

Año:	2023	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Primera	Fecha:	20 de noviembre de 2023

**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, \_\_\_\_\_, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.**

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar”.

Firma: \_\_\_\_\_ Número de matrícula: \_\_\_\_\_ Paralelo: \_\_\_\_\_

1. (10 puntos) Encuentre la solución general de la EDO de primer orden

$$(t^2 - 1)y' + (t^2 + 1)y = e^{-t}, \quad t > 0.$$

2. (10 puntos) Un equipo de biólogos descubrió un tipo especial de población bacteriana que, al invadir un cultivo de  $N \text{ cm}^2$ , se propaga a una tasa que es proporcional al producto del número de  $\text{cm}^2$  afectados por el número de  $\text{cm}^2$  no afectados por la bacteria en un tiempo  $t$ . En uno de los experimentos llevados a cabo para estudiar esta bacteria se usó un cultivo de  $15 \text{ cm}^2$ . Inicialmente, la población bacteriana ocupó  $2 \text{ cm}^2$ . Al día siguiente, la bacteria había afectado un total de  $5 \text{ cm}^2$ . Determine el tiempo que le tomó a la bacteria afectar el 80% de este cultivo.

3. En el espacio vectorial  $\mathbb{M}_{2,2}$ , de matrices  $2 \times 2$ , considere el siguiente conjunto de vectores:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) (5 puntos) ¿Qué condición (o condiciones) debe satisfacer una matriz  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  para que esté en  $\text{gen} S$ ? Determine si  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \text{gen} S$ .

(b) (5 puntos) ¿Es  $S$  un conjunto linealmente independiente?

4. Sea  $\mathbb{W} = \{p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{P}_2 : p(3) + p(-1) = p'(2)\}$ .

(a) (4 puntos) Demuestre que  $\mathbb{W}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{P}_2$

(b) (4 puntos) Encuentre una base de  $\mathbb{W}$  y determine su dimensión.

(c) (2 puntos) ¿Pertenece  $1 - 2x + x^2$  a  $\mathbb{W}$ ?

5. Resuelva solo uno de los siguientes problemas:

(a) (10 puntos) Considere la EDO de segundo orden

$$ty'' + 2y' + ty = 0, \quad t > 0.$$

Se conoce que  $y_1(t) = \frac{\cos t}{t}$  es solución de esta EDO. Halle una segunda solución  $y_2(t)$ , de modo que  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  sea una base para el espacio vectorial de soluciones de la EDO. *Atención:* No basta hallar la solución  $y_2(t)$  únicamente, también debe demostrar  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  es una base en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

(b) (10 puntos) Un circuito en serie tiene un capacitor de  $10^{-5}$  faradios, un resistor de  $3 \times 10^2$  ohmios, y un inductor de 0,2 henrios. La carga inicial en el capacitor es  $10^{-6}$  culombios y no hay corriente inicial. Halle la carga  $Q(t)$  en el capacitor en cualquier tiempo  $t$ .