

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 1**

1. (5 PUNTOS) Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = e^{\sqrt{-x}}$$

Determine la expresión simplificada correspondiente a  $f''(x)$ .

2. (5 PUNTOS) Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Determine la expresión simplificada correspondiente a  $f''(x)$ .

3. (5 PUNTOS) Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(2x)}}$$

Determine la expresión simplificada correspondiente a  $f''(x)$ .

4. (5 PUNTOS) Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln(3x)}}$$

Determine la expresión simplificada correspondiente a  $f''(x)$ .

5. (5 PUNTOS) Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\cos(4x)}}$$

Determine la expresión simplificada correspondiente a  $f''(x)$ .

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 2**

6. (5 PUNTOS) Dada la curva  $C$  en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 2t^3 - 4t + 7 \\ y(t) = t + \ln(t + 1) \end{cases} ; t > -1$$

Determine:

- La pendiente de la recta tangente a la curva en  $t = 1$ .
- La ecuación, en coordenadas cartesianas y en su forma *punto-pendiente*, de la recta tangente a la curva en  $t = 1$ .

7. (5 PUNTOS) Dada la curva  $C$  en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 3e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2}e^t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Determine:

- La pendiente de la recta tangente a la curva en  $t = -1$ .
- La ecuación, en coordenadas cartesianas y en su forma *punto-pendiente*, de la recta tangente a la curva en  $t = -1$ .

8. (5 PUNTOS) Dada la curva  $C$  en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 2 \sec(t) \\ y(t) = 2 \tan(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Determine:

- La pendiente de la recta tangente a la curva en  $t = -\pi/6$ .
- La ecuación, en coordenadas cartesianas y en su forma *punto-pendiente*, de la recta tangente a la curva en  $t = -\pi/6$ .

9. (5 PUNTOS) Dada la curva  $C$  en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) \\ y(t) = 1 + \operatorname{sen}(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Determine:

- (a) La pendiente de la recta tangente a la curva en  $t = -\pi/4$ .
- (b) La ecuación, en coordenadas cartesianas y en su forma *punto-pendiente*, de la recta tangente a la curva en  $t = -\pi/4$ .

10. (5 PUNTOS) Dada la curva  $C$  en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln(t^2) \end{cases} ; t > 0$$

Determine:

- (a) La pendiente de la recta tangente a la curva en  $t = 2$ .
- (b) La ecuación, en coordenadas cartesianas y en su forma *punto-pendiente*, de la recta tangente a la curva en  $t = 2$ .

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 3**

11. (8 PUNTOS) Un rectángulo, que tiene sus lados paralelos al plano cartesiano y uno de ellos está asentado sobre el eje  $X$ , se encuentra inscrito en la región limitada por la función  $y = a - x^2$  y el eje  $X$ , con  $a > 0$ . Calcule las dimensiones del rectángulo en términos de  $a$ , de tal forma que la superficie rectangular tenga la mayor área posible y especifique cuánto es dicho valor.
12. (8 PUNTOS) Se desea construir un puente cuyos dos extremos están ubicados en los puntos  $A(-2, 4)$  y  $B(x, y)$ . Si el punto  $B$  se encuentra ubicado en un barranco, y si dicho barranco presenta el comportamiento de la función lineal  $y = x + 4$ , obtenga las coordenadas del punto  $B$  tal que el puente  $\overline{AB}$  tenga la menor distancia posible y especifique cuánto es dicho valor.
13. (8 PUNTOS) Se quiere construir una pequeña cisterna en forma de prisma recto rectangular con base cuadrada, sin tapa, para almacenar  $1 [m^3]$  de agua. El costo para la construcción de su base es de  $3 [$/m^2]$  y para la superficie lateral es de  $4 [$/m^2]$ . Calcule las dimensiones de la cisterna cuyo costo total sea el más económico y especifique cuánto es dicho valor.
14. (8 PUNTOS) Se quiere construir una cisterna en forma de cilindro recto, sin tapa, para almacenar  $192\pi [pies^3]$  de agua. El costo para la construcción de su base es de  $9 [$/pies^2]$  y para la superficie lateral es de  $3 [$/pies^2]$ . Calcule las dimensiones de la cisterna cuyo costo total sea el más económico y especifique cuánto es dicho valor (considere la siguiente aproximación  $\pi \approx 3.1$ ).
15. (8 PUNTOS) Un granjero tiene 100 cerdos que pesan  $300 [lb]$  cada uno. Cuesta  $0.50 [$/día]$  mantener un cerdo. Los cerdos aumentan de peso a  $10 [lb/día]$ . Se venden hoy a  $0.75 [$/lb]$ , pero el precio de venta  $[lb]$  está cayendo  $0.01 [$/día]$ . Determine la cantidad de días que debe esperar el granjero para vender todos sus cerdos, maximizando sus ganancias y especifique cuánto es dicho valor.

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 4**

16. (5 PUNTOS) Determine, si existen, los puntos de inflexión, y, los intervalos de concavidad de:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

17. (5 PUNTOS) Determine, si existen, los puntos de inflexión, y, los intervalos de concavidad de:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

18. (5 PUNTOS) Determine, si existen, los puntos de inflexión, y, los intervalos de concavidad de:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

19. (5 PUNTOS) Determine, si existen, los puntos de inflexión, y, los intervalos de concavidad de:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

20. (5 PUNTOS) Determine, si existen, los puntos de inflexión, y, los intervalos de concavidad de:

$$f(x) = (x^2 - 1)^3$$

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 5**

21. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int x^3 \operatorname{sen}(\ln(x^2)) dx$$

22. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int e^{-x} \operatorname{sen}(1-x) \cos(1-x) dx$$

23. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\sqrt{x})^3 \operatorname{arc} \operatorname{sen}(\sqrt{x}) dx$$

24. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int x e^{x^2} \operatorname{sen}(x^2 + 1) dx$$

25. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int e^{2x} \cos^2(3x) dx$$

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 6**

26. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \operatorname{sen}^3(2x)\sqrt{\operatorname{cos}(2x)} dx$$

27. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int 8 \operatorname{sen}^4(3x) \operatorname{cos}^2(3x) dx$$

28. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \sqrt{5 - 4x - x^2} dx$$

29. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}} dx$$

30. (6 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int -2 \tan^{-5}(2x)\sqrt{\operatorname{csc}(2x)} dx$$

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 7**

31. (8 PUNTOS)

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$g(x) = \int_1^{x^2} x^3 f(t) dt \quad ; \quad f(1) = \frac{1}{7} \quad ; \quad f'(1) = -1$$

Calcule:

$$g''(1)$$

32. (8 PUNTOS)

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$g(x) = \int_1^{\ln(x)} x f(t) dt \quad ; \quad f(1) = \frac{1}{6} \quad ; \quad f'(1) = \frac{3}{2}$$

Calcule:

$$g''(e)$$

33. (8 PUNTOS)

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$g(x) = \int_1^{x^3} x^2 f(t) dt \quad ; \quad f(1) = -\frac{1}{3} \quad ; \quad f'(1) = \frac{1}{9}$$

Calcule:

$$g''(1)$$



34. (8 PUNTOS)

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$g(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sqrt{x} f(t) dt \quad ; \quad f(1) = 8 \quad ; \quad f'(1) = -20$$

Calcule:

$$g''(1)$$

35. (8 PUNTOS)

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$g(x) = \int_2^{\sqrt{x}} x^2 f(t) dt \quad ; \quad f(2) = 2 \quad ; \quad f'(2) = -11$$

Calcule:

$$g''(4)$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                  |                    |
|--------------------|-------------------------|------------------|--------------------|
| <b>AÑO:</b>        | 2020                    | <b>PERÍODO:</b>  | PRIMER TÉRMINO     |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESOR:</b> |                    |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | SEGUNDA                 | <b>FECHA:</b>    | 07/septiembre/2020 |

**Tema 8**

36. (7 PUNTOS) La superficie de la pieza de una máquina se puede aproximar por la región comprendida entre las funciones:

$$y_1 = 2|x|$$

$$y_2 = x^2 + 1$$

Calcule el área  $A$  de la superficie de la pieza sabiendo que la región se encuentra acotada por los valores de  $x$  tales que  $y_2$  es tangente a  $y_1$ .

37. (7 PUNTOS) Los vehículos  $A$  y  $B$  viajan a estas velocidades:

$$v_A = 2\sqrt{t-1}$$

$$v_B = \frac{\ln(t)}{t}$$

donde  $v_A$  y  $v_B$  se miden en  $[km/h]$  y  $t$  representa el tiempo en  $[h]$ . Si se sabe que el área bajo la curva de la velocidad vs. el tiempo representa el espacio recorrido por un vehículo, calcule la diferencia de las distancias  $\Delta S$  que se han desplazado los vehículos  $A$  y  $B$  entre  $t = 1 [h]$  y  $t = 2 [h]$ .

38. (7 PUNTOS) El nivel de desigualdad entre países es el COEFICIENTE DE GINI  $G$ , el cual se calcula así:

$$G = \frac{A}{A+B}$$

donde el valor  $A$  es el área de la región comprendida entre la función  $y = x$  (que representa la igualdad perfecta de la distribución del ingreso de un país) y la curva de Lorenz  $L$ , y, el valor  $B$  corresponde al área de la región bajo la curva  $L$ , limitada por  $x = 0$ ,  $x = 1$  y el eje  $X$ . Por lo que,  $A + B$  representa el área de la superficie del triángulo rectángulo formado por la función identidad, el eje  $X$  y la recta  $x = 1$ .

Calcule el COEFICIENTE DE GINI  $G$  de un país cuya curva de Lorenz es:

$$L(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$$

39. (7 PUNTOS) El nivel de desigualdad entre países es el COEFICIENTE DE GINI  $G$ , el cual se calcula así:

$$G = \frac{A}{A + B}$$

donde el valor  $A$  es el área de la región comprendida entre la función  $y = x$  (que representa la igualdad perfecta de la distribución del ingreso de un país) y la curva de Lorenz  $L$ , y, el valor  $B$  corresponde al área de la región bajo la curva  $L$ , limitada por  $x = 0$ ,  $x = 1$  y el eje  $X$ . Por lo que,  $A + B$  representa el área de la superficie del triángulo rectángulo formado por la función identidad, el eje  $X$  y la recta  $x = 1$ .

Calcule el COEFICIENTE DE GINI  $G$  de un país cuya curva de Lorenz es:

$$L(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{4}x$$

40. (7 PUNTOS) Suponga que una empresa tiene la siguiente función de demanda, donde  $w$  es el sueldo por hora en [\$] y  $x$  es la cantidad de trabajadores:

$$w(x) = 10 - \frac{1}{2}x$$

El gobierno ha impuesto el nivel de sueldo por hora en un valor  $w = \$ 8$ , por lo cual la función de oferta se encuentra fija en este nivel.

Por medio de integrales definidas, calcule el excedente de la empresa  $EE$  en[\$], cuyo valor es el área de la región que se encuentra bajo la función de demanda de trabajadores y sobre el nivel de sueldo fijo impuesto por el gobierno.