RÚBRICA DEL PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL

PAO2 2023-2024

1. *a*) (6 p.) Sea $a \in \mathbb{R}$. Dados el plano $\pi : -6x + ay + 2z = 0$ y la recta $L : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$, determine de ser posible el valor de a para que L sea perpendicular a π.

    - Aplica un procedimiento correcto para obtener un vector director de L, por ejemplo, $d_L = (3, -2, -1)$................2 p.
    - Identifica vector normal de π, por ejemplo, $n = (-6, a, 2)$.......1 p.
    - Plantea una condición coherente para que d_L sea paralelo a n, equivalente a que L sea perpendicular a π................1 p.
    - Determina correctamente que $a = 4$................2 p.

   b) (6 p.) Considere la ecuación cuadrática $25x^2+9y^2+50x-54y-225z+556 = 0$. Especifique:

    - Tipo de superficie que representa en $\mathbb{R}^3$.
    - Coordenadas del vértice o centro.
    - Intersección con el plano XY.

    - Obtiene correctamnete ecuación canónica de la superficie..........2 p.

    $$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = z - 2.$$

    - Especifica que representa un paraboloide elíptico........1 p.
    - Especifica vértice: $(-1, 3, 2)$......1 p.
    - Determina correctamente que la intersección con el plano XY es $\emptyset$................2 p.

2. (10 p.) Considere la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)|x|}{|x|+|y|} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   a) Calcule f_x y f_y en $(0,0)$.

   - Plantea definición de límite para calcular $f_x(0,0)$.....1 p.
   - Reemplaza datos correctamente y determina que $f_x(0,0) = 1$.....1 p.
   - Plantea definición de límite para calcular $f_y(0,0)$.....1 p.
   - Reemplaza datos correctamente y determina que $f_y(0,0) = 0$.....1 p.

   b) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

   - Plantea definición de límite para analizar diferenciabilidad de f en $(0,0)$..............................1 p.
   - Reemplaza datos correctos.........1 p.
   - Analiza correctamente el límite y concluye que f no es diferenciable en $(0,0)$.............2 p.

   c) Explique si es posible concluir sobre la continuidad de f en $(0,0)$ usando alguno de los resultados obtenidos en los literales *a*) o *b*).

   - Escribe una explicación coherente usando lo obtenido en *a*) o en *b*)................2 p.

   Nota: en el ítem *c*) se debe considerar lo que el estudiante obtuvo en *a*) y en *b*), indistintamente si lo que obtuvo es correcto o no.

3. (12 p.) Sea f una función escalar de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $z = f(s,t)$,

$$s = x^2 - y, \quad t = xy, \quad x, y > 0.$$

Si $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} = 0$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = t\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \dfrac{\partial z}{\partial t}$.

- Plantea definición general de la derivada mixta requerida........1 p.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

- Aplica correctamente regla de la cadena para $\dfrac{\partial z}{\partial x}$....................2 p.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \\ &= \frac{\partial z}{\partial s}2x + \frac{\partial z}{\partial t}y \qquad (*).\end{aligned}$$

- Aplica correctamente regla de la cadena sobre el 1er término de (*)......2 p.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial s}2x\right) &= 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) \\ &= 2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}\frac{\partial t}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

- Aplica correctamente regla del producto y regla de la cadena sobre el 2do término de (*).............................4 p.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}y\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)y + \frac{\partial z}{\partial t}(1) \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial y}\right)y + \frac{\partial z}{\partial t}.\end{aligned}$$

- Usa las hipótesis dadas y muestra que
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x(0+0) + \left(0 + \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}x\right)y + \dfrac{\partial z}{\partial t}$.........2 p.
- Concluye la igualdad.......................................1 p.

4. (6 p.) Para la función $g(x,y,z)=x^2+2x+y^2+z^2$, escriba su superficie de nivel $k=16$ y determine si el punto $Q(0,4,2)$ pertenece o no al plano tangente de dicha superficie en el punto $P(1,2,3)$.

- Escribe la superficie de nivel requerida, $S: x^2+2x+y^2+z^2=16$......1 p.
- Obtiene gradiente de S general, $\nabla S=(2x+2,2y,2z)$........1 p.
- Obtiene $\nabla S(P)=(4,4,6)$..........1 p.
- Obtiene ecuación correcta del plano tangente a S en P......2 p.

$$\pi: 2x+2y+3z-15=0.$$

- Muestra correctamente que $Q\notin\pi$..........1 p.

5. (10 p.) Considere la ecuación $3y - 3xz - z^3 = 0$ y sea $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, \sqrt[3]{3})$ un punto que la satisface.

   a) Justifique si es posible definir una función diferenciable $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

   - Define $F(x, y, z) = 3y - 3xz - z^3$ y justifica que es de clase C^1 en una vecindad del punto dado..................1 p.
   - Calcula $F_z(x_0, y_0, z_0) = -3\sqrt[3]{9}$..........1 p.
   - Explica que f existe porque F satisface las hipótesis del teorema de la función implícita, en particular enfatiza que $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$........1 p.

   b) En caso de ser afirmativo el resultado en *a*), determine el polinomio de Taylor de primer orden de f en el punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Expresar en términos de x e y.

   - Plantea polinomio de Taylor de primer orden en forma general.........1 p.
   - Define vector $h = (x, y - 1)$.........1 p.
   - Identifica que $f(0, 1) = \sqrt[3]{3}$..........1 p.
   - Calcula $f_x(0, 1)$ y $f_y(0, 1)$ en forma implícita.........2 p.
   - Reemplaza datos, simplifica y obtiene polinomio correcto.......2 p.

$$P(x, y) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}} - \frac{x}{\sqrt[3]{3}} + \frac{y}{\sqrt[3]{9}}.$$