$$\underbrace{\left(\underbrace{f\ es\ continua\ en\ [a,b]}_{Verdadero} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx = k}_{Verdadero}\right)}_{Verdadero} \rightarrow \underbrace{\int_a^b f^2(x)dx = k^2}_{Falso} \equiv Falso$$

$\therefore$ La proposición es FALSA.

22. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y además $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$."

Solución:

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua $f(x) = x\,;x \in [-1,2]$:

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = \frac{1}{2}(x^2)|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$$

Nótese que la función f tiene ordenadas con valores negativos en $[-1,0)$ y ordenadas con valores positivos o iguales a cero en $[0,2]$.

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado: $a=-1$ y $b=2$.

$$\underbrace{\left(\underbrace{f\ es\ continua\ en\ [a,b]}_{Verdadero} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx \geq 0}_{Verdadero}\right)}_{Verdadero} \rightarrow \underbrace{f(x) \geq 0\ en\ [a,b]}_{Falso} \equiv Falso$$

$\therefore$ La proposición es FALSA.

23. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = k$, entonces $\int_a^b (f(x)+1)dx = k+1$."

Solución:

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua $f(x) = x\,;x \in [0,2]$:

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x^2)|_0^2 = \frac{1}{2}(4-0) = 2$$

$$\int_0^2 (x+1)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^2 = (2-0)+(2-0) = 4$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado: $a=0$, $b=2$ y $k=2$.

$$\underbrace{\left(\underbrace{f\ es\ continua\ en\ [a,b]}_{Verdadero} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx = k}_{Verdadero}\right)}_{Verdadero} \rightarrow \underbrace{\int_a^b (f(x)+1)dx = k+1}_{Falso} \equiv Falso$$

∴ La proposición es FALSA.

24. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = k$, entonces $\int_a^b f(x-1)dx = k-1$."

Solución:

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua $f(x) = x^2\,;\, x \in [0,2]$:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}(x^3)|_0^2 = \frac{1}{3}(8-0) = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3|_0^2 = \frac{1}{3}\big(1-(-1)\big) = \frac{2}{3}$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado: $a=0$, $b=2$ y $k=\frac{8}{3}$.

$$\underbrace{\left(\underbrace{f\ es\ continua\ en\ [a,b]}_{Verdadero} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx = k}_{Verdadero}\right)}_{Verdadero} \rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x-1)dx = k-1}_{Falso} \equiv Falso$$

$\therefore$ La proposición es FALSA.

25. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

"Sea f una función continua en el intervalo $[0, k]$, entonces $\int_0^k f(kx)dx = \frac{1}{k}\int_0^{k^2} f(x)dx$."

Solución:

Considere la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN:

$$u = kx \quad \rightarrow \quad du = k\,dx$$
$$x = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0$$
$$x = k \quad \rightarrow \quad u = k^2$$

$$\int_0^k f(kx)dx = \int_0^k f(kx)\frac{\boldsymbol{k}\,dx}{\boldsymbol{k}}$$

$$\int_0^k f(kx)dx = \int_0^{k^2} f(u)\frac{du}{k}$$

$$\int_0^k f(kx)dx = \frac{1}{k}\int_0^{k^2} f(u)du$$

$$\therefore \int_0^k f(kx)dx = \frac{1}{k}\int_0^{k^2} f(x)dx$$

$\therefore$ La proposición es VERDADERA.

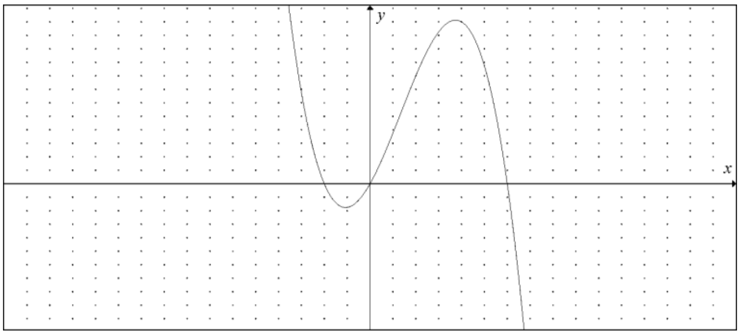
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	24/enero/2022

Tema # 6

26. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la función $y = f(x) = 3x + 2x^2 - x^3$:



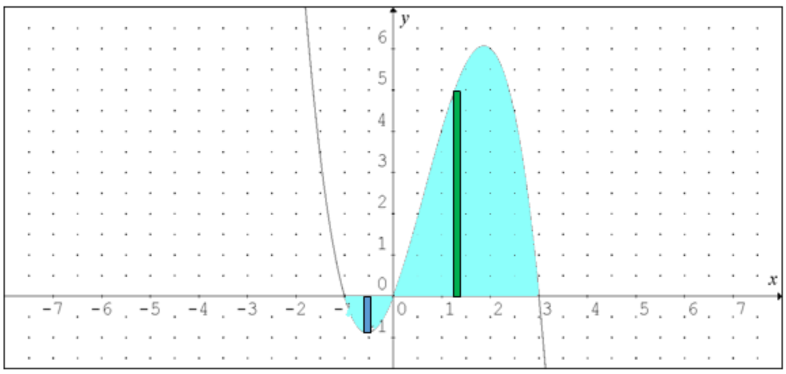
Si se define la región R en el plano cartesiano limitada por la función f, el eje X y $|x-1| \leq 2$, calcule su área.

Solución:

Nótese que:

$$|x-1| \leq 2 \qquad\qquad y = 3x + 2x^2 - x^3$$
$$-2 \leq x - 1 \leq 2 \qquad\qquad y = x(3 + 2x - x^2)$$
$$-1 \leq x \leq 3 \qquad\qquad y = -x(x^2 - 2x - 3)$$
$$y = -x(x-3)(x+1)$$

Se bosqueja la región R en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (3x + 2x^2 - x^3)]dx \ ; \ \ x \in [-1, 0]$$
$$dA_2 = [(3x + 2x^2 - x^3) - 0]dx \ ; \ \ x \in [0, 3]$$

Por lo que:

$$\acute{A}rea = A_1 + A_2$$

$$\acute{A}rea = \int_{-1}^{0} -(3x + 2x^2 - x^3)dx + \int_{0}^{3} (3x + 2x^2 - x^3)dx$$

$$\acute{A}rea = -\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_{0}^{3}$$

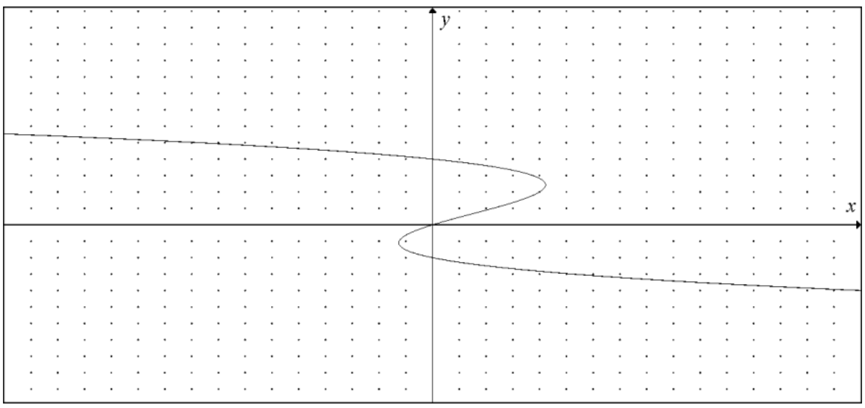
$$\acute{A}rea = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{27}{2} + 18 - \frac{81}{4}\right)$$

$$\acute{A}rea = \frac{30}{2} - \frac{2}{3} - \frac{82}{4} + 18 = 33 - \frac{2}{3} - \frac{41}{2} = \frac{198 - 4 - 123}{6}$$

$$\boxed{\therefore \acute{A}rea = \frac{71}{6}\ u^2}$$

27. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la relación $x = g(y) = 2y + y^2 - y^3$:



Si se define la región R en el plano cartesiano limitada por la relación g, el eje Y y $\left|y - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$, calcule su área.

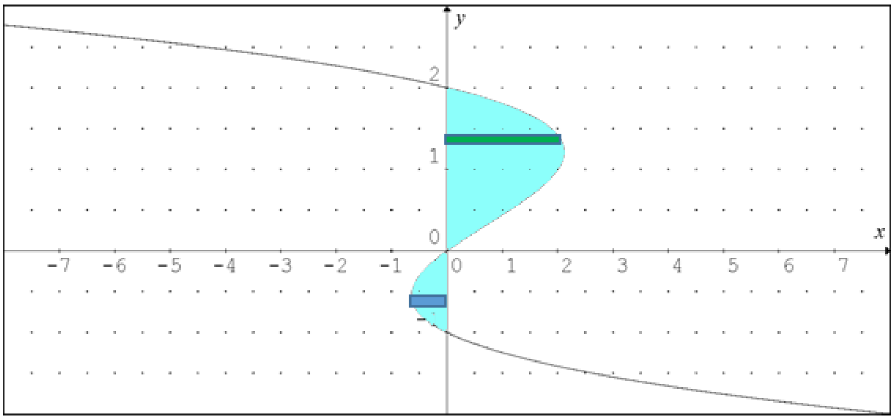
Solución:

Nótese que:

$$\left|y-\frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{2}$$
$$-\frac{3}{2} \le y-\frac{1}{2} \le \frac{3}{2}$$
$$-1 \le y \le 2$$

$$x = 2y + y^2 - y^3$$
$$x = y(2 + y - y^2)$$
$$x = -y(y^2 - y - 2)$$
$$x = -y(y-2)(y+1)$$

Se bosqueja la región R en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (2y + y^2 - y^3)]dy \;;\; y \in [-1, 0]$$
$$dA_2 = [(2y + y^2 - y^3) - 0]dy \;;\; y \in [0, 2]$$

Por lo que:

$$Área = A_1 + A_2$$

$$Área = \int_{-1}^{0} -(2y + y^2 - y^3)dy + \int_{0}^{2} (2y + y^2 - y^3)dy$$

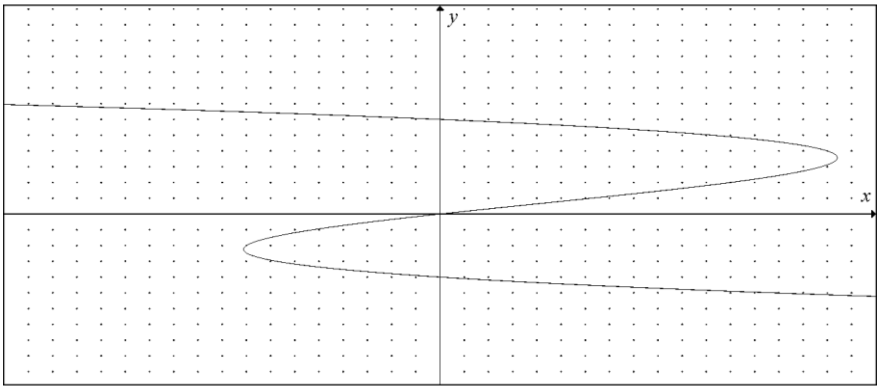
$$Área = -\left(y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$Área = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\cancel{4} + \frac{8}{3} - \cancel{4}\right) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 + 28 - 3}{12}$$

$$\boxed{\therefore Área = \frac{37}{12}\,u^2}$$

28. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la relación $x = g(y) = 6y + y^2 - y^3$:



Si se define la región R en el plano cartesiano limitada por la relación g, el eje Y y $\left|y - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$, calcule su área.

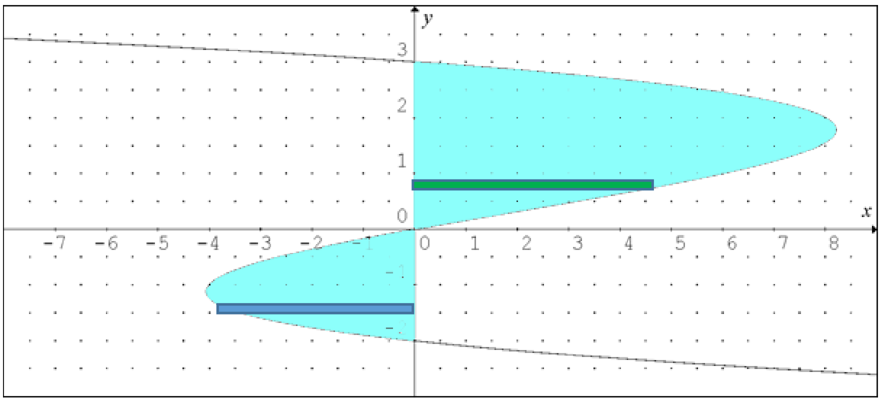
Solución:

Nótese que:

$$\left|y - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$$
$$-\frac{5}{2} \leq y - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$$
$$-2 \leq y \leq 3$$

$$x = 6y + y^2 - y^3$$
$$x = y(6 + y - y^2)$$
$$x = -y(y^2 - y - 6)$$
$$x = -y(y-3)(y+2)$$

Se bosqueja la región R en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (6y + y^2 - y^3)]dy \;\; ; \;\; y \in [-2, 0]$$
$$dA_2 = [(6y + y^2 - y^3) - 0]dy \;\; ; \;\; y \in [0, 3]$$

Por lo que:

$$Área = A_1 + A_2$$

$$Área = \int_{-2}^{0} -(6y + y^2 - y^3)dy + \int_{0}^{3} (6y + y^2 - y^3)dy$$

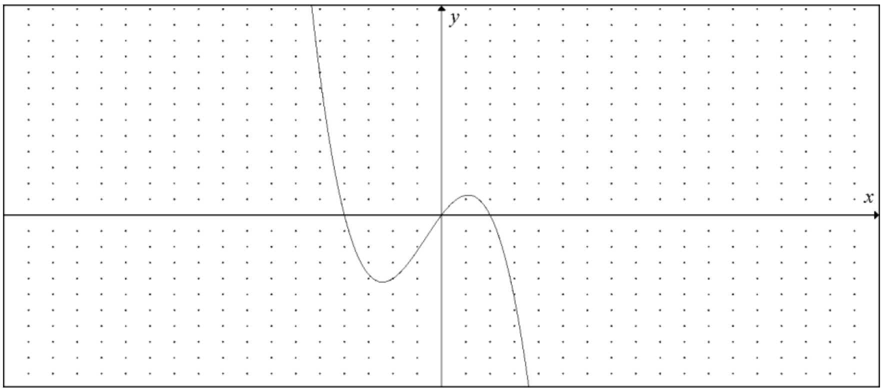
$$Área = -\left(3y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(3y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{0}^{3}$$

$$Área = \left(12 - \frac{8}{3} - 4\right) + \left(27 + 9 - \frac{81}{4}\right) = 44 - \frac{8}{3} - \frac{81}{4} = \frac{528 - 32 - 243}{12}$$

$$\boxed{\therefore Área = \frac{253}{12}\ u^2}$$

29. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la función $y = f(x) = 2x - x^2 - x^3$:



Si se define la región R en el plano cartesiano limitada por la función f, el eje X y $\left|x + \frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{2}$, calcule su área.

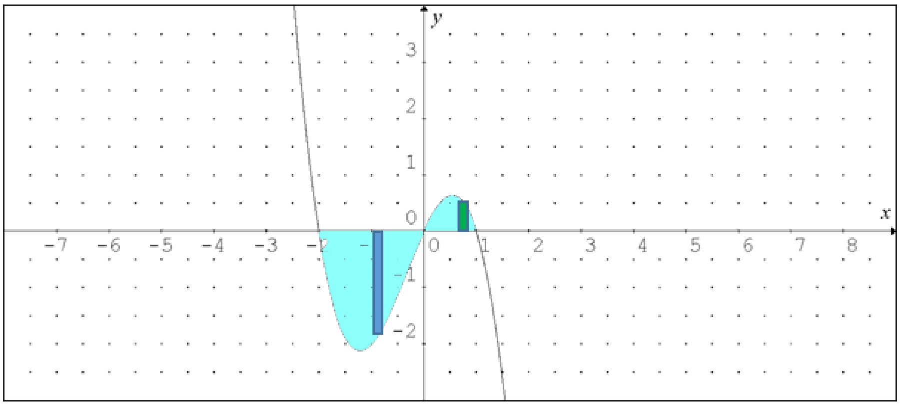
Solución:

Nótese que:

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{2}$$
$$-\frac{3}{2} \le x + \frac{1}{2} \le \frac{3}{2}$$
$$-2 \le x \le 1$$

$$y = 2x - x^2 - x^3$$
$$y = x(2 - x - x^2)$$
$$y = -x(x^2 + x - 2)$$
$$y = -x(x + 2)(x - 1)$$

Se bosqueja la región R en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (2x - x^2 - x^3)]dx \ ; \ \ x \in [-2, 0]$$
$$dA_2 = [(2x - x^2 - x^3) - 0]dx \ ; \ \ x \in [0, 1]$$

Por lo que:

$$Área = A_1 + A_2$$

$$Área = \int_{-2}^{0} -(2x - x^2 - x^3)dx + \int_{0}^{1} (2x - x^2 - x^3)dx$$

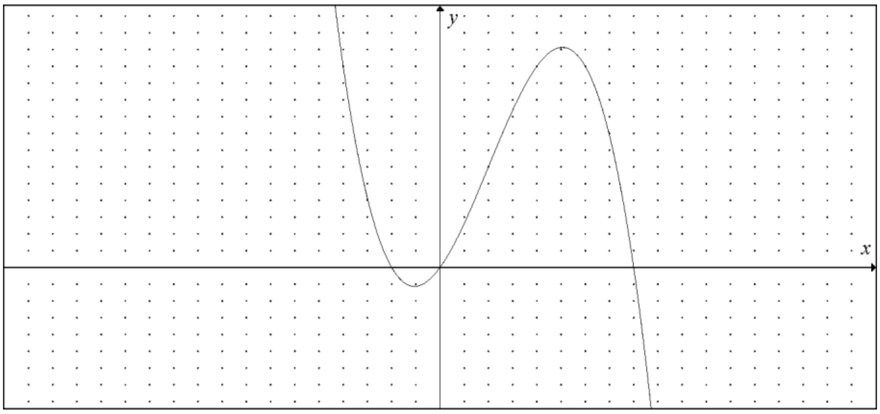
$$Área = -\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$Área = \left(\cancel{4} + \frac{8}{3} - \cancel{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 + 28 - 3}{12}$$

$$\boxed{\therefore \ Área = \frac{37}{12}\ u^2}$$

30. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la función $y = f(x) = 4x + 3x^2 - x^3$:



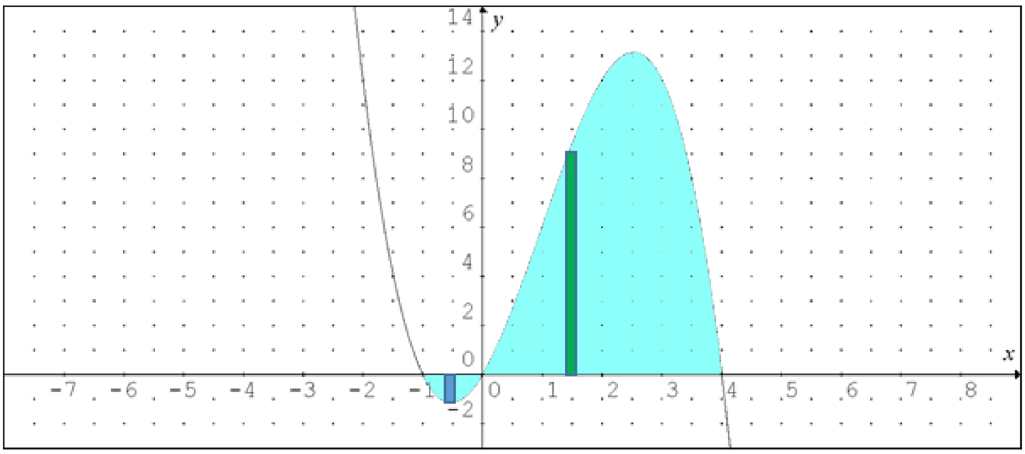
Si se define la región R en el plano cartesiano limitada por la función f, el eje X y $\left|x - \frac{3}{2}\right| \le \frac{5}{2}$, calcule su área.

Solución:

Nótese que:

$$\begin{array}{c} \left|x - \dfrac{3}{2}\right| \le \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{5}{2} \le x - \dfrac{3}{2} \le \dfrac{5}{2} \\ -1 \le x \le 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} y = 4x + 3x^2 - x^3 \\ y = x(4 + 3x - x^2) \\ y = -x(x^2 - 3x - 4) \\ y = -x(x - 4)(x + 1) \end{array}$$

Se bosqueja la región R en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (4x + 3x^2 - x^3)]dx \;\; ; \;\; x \in [-1, 0]$$
$$dA_2 = [(4x + 3x^2 - x^3) - 0]dx \;\; ; \;\; x \in [0, 4]$$

Por lo que:

$$\acute{A}rea = A_1 + A_2$$

$$\acute{A}rea = \int_{-1}^{0} -(4x + 3x^2 - x^3)dx + \int_{0}^{4} (4x + 3x^2 - x^3)dx$$

$$\acute{A}rea = -\left(2x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(2x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_{0}^{4}$$

$$\acute{A}rea = \left(2 - 1 - \frac{1}{4}\right) + (32 + \cancel{64} - \cancel{64}) = 33 - \frac{1}{4} = \frac{132 - 1}{4}$$

$$\boxed{\therefore \acute{A}rea = \frac{131}{4}\ u^2}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	II PAO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	24/enero/2022

Tema # 7

31. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$\boldsymbol{R} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \left(\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{ln}(-\boldsymbol{x})\right) \wedge (\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0})\right\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar R alrededor del eje $y = 1$, mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

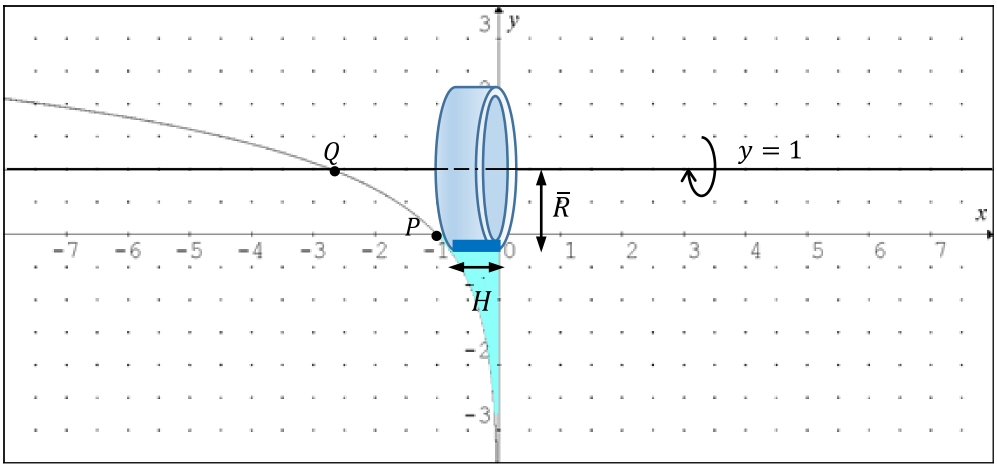
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = ln(-x)$ y el eje X:

$$ln(-x) = 0 \quad \rightarrow \quad -x = e^0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \rightarrow \quad P(-1, 0)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = ln(-x)$ y el eje de rotación $y = 1$:

$$ln(-x) = 1 \quad \rightarrow \quad -x = e^1 \quad \rightarrow \quad x = -e \quad \rightarrow \quad Q(-e, 1)$$

Se bosqueja la región R:



Tal como se puede observar, la región R constituye un subconjunto del III cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta $y = 1$, se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 1 - y \qquad H = e^y$$

$$dV = 2\pi\bar{R}H = 2\pi(1-y)(e^y)dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_{-\infty}^{0} dV = 2\pi \int_{-\infty}^{0} (1-y)(e^y)dy = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} \left(\int_{a}^{0} (1-y)e^y dy \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (1-y)(e^y)dy = \int e^y dy - \int y\, e^y dy$$

$$\begin{aligned} u = y \quad &\rightarrow \quad du = dy \\ dv = e^y dy \quad &\rightarrow \quad v = e^y \end{aligned}$$

$$\int (1-y)e^y dy = e^y - \left(ye^y - \int e^y dy \right)$$

$$\int (1-y)e^y dy = e^y - ye^y + e^y + C$$

$$\int (1-y)e^y dy = 2e^y - ye^y + C$$

Por lo que:

$$V = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} (2e^y - ye^y)\Big|_a^0 \right] = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} \left((2e^0 - 0e^0) - (2e^a - ae^a) \right) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{a \to -\infty} (2 - 0 - 2e^a + ae^a) = 2 - 2\left(\lim_{a \to -\infty} (e^a) \right) + \left(\lim_{a \to -\infty} (ae^a) \right)$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{a \to -\infty} \left(\frac{a}{e^{-a}} \right) = -\lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{e^{-a}} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = 2\pi(2 - 2(0) + 0)$$

$$\boxed{\therefore V = 4\pi\ u^3}$$

32. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$\boldsymbol{R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \left(y \le log_{\frac{1}{2}}(x)\right) \wedge (y \ge 1)\right\}}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar R alrededor del eje $y = 0$, mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

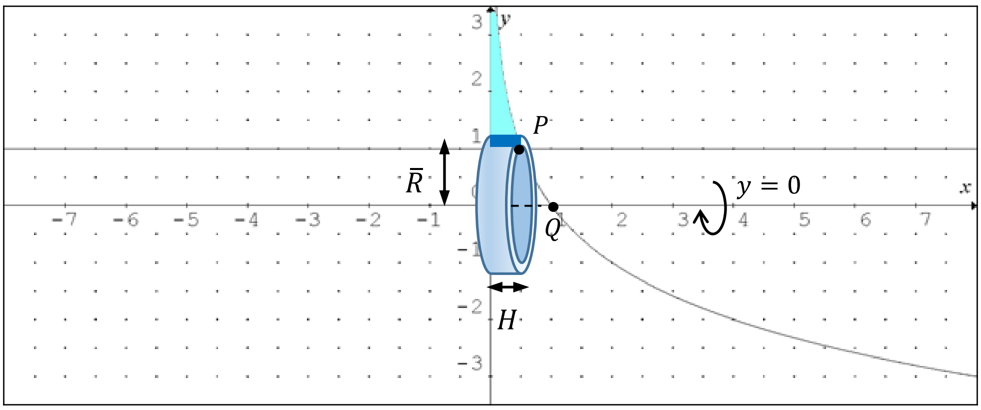
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = log_{\frac{1}{2}}(x)$ y la recta $y = 1$:

$$log_{\frac{1}{2}}(x) = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = log_{\frac{1}{2}}(x)$ y el eje de rotación $y = 0$:

$$log_{\frac{1}{2}}(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad Q(1, 0)$$

Se bosqueja la región R:



Tal como se puede observar, la región R constituye un subconjunto del I cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta $y = 0$, se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = y \qquad H = \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2^{-y}$$

$$dV = 2\pi\bar{R}H = 2\pi y 2^{-y} dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_1^{+\infty} dV = 2\pi \int_1^{+\infty} y2^{-y} dy = 2\pi \left[\lim_{b \to +\infty} \left(\int_1^b y2^{-y} dy\right)\right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\begin{array}{rcl} u = y & \rightarrow & du = dy \\ dv = 2^{-y} dy & \rightarrow & v = -\dfrac{2^{-y}}{ln(2)} \end{array}$$

$$\int y2^{-y} dy = -\frac{1}{ln(2)} y2^{-y} + \frac{1}{ln(2)} \int 2^{-y} dy = -\frac{1}{ln(2)} y2^{-y} - \frac{1}{ln^2(2)} 2^{-y} + C$$

Por lo que:

$$V = -2\pi \left[\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{ln(2)} y2^{-y} + \frac{1}{ln^2(2)} 2^{-y}\right)\Big|_1^b\right]$$

$$V = -2\pi \left[\lim_{b \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{ln(2)} b2^{-b} + \frac{1}{ln^2(2)} 2^{-b}\right) - \left(\frac{1}{2ln(2)} + \frac{1}{2ln^2(2)}\right)\right)\right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{ln(2)} b2^{-b} + \frac{1}{ln^2(2)} 2^{-b} - \frac{1}{2ln(2)} - \frac{1}{2ln^2(2)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{ln(2)} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b}{2^b}\right)\right) + \frac{1}{ln^2(2)} \left(\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{2^b}\right)\right) - \frac{1}{2ln(2)} - \frac{1}{2ln^2(2)}$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b}{2^b}\right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{2^b \; ln(2)}\right) = 0$$

Entonces:

$$V = \cancel{-}\cancel{2}\pi\left(0+\frac{1}{ln^2(2)}(0)\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}ln(2)}\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}ln^2(2)}\right)$$

$$\boxed{\therefore V = \frac{\pi}{ln(2)}\left(1+\frac{1}{ln(2)}\right)\ u^3}$$

33. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$\boldsymbol{R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (y \leq 10^x) \wedge (y \geq 0) \wedge (x \leq 0)\}}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar R alrededor del eje $x = 1$, mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

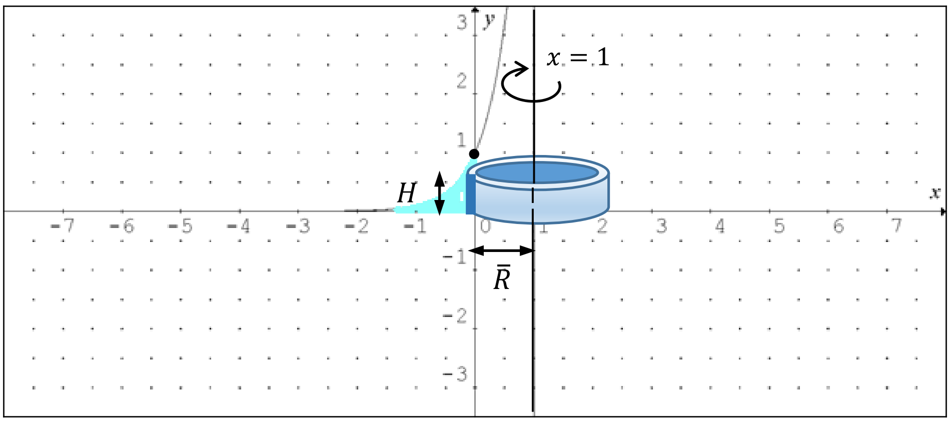
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = 10^x$ y el eje Y:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 10^0 = 1 \quad \rightarrow \quad P(0,1)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = 10^x$ y el eje de rotación $x = 1$:

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad 10^1 = 10 \quad \rightarrow \quad Q(1,10)$$

Se bosqueja la región R:



Tal como se puede observar, la región R constituye un subconjunto del II cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo vertical y al rotarlo con respecto a la recta $x = 1$, se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 1 - x \qquad H = 10^x$$

$$dV = 2\pi \bar{R} H = 2\pi(1-x)(10^x)dx$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_{-\infty}^{0} dV = 2\pi \int_{-\infty}^{0} (1-x)(10^x)\, dx = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} \left(\int_{a}^{0} (1-x)10^x dx \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (1-x)10^x dx = \int 10^x dx - \int x\, 10^x dx$$

$$\begin{aligned} u = x \qquad &\to \qquad du = dx \\ dv = 10^x dx \qquad &\to \qquad v = \frac{10^x}{ln(10)} \end{aligned}$$

$$\int (1-x)10^x dx = \frac{1}{ln(10)} 10^x - \left(\frac{1}{ln(10)} x\, 10^x - \frac{1}{ln(10)} \int 10^x dx \right)$$

$$\int (1-x)10^x dx = \frac{1}{ln(10)} 10^x - \frac{1}{ln(10)} x\, 10^x + \frac{1}{ln^2(10)} 10^x + C$$

$$\int (1-x)10^x dx = \frac{1}{ln(10)} \left(1 + \frac{1}{ln(10)}\right) 10^x - \frac{1}{ln(10)} x\, 10^x + C$$

Por lo que:

$$V = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{ln(10)} \left(1 + \frac{1}{ln(10)}\right) 10^x - \frac{1}{ln(10)} x\, 10^x \right) \Bigg|_a^0 \right]$$

$$V = \frac{2\pi}{ln(10)} \left[\lim_{a \to -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{ln(10)}\right) 10^x - x\, 10^x \right) \Bigg|_a^0 \right]$$

$$V = \frac{2\pi}{ln(10)} \left[\lim_{a \to -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{ln(10)}\right) 10^0 - 0 \cdot 10^0 - \left(\left(1 + \frac{1}{ln(10)}\right) 10^a - a10^a \right) \right) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{a \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{ln(10)} - 0 - \left(1 + \frac{1}{ln(10)}\right) 10^a + a10^a \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{ln(10)} - \left(1 + \frac{1}{ln(10)}\right) \left(\lim_{a \to -\infty} (10^a) \right) + \left(\lim_{a \to -\infty} (a10^a) \right)$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{a}{10^{-a}}\right)=-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{10^{-a}ln(10)}\right)=0$$

Entonces:

$$V=\frac{2\pi}{ln(10)}\left(1+\frac{1}{ln(10)}-\left(1+\frac{1}{ln(10)}\right)(0)+0\right)$$

$$\boxed{\therefore V=\frac{2\pi}{ln(10)}\left(1+\frac{1}{ln(10)}\right)\,u^3}$$

34. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$\boldsymbol{R}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2\ /\ (\boldsymbol{y}\geq \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}))\wedge(\boldsymbol{y}\leq \boldsymbol{0})\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar R alrededor del eje $y=2$, mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

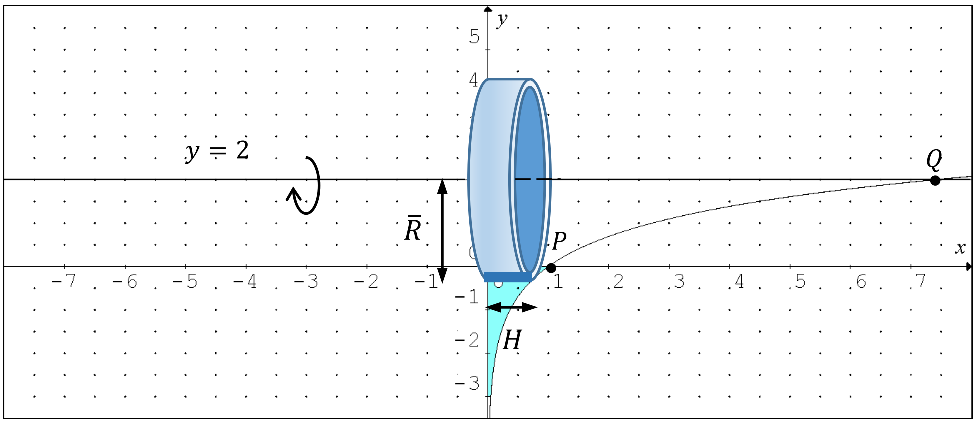
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y=ln(x)$ y el eje X:

$$ln(x)=0\quad\rightarrow\quad x=1\quad\rightarrow\quad P(1,0)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y=ln(x)$ y el eje de rotación $y=2$:

$$ln(x)=2\quad\rightarrow\quad x=e^2\quad\rightarrow\quad Q(e^2,2)$$

Se bosqueja la región R:



Tal como se puede observar, la región R constituye un subconjunto del IV cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta $y = 2$, se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 2 - y \qquad H = e^y$$

$$dV = 2\pi \bar{R} H = 2\pi(2 - y)(e^y)dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_{-\infty}^{0} dV = 2\pi \int_{-\infty}^{0} (2 - y)(e^y)\, dy = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} \left(\int_{a}^{0} (2 - y) e^y dy \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (2 - y)(e^y) dy = 2 \int e^y dy - \int y\, e^y dy$$

$$\begin{aligned} u = y \quad &\rightarrow \quad du = dy \\ dv = e^y dy \quad &\rightarrow \quad v = e^y \end{aligned}$$

$$\int (2 - y) e^y dy = 2e^y - \left(y e^y - \int e^y dy \right) = 2e^y - y e^y + e^y + C = 3e^y - y e^y + C$$

Por lo que:

$$V = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} (3e^y - y e^y)\Big|_a^0 \right] = 2\pi \left[\lim_{a \to -\infty} \left((3e^0 - 0e^0) - (3e^a - a e^a) \right) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{a \to -\infty} (3 - 0 - 3e^a + a e^a) = 3 - 3 \left(\lim_{a \to -\infty} (e^a) \right) + \left(\lim_{a \to -\infty} (a e^a) \right)$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{a \to -\infty} \left(\frac{a}{e^{-a}} \right) = - \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{e^{-a}} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = 2\pi(3 - 3(0) + 0)$$

$$\boxed{\therefore V = 6\pi\, u^3}$$

35. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \big(\boldsymbol{y} \le -\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})\big) \wedge (\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0})\}$$

Bosqueje la región R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar R alrededor del eje $y = -2$, mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

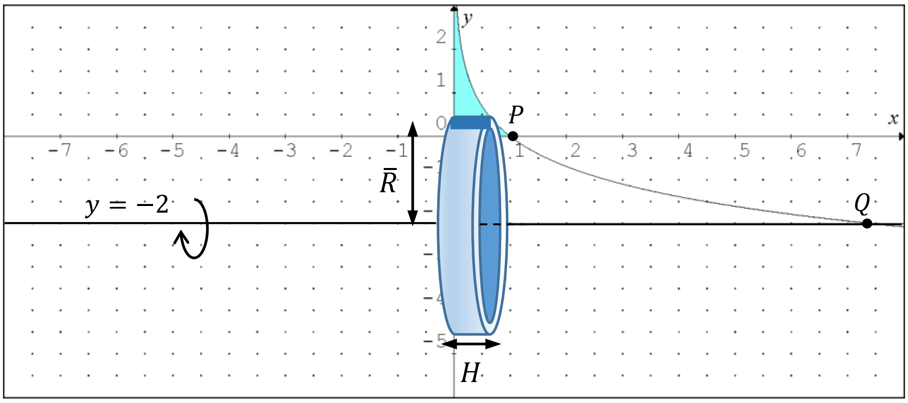
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = -ln(x)$ y el eje X:

$$-ln(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad P(1,0)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función $y = ln(x)$ y el eje de rotación $y = -2$:

$$-ln(x) = -2 \quad \rightarrow \quad x = e^2 \quad \rightarrow \quad Q(e^2,-2)$$

Se bosqueja la región R:



Tal como se puede observar, la región R constituye un subconjunto del I cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta $y = -2$, se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 2 + y \qquad H = e^{-y}$$

$$dV = 2\pi \bar{R} H = 2\pi(2+y)(e^{-y})dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_0^{+\infty} dV = 2\pi \int_0^{+\infty} (2+y)(e^{-y})\, dy = 2\pi \left[\lim_{b \to +\infty} \left(\int_0^b (2+y) e^{-y} dy \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (2+y)(e^{-y}) dy = 2 \int e^{-y} dy + \int y\, e^{-y} dy$$

$$\begin{array}{rcl} u = y & \rightarrow & du = dy \\ dv = e^{-y} dy & \rightarrow & v = -e^{-y} \end{array}$$

$$\int (2+y) e^{-y} dy = -2e^{-y} + \left(-ye^{-y} + \int e^{-y} dy \right) = -2e^{-y} - ye^{-y} - e^{-y} + C$$

$$\int (2+y) e^{-y} dy = -3e^{-y} - ye^{-y} + C$$

Por lo que:

$$V = -2\pi \left[\lim_{b \to +\infty} (3e^{-y} + ye^{-y})\Big|_0^b \right] = -2\pi \left[\lim_{b \to +\infty} \left((3e^{-b} + be^{-b}) - (3e^0 + 0e^0) \right) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{b \to +\infty} (3e^{-b} + be^{-b} - 3 - 0) = 3 \left(\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{e^b} \right) \right) + \left(\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b}{e^b} \right) \right) - 3$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b}{e^b} \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{e^b} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = -2\pi(3(0) + 0 - 3)$$

$$\boxed{\therefore V = 6\pi\, u^3}$$