RÚBRICA DEL SEGUNDO EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL

PAO2 2023-2024 GYE. 29-ENE-2024

1. (10 p.) Empleando el método de Lagrange, determine los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cuya distancia al punto $A(3, 1, -1)$, elevada al cuadrado, sea respectivamente la menor y la mayor posible. Justifique formalmente su respuesta.

   - Plantea la función objetivo con el punto incógnito $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.......2 p.

   $$f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

   - Plantea función restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.............1 p.
   - Plantea condición necesaria del Teorema de Lagrange................1 p.

   $$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   - Plantea sistema de ecuaciones completo, incluyendo $g(x, y, z) = 0$.....1 p.
   - Resuelve correctamente el sistema y obtiene dos puntos críticos........3 p.

   $$P_1\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right), \quad P_2\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

   - Evalúa f en P_1 y P_2, y compara, explica que en P_1 se alcanza el mínimo y en P_2 el máximo por cuanto f es continua y la restricción es un conjunto compacto de su dominio.............2 p.

2. (7 p.) Sea C la curva intersección entre las superficies $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 2$. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y^2\mathbf{k}$ un campo de fuerzas definido en $\mathbb{R}^3$. Evalúe el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ al mover un objeto a lo largo de C orientada positivamente.

Si emplea integral de línea vectorial:

- Bosqueja la curva C y la parametriza correctamente.......2 p.

$$C : r(t) = (2cos(t), 2sen(t), 2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- Plantea integral de línea correctamente..............2 p.
- Resuelve la integral y obtiene respuesta correcta, 12π...........3 p.

Si emplea Teorema de Stokes:

- Selecciona la superficie S acotada por la curva C, puede ser tanto la porción del paraboloide o la del plano $z = 2$.....................1 p.
- Proyecta S correctamente sobre un plano adecuado, por ejemplo, en XY se obtiene el círculo $R : x^2 + y^2 \leq 4$.........1 p.
- Calcula $rot\mathbf{F}$........1 p.
- Plantea integral de flujo especificando los límites en R.....2 p.
- Resuelve la integral y obtiene respuesta correcta, 12π......2 p.

3. (10 p.) Considere la integral doble $I = \displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx$.

a) Dibuje la región de integración R.

- Dibuja parábola $y = x^2$ y recta $y = 4$.......2 p.
- Identifica la región R correctamente.........1 p.

b) Cambie el orden de integración a $dx\,dy$.

- Escribe $I = \displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\,dy$...........2 p.

c) Evalúe I con el orden planteado en el literal *b*).

- Evalúa correctamente la integral respecto a x.............2 p.
- Evalúa correctamente la integral respecto a y y especifica la respuesta, $I = \dfrac{1}{4}(e^{16} - 1)$................3 p.

4. (8 p.) Sea S la superficie dada por la porción del cilindro $z = 4 - x^2$ limitada por los planos $x + 2y = 4$ y $x = 2$, ubicada en el primer octante. Calcular la masa de S si la densidad en cada punto es la función $\rho(x, y, z) = \dfrac{z + x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}}$.

- Identifica la superficie S.................1 p.
- Dibuja correctamente la proyección R de S sobre XY.......1 p.
- Plantea diferencial de masa, $dm = \rho(x, y, z)dS$..................1 p.
- Plantea la masa como integral de superficie escalar............1 p.

$$m = \int_S\int \rho(x, y, z)dS$$

- Calcula $dS = \sqrt{1 + 4x^2}\, dA$.............1 p.
- Remplaza datos correctos y expresa la integral en términos de las variables independientes x e y................1 p.

$$m = \int_R\int 4\, dA$$

- Evalúa correctamente la integral y especifica la respuesta, 12 unidades de masa...................2 p.

5. (15 p.) Sea Q el sólido formado por la región interna y común a las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $r = 2sen(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

a) Realice un bosquejo gráfico de Q y de las superficies que lo limitan.

- Bosqueja la esfera...................1 p.
- Reconoce y ubica el cilindro circular correctamente.........2 p.
- Identifica Q.............................1 p.

b) Calcule el volumen de Q empleando una integral triple.

- Plantea la definición general de volumen como integral triple........1 p.

$$V_Q = \int\int_Q\int dv$$

- Especifica límites correctos a la integral, aplicando un cambio de variable adecuado, pudiendo usar simetría...............3 p.

$$V_Q = 2\int_0^{\pi}\int_0^{2sen(\theta)}\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

- Evalúa correctamente la integral y obtiene respuesta..........3 p.

$$V_Q = \frac{16\pi}{3} \quad [u^3]$$

c) Usando el teorema de la divergencia de Gauss, calcule el flujo que genera el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a través de la superficie S de Q, orientada hacia el interior (entrante) de Q.

- Plantea de manera general el teorema de la divergencia de Gauss....1 p.
- Calcula $div\mathbf{F} = 6$...........1 p.
- Deduce que el flujo pedido es $-6V_Q$.....................1 p.
- Escribe la respuesta correcta, flujo $= -32\pi$..........1 p.