

T
5125
IZA

ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL
LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE
GRAM-SCHMIDT"

MONOGRAFIA

Previa la obtención del Título de:
MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA
APLICADA AL NIVEL MEDIO

Presentada por:
JORGE ANIBAL IZA

Guayaquil - Ecuador

1994

ECIMIENTO

Agradezco a todas las
Instituciones que hicieron
posible la realización del
Curso de Post-grado, y en
especial al mentalizador
Master Guadencio Zurita.

Master Gaudencio Zurita
Director de Monografía

DECLARACION EXPRESA

La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestas en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL".

Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de (a ESPOL).

.....
Jorge Aníbal Iza

INDICE

RODUCCION

INICIONES.....	1
PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT.....	3
EJEMPLO DE ORTOGONALIZACION EN R^3	5
EJEMPLO DE ORTOGONALIZACION CON POLINOMIOS.....	11
EJEMPLO DE ORTONORMALIDAD CON MATRICES.....	16
CONCLUSIONES.....	24
ANEXO.....	25

INTRODUCCION

Los últimos años, el Algebra Lineal se ha desarrollado y incrementado el conocimiento en profesionales de diferentes áreas relacionadas con la Matemática.

Algebra Lineal ha desarrollado dos elementos de la matemática como son: la abstracción y la aplicación.

La presente monografía tiene como objetivo fundamental el comprender el Proceso de Ortogonalización, "inventado" o "descubierto" por dos hombres de ciencia, ellos fueron: Jorge Person Gram (1850-1916) que estuvo interesado en la ciencia metrológica y Erhardt Schmidt (1876-1959) un matemático alemán.

Esta monografía en su primera parte presenta varias definiciones que son necesarias para comprender el Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt. Seguidamente, se expone el significado del Proceso de Ortogonalización y finalmente, se realizan ejemplos ilustrativos en R^3 , un ejemplo con polinomios de grado menor o igual a dos, un ejemplo con un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas que esperamos sean comprendidos por toda persona interesada en el presente trabajo.

CAPITULO I

PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT

Continuación se dan varias definiciones que son fundamentales para la comprensión del tema central de este trabajo.

DEFINICION 1.- Sean v_1, v_2, \dots, v_n vectores de un espacio vectorial V y c_1, c_2, \dots, c_n constantes reales, el vector $v \in V$ es una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n si y solamente si $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$

DEFINICION 2.- Sean v_1, v_2, \dots, v_n , vectores de un espacio vectorial V ; v_1, v_2, \dots, v_n son vectores linealmente independientes en V , si y solamente si la única solución a la igualdad:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0_V \text{ es } c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \in \mathbb{R}$$

Los vectores no son linealmente independientes en V , se dice que son linealmente dependientes.

DEFINICION 3.- Los vectores v_1, v_2, \dots, v_n de un espacio vectorial V se dice que generan a V , si y solamente si todo vector $v \in V$ puede expresarse como una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .

DEFINICION 4.- Un conjunto de vectores v_1, v_2, \dots, v_n en un espacio vectorial V es una base para V , si y solamente si

v_1, v_2, \dots, v_n son linealmente independientes en V y generan V .

DEFINICION 5.- Sea V un espacio vectorial y sean v_1, v_2 y $v_3 \in V$, se dice que V es un espacio vectorial con producto interno si y solamente si tiene definida una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ llamado **producto interno** tal que $\langle v_1, v_2 \rangle$ cumple las siguientes propiedades:

$$\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle, \quad v_1, v_2, v_3 \in V$$

$$\langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle, \quad v_1, v_2 \in V$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0, \quad v_1 \neq 0_v$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \iff v_1 = 0_v$$

DEFINICION 6.- Si $v \in \mathbb{R}^n$ entonces la norma de v , denotado

$$\|v\| \text{ está dada por } \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

DEFINICION 7.- El conjunto de vectores $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

es un conjunto ortonormal si:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j, \quad (1)$$

$$\langle u_i, u_i \rangle = 1 \quad (2)$$

Si solamente se satisface (1), el conjunto se denomina ortogonal.

DEFINICION 8.- Un vector en un espacio con producto

interno es unitario si y solamente si $\|v\| = 1$

TEOREMA.— Si V es un espacio vectorial cualquiera con producto interno, el vector $v / \|v\|$ es un vector unitario.

Prueba:

$$u = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| ; \frac{1}{\|v\|} \|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$$

El vector como u , se denomina **unitario**, es decir con norma igual a 1.

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

El proceso de Gram-Schmidt permite convertir cualquier conjunto de vectores linealmente independientes v_1, v_2, \dots, v_n en un conjunto de vectores ortogonales (u ortonormales).

Empezamos el proceso convirtiendo los vectores de una base de un espacio vectorial V , $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a una base ortogonal $B_1' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ ortogonal para, finalmente llegar a una base ortonormal $B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

$$v'_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = u_1 = v_1, \text{ esto hace a } u_1 \text{ unitario}$$

Ahora: $v'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$; debemos probar que v'_2 es ortogonal a u_1 .

$$\begin{aligned} \langle u_1, v'_2 \rangle &= \langle u_1, v_2 \rangle - \langle \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \rangle \\ &= \langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_1, \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \rangle \\ &= \langle u_1, v_2 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle \\ &= \langle u_1, v_2 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

onces u_1 y v'_2 son ortogonales

inimos: $u_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|}$, esto hace a u_2 unitario

struyamos v'_3 igual a:

$$v'_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$$

amos que v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2 .

$$\begin{aligned} \langle u_1, v'_3 \rangle &= \langle u_1, v_3 \rangle - \langle u_1, v_3 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle - \langle v_3, u_2 \rangle \langle u_1, u_2 \rangle \\ &= \langle u_1, v_3 \rangle - \langle u_1, v_3 \rangle = 0 \end{aligned}$$

onces hemos probado que: v'_3 es ortogonal a u_1 .

ra, probamos que v'_3 es ortogonal a u_2 .

$$\begin{aligned} \langle u_2, v'_3 \rangle &= \langle u_2, v_3 \rangle - \langle v_3, u_1 \rangle \langle u_1, u_2 \rangle - \langle v_3, u_2 \rangle \langle u_1, u_2 \rangle \\ &= \langle u_2, v_3 \rangle - \langle v_3, u_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

amos: $u_3 = \frac{v'_3}{\|v'_3\|}$, luego u_3 es unitario

continuación calculamos v'_4 :

$$\begin{aligned} &= v_4 - \langle v_4, u_1 \rangle u_1 - \langle v_4, u_2 \rangle u_2 - \langle v_4, u_3 \rangle u_3 \\ &\vdots \\ &= v_k - \langle v_k, u_1 \rangle u_1 - \langle v_k, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle v_k, u_{k-1} \rangle u_{k-1} \\ &\dots - \langle v_k, u_{k-1} \rangle u_{k-1} \end{aligned}$$

Hacemos ahora: $u_k = \frac{v'_k}{\|v'_k\|}$

miendo el proceso de Gram-Schmidt podemos decir que

e tiene la expresión:

$= v_1 - \langle v_1, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_1, u_{i-1} \rangle u_{i-1}$, entonces para
 v_i del subespacio H generado por los vectores
 v_2, \dots, v_n originales. H es también generado por
 v'_2, \dots, v'_n .

vectores $u_1 = \frac{v'_1}{\|v'_1\|}$ que se obtienen son

normales porque son ortogonales entre sí y su norma es
 también generan H .

presentamos un ejemplo en el que se construye una base
 ortonormal para \mathbb{R}^3 utilizando el Proceso de Gram-Schmidt.

Partir de los vectores :

$$v_1 = (1 \ 0 \ 1), v_2 = (1 \ 0 \ -1) \text{ y } v_3 = (0, \ 3, \ 4)$$

probaremos primero si los vectores dados son linealmente
 independientes, para ello tomamos la combinación lineal de
 vectores v_1, v_2 y v_3 y la igualamos al cero de \mathbb{R}^3 , esto
 $(0 \ 0 \ 0)$.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0_v$$

$$c_1 (1 \ 0 \ 1) + c_2 (1 \ 0 \ -1) + c_3 (0 \ 3 \ 4) = (0 \ 0 \ 0)$$

$$(c_1 \ 0 \ c_1) + (c_2 \ 0 \ -c_2) + (0 \ 3c_3 \ 4c_3) = (0 \ 0 \ 0)$$

tenemos un sistema lineal de tres ecuaciones y tres
 incógnitas (c_1, c_2 y c_3) que es un conjunto de predicados:

p_2 y p_3 :

$$(c_1, c_2, c_3) : c_1 + c_2 = 0$$

$$(c_1, c_2, c_3) : c_1 + 3c_3 = 0$$

$$(c_1, c_2, c_3) : c_1 - c_2 + 4c_3 = 0$$

Encontramos el conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ esto es

$$(c_1, c_2, c_3) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3)$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$Ap_1(c_1, c_2, c_3) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3) =$$

$$\{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Se probado que los vectores son linealmente independientes.

Debemos probar que los vectores v_1, v_2, v_3 generan a

es decir que cualquier vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ puede

escribirse como una combinación lineal de v_1, v_2, v_3 .

$$c_1(0, 1) + c_2(1, 0, -1) + c_3(0, 3, 4) = (a, b, c)$$

$$c_1(0, 1) + (c_2, 0, -c_2) + (0, 3c_3, 4c_3) = (a, b, c)$$

Encontramos el conjunto de predicados p_1, p_2 y p_3 :

$$(c_1, c_2, c_3) : c_1 + c_2 = a$$

$$(c_1, c_2, c_3) : 3c_3 = b$$

$$(c_1, c_2, c_3) : c_1 - c_2 + 4c_3 = c$$

contramos el conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$, esto es

$$(c_1, c_2, c_3) \wedge p_2 (c_1, c_2, c_3) \wedge p_3 (c_1, c_2, c_3).$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & b \\ -1 & 4 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 4 & c \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 4 & -a+c \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & -2 & \frac{-a+c}{-2} \\ 0 & 3 & b \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & \frac{-a+c}{-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{c+a}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{a-c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3a - 4b + 3c}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3a + 4b - 3c}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{3} \end{array} \right]$$

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{3a - 4b + 3c}{6} \right), \left(\frac{3a + 4b - 3c}{6} \right), \left(\frac{b}{3} \right) \right\}$$

no hemos probado que los vectores v_1 , v_2 y v_3 son realmente independiente y generan a \mathbb{R}^3 , los vectores v_1, v_2, v_3 constituyen una base en \mathbb{R}^3 .

rtimos de la base:

$$= \{ (1 \ 0 \ 1), (1 \ 0 \ -1), (0 \ 3 \ 4) \}$$

ra llegar a la base ortonormal $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ a travez
proceso de Gram-Schmidt.

inimos v'_1 :

$$v'_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

ontramos la norma de v_1 :

$$\|v_1\| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

$$= \frac{(1 \ 0 \ 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = u_1$$

amos; $v'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$, para lo cual encontramos
viamente $\langle v_2, u_1 \rangle$.

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \langle (1 \ 0 \ -1), (1/\sqrt{2} \ 0 \ 1/\sqrt{2}) \rangle$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0 (0) + (-1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$= (1 \ 0 \ -2) - 0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (1 \ 0 \ -1)$$

ificamos que v'_1 y v'_2 son ortogonales, entonces

tuamos el producto interno entre v'_1 y v'_2 .

$$\langle v'_1, v'_2 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

onces son ortogonales.

$$\text{emos: } u_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{(1 \ 0 \ -1)}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{(1 \ 0 \ -1)}{\sqrt{2}}$$

ontramos v'_3 :

$= v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$, para esto hallamos
 primero el producto interno entre v_3 y u_1 y entre v_3 y

$$\langle v_3, u_1 \rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3(0) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$= (0 \ 3 \ 4) - 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (0 \ 3 \ 4) + (-2 \ 0 \ -2) + (2 \ 0 \ -2)$$

$$= (0 \ 3 \ 0)$$

na, comprobamos que v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2

$$\langle v'_3, u_1 \rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle v'_3, u_2 \rangle = 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3(0) + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

nces v'_3 es ortogonal a u_1 y u_2 .

ontramos u_3 :

$$v_3 = \frac{v'_3}{\|v'_3\|} = \frac{(0 \ 3 \ 0)}{\sqrt{9}} = \frac{(0 \ 3 \ 0)}{3} = (0 \ 1 \ 0)$$

$$v_3 = (0 \ 1 \ 0)$$

Por lo tanto, la base ortonormal que hemos obtenido es:

$$B_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0 \ 1 \ 0) \right\}$$

Probemos ahora que el producto de cualquier par de vectores de B_2 es cero.

$$\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0) + 0(1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0) = 0$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0) + 0(1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)(0) = 0$$

Por lo tanto, hemos comprobado que la base

$$B_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0 \ 1 \ 0) \right\} \text{ es ortonormal}$$

Así mismo, también podemos obtener bases ortonormales en el espacio lineal de los polinomios, como se indica en la siguiente demostración.

Construya una base ortonormal para el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2 en el intervalo $[0,1]$.

Comenzamos con la base estándar $B_1 = \{1, x, x^2\}$

Esto que $P_2 [0,1]$ es un subconjunto de $P_n [0,1]$ polinomios de grado menor o igual a n definidos en el intervalo cerrado $[0,1]$ ya que todo polinomio es continuo y es un espacio vectorial para todo entero n .

Para $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios, usaremos el producto interno o escalar entre vectores para polinomios dado por

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_a^b p(x) q(x) dx$$

Tomemos de la base canónica : $B_1 = \{1, x, x^2\}$

se define:

$$v_1 = \frac{1}{\|v_1\|}$$

Encontramos la norma de v_1 :

$$\|v_1\| = \sqrt{\int_0^1 (1)(1) dx} = \sqrt{\int_0^1 dx} = \sqrt{X \Big|_0^1} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

$$v_1 = \frac{1}{1} = u_1 = 1$$

Tomemos v_2 :

$$v_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1, \text{ para lo cual primero hallamos } \langle v_2, u_1 \rangle$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_0^1 (x) (1) dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$v_2 = x - \left(\frac{1}{2}\right) (1) = x - \frac{1}{2}$$

Verificamos que v_1 y v_2 son ortogonales, es decir que el producto interno entre v_1 y v_2 sea cero.

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \int_0^1 (1) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 0 = 0 \end{aligned}$$

Entonces v_1 y v_2 son ortogonales

Ahora encontramos la norma de v_2

$$\begin{aligned} \|v_2\| &= \sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx} \\ &= \sqrt{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{6}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u_2 = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{3} (2x - 1)$$

Continuación, obtenemos v_3 :

$v_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$. Para lo cual

calculamos primero los productos internos entre v_3 y u_1 y

entre v_3 y u_2 .

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_0^1 (x^2) (1) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$u_2 \rangle = \int_0^1 (x^2) (3(2x-1)) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2) (2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) dx = \int_0^1 (2\sqrt{3}x^3 - \sqrt{3}x^2) dx$$

$$= \left. \frac{2\sqrt{3}}{4} x^4 - \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}(2x-1))}{6} = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}x - \sqrt{3})}{6}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x = x^2 - x + \frac{1}{6} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Además comprobamos que v_3 es ortogonal a u_1 y u_2

$$\langle u_1, v_3 \rangle = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) (1) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) dx$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \right|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) - 0$$

$$= \left(\frac{2 - 3 + 1}{6} \right) - 0 = 0$$

$$\langle u_2, v_3 \rangle = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) (\sqrt{3}(2x-1)) dx$$

$$= \int_0^1 \left(2\sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{4} x^4 - \frac{3\sqrt{3}}{3} x^3 + \frac{4\sqrt{3}}{6} x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6} x \Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) - 0 \\
&= \left(\frac{3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{6} \right) - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces v_3 es ortogonal a u_1 y u_2 ahora, calculamos la norma de v_3

$$\begin{aligned}
\|v_3\| &= \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx} \\
&= \sqrt{\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx} \\
&= \sqrt{\left. \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{36} \right|_0^1} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{36}} \\
&= \sqrt{\frac{36 - 20 + 30 - 30 + 5}{180}} = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$\frac{v_3}{\|v_3\|} = 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5} (6x^2 - 6x + 1)$$

$$\sqrt{5} (6x^2 - 6x + 1)$$

Entonces obtenido entonces la base ortonormal:

$$\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$$

comprobar que B_2 es ortonormal, la norma de cada uno de los vectores u_1 , u_2 y u_3 debe ser uno, y el producto de cualquier par de vectores debe ser cero.

obtenemos las normas:

$$= \sqrt{\int_0^1 1^2 dx} = \sqrt{x \Big|_0^1} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (\sqrt{3} (2x - 1))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 3 (4x^2 - 4x + 1) dx}$$

$$= \sqrt{3 \left(\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x \right) \Big|_0^1} = \sqrt{4x^3 - 6x^2 + 3x \Big|_0^1}$$

$$= \sqrt{4(1) - 6(1) + 3(1) - 0} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (\sqrt{5} (6x^2 - 6x + 1))^2 dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 5 (36x^4 + 36x^2 + 1 + 12x^2 - 12x) dx}$$

$$= \sqrt{5 \left(\frac{36x^5}{5} + 12x^3 + x + 4x^3 - 18x^4 - 6x^2 \right) \Big|_0^1}$$

$$= \sqrt{5 \left[\left(\frac{36}{5} + 12 + 1 + 4 - 18 - 6 \right) - 0 \right]}$$

$$= \sqrt{5 \left(\frac{36}{5} - 7 \right)} = \sqrt{5 \left(\frac{36}{5} - \frac{35}{5} \right)} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1$$

comprobamos que el producto interno entre cualquier par de vectores es cero

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^1 (1) (\sqrt{3} (2x - 1)) dx = \int_0^1 \sqrt{3} (2x - 1) dx$$

$$= \sqrt{3} \left(x^2 - x \right) \Big|_0^1 = \sqrt{3} (1 - 1 - 0) = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \int_0^1 (1) (\sqrt{5} (6x^2 - 6x + 1)) dx$$

$$= \sqrt{5} \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1) dx = \sqrt{5} (2x^3 - 3x^2 + x) \Big|_0^1$$

$$= \sqrt{5} [(2 - 3 + 1) - 0] = 0$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \int_0^1 [\sqrt{3}(2x-1)] [\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)] dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{15} (12x^3 - 18x^2 + 8x - 1) dx$$

$$= \sqrt{15} (3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - x) \Big|_0^1 = 0$$

Entonces hemos probado que la base obtenida es ortonormal.

En esta continuación presentamos un ejemplo de ortogonalidad en el espacio vectorial de las matrices reales $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de n filas y n columnas.

Sean $A, B, C, D \in M_{n \times n}$; en este espacio vectorial, $V = M_{n \times n}$,

se ha definido el siguiente producto interno: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$, donde $\text{tr}(A)$ es la traza, es decir, la función:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Veremos primero que la siguiente es una base ortonormal

en V .

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Los elementos de la base los llamaremos matrices: A, B, C respectivamente.

probaremos primero que es una base ortonormal, la norma de cada uno de los vectores en B_1 debe ser 1 y, el producto interno de 2 matrices cualesquiera en B_1 debe ser cero.

encontramos las normas de cada una de las siguientes matrices:

$$\|A\| = +\sqrt{\langle A, A \rangle} = +\sqrt{\text{tr}\langle A^t, A \rangle} = +\sqrt{1+0} = +\sqrt{1} = 1$$

$$\|B\| = +\sqrt{\langle B, B \rangle} = +\sqrt{\text{tr}\langle B^t, B \rangle} = +\sqrt{0+1} = +\sqrt{1} = 1$$

$$\|C\| = +\sqrt{\langle C, C \rangle} = +\sqrt{\text{tr}\langle C^t, C \rangle} = +\sqrt{1+0} = +\sqrt{1} = 1$$

$$\|D\| = +\sqrt{\langle D, D \rangle} = +\sqrt{\text{tr}\langle D^t, D \rangle} = +\sqrt{0+1} = +\sqrt{1} = 1$$

entonces, se ha probado una de las propiedades de conjunto ortonormal, esto es que cada uno de sus componentes es unitario. Comprobamos ahora, la propiedad de ortogonalidad.

para esto, efectuamos el producto interno entre cualesquier par de matrices.

$$\langle A, B \rangle = \text{tr} \langle B^t A \rangle$$

calculamos B^t y luego el producto con A :

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \langle B^t A \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ahora, obtenemos la traza:

$$\langle B^t A \rangle = 0+0 = 0$$

efectuamos el producto interno entre A y C :

$$\langle A, C \rangle = \text{tr} \langle C^t A \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lamos C^tA :

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mos la traza: $\text{tr} \langle C^tA \rangle = 0+0 = 0$

. calculamos el producto interno entre B y D:

$$= \text{tr} \langle D^tB \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies D^tB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle D^tB \rangle = 0+0 = 0$$

tinuación, obtenemos el producto interno entre A y D:

$$= \text{tr} \langle D^tA \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies D^tA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle D^tA \rangle = 0$$

mente C y D:

$$\rangle = \text{tr} \langle D^tC \rangle$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies D^tC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle D^tC \rangle = 0$$

Lo cual prueba que B_1 es una base ortonormal y no hemos usado el proceso de ortogonalización de GRAM-SCHMIDT.

A continuación presentamos un ejemplo en el que se tiene un sistema de ecuaciones, se desea construir una base ortonormal para su espacio solución, considerando como un subespacio de \mathbb{R}^n .

Construir la base del espacio solución de un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, que tenga 2 variables libres, construir además una base ortogonal utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

tenemos el siguiente conjunto de predicados:

$$1 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

encontramos el conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$, esto es

$$p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge p_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge p_3(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

utilizando la matriz aumentada del sistema y el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 \\ x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge p_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge p_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) / \{ x_1 = -x_3 - x_4, x_2 = 0, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^4$$

Entonces una base para el espacio solución del sistema es:

$$B = \{(-1 \ 0 \ 1 \ 0), (-1, 0, 0, 1)\}$$

Encontramos ahora, una base ortonormal para $\text{span}\{p_1, p_2, p_3\}$.

Trabajamos con el producto interno estándar en \mathbb{R}^n

Queremos que:

$$v_1 = (-1 \ 0 \ 1 \ 0)$$

$$v_2 = (-1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Obtenemos la norma de v_1 :

$$\|v_1\| = \sqrt{(1 + 0 + 1 + 0)} = \sqrt{2}$$

Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 \ 0 \ 1 \ 0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \right)$$

Encontramos v_2' :

$$v_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1, \text{ para lo cual obtenemos } \langle v_2, u_1 \rangle:$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 0 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v'_2 = (-1 \ 0 \ 0 \ 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \right)$$

$$= (-1 \ 0 \ 0 \ 1) + \left(\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 0 \right) = \left(-\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 1 \right)$$

$$v'_2 = \left(-\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 1 \right)$$

ahora comprobamos que v'_2 y u_1 son ortogonales:

$$\langle v'_2, u_1 \rangle = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0(0) + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1(0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

entonces, v'_2 y u_1 son ortogonales.

ahora encontramos la norma de v'_2 :

$$\|v'_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 1 \right)}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 1 \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \ 0 \ -\frac{1}{\sqrt{6}} \ \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

Entonces, la base ortonormal pedida es :

$$B_2 = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \ 0 \ \frac{-1}{\sqrt{6}} \ \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Para comprobar que la base B_2 es ortonormal, debemos encontrar el producto interno entre u_1 y u_2 , el mismo que debe ser cero y, luego encontraremos que la norma de u_1 y u_2 debe ser uno.

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) + 0(0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) + 0 \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} + 0 = 0 \end{aligned}$$

Entonces u_1 y u_2 son ortogonales

ahora encontramos las normas:

$$\|u_1\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{2}{4} + 0 + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1$$

Entonces, hemos comprobado que B_2 es una base ortonormal

para el espacio solución del sistema de tres ecuaciones y

cuatro incógnitas siguientes:

$$1 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0.$$

CONCLUSIONES

Este tema de estudio involucra el conocimiento de varias definiciones del Algebra Lineal como combinación lineal, norma de un vector, vector unitario, producto interno, etc., que ayudarán a cualquier estudiante de nivel medio que tenga aspiraciones de llegar a un centro de estudios de educación superior.

En este trabajo se demostró los pasos necesarios para ortogonalizar un conjunto de vectores linealmente independiente, obteniéndose en cada paso del Proceso de Gram-Schmidt el conjunto generador ortogonal que se requiere para el siguiente.

El proceso de Gram-Schmidt es necesario que lo conozca el estudiante de bachillerato ya que esto le permitirá trabajar con varios espacios vectoriales, determinar como está definido el producto interno y pasar de una base cualquiera B_1 a una base ortonormal B_2 .

También podrá trabajar, conforme avance en sus estudios de Algebra Lineal, con polinomios y vectores característicos con la ayuda del proceso de Gram-Schmidt.

ANEXO

INDICE DE SIMBOLOS

0_v	Cero Vector
R	Conjunto de los Números Reales
$\ v\ $	Norma del vector v
B_1, B	Base
B'_1	Base Ortogonal
B_2	Base Ortonormal
$M_{n \times n}(R)$	Espacio vectorial de las matrices reales de n filas y n columnas.
\in	Pertenece a
\forall	Para todo
α	Escalar
$\text{tr}(A)$	Traza de la matriz A
B^t	Transpuesta de la matriz B
R^n	Conjunto de todos los n -vectores
\langle, \rangle	Producto interno
V	Espacio vectorial
v	Vector: elemento de V
\implies	Implica o entonces
P_n	Polinomios de grado menor o igual a n
$\sqrt{\quad}$	Raíz cuadrada
p_1	Predicado
\neq	Diferente a; no es igual a

BIBLIOGRAFIA

- N. S. (1987): ALGEBRA LINEAL, México, segunda edición. Edit. Grupo Editorial Iberoamérica, 475 ps.
- S. (1976): ALGEBRA LINEAL, Edit. Fondo Educativo Interamericano, México, 1976, 400 ps.
- B. (1981): ALGEBRA LINEAL, Edit. Fondo Educativo Interamericano, 1981, Nueva York, 304 ps.
- W. (1990): ALGEBRA LINEAL con aplicaciones. México, Edit. MacGraw Hill.