ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EXAMEN COMPLEXIVO

PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:

"MAGISTER EN CONTROL DE OPERACIONES Y GESTIÓN LOGÍSTICA"

TEMA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA METAHEURISTICA EN UN PROBLEMA DE REGRESIÓN NO LINEAL

AUTOR

WALTER ANDRÉS RIVERO CEDEÑO

Guayaquil – Ecuador

AÑO

2015

DEDICATORIA

A mi hija Daniela Victoria, mi esposa Maricela, mi mamá Berenice y en especial a la memoria de mi padre Walter Vicente.

Walter Andrés Rivero Cedeño

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a mi esposa Maricela por su apoyo incondicional y paciencia en mis largas jornadas de estudio, a mi madre Berenice y abuelita Laura quienes con su ejemplo me motivaron a seguir adelante y culminar este programa.

DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad del contenido de este Proyecto de Grado, me corresponde exclusivamente; el patrimonio intelectual de la misma a la **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas,** de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

WALTER ANDRÉS RIVERO CEDEÑO

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

M.Sc. Carlos Suárez Hernández
PRESIDENTE DEL TRIBUNAL

M.Sc. Carlos Martin Barreiro
DIRECTOR DEL EXÁMEN COMPLEXIVO

MIM. Elkin Angulo Ramírez
VOCAL

AUTOR DEL PROYECTO DE GRADUACIÓN

WALTER ANDRÉS RIVERO CEDEÑO

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar una metaheurística para establecer la relación entre la deformación y dureza del acero.

OBJETIVO ESPECÍFICO

Diseñar e implementar una metaheurística para encontrar el valor óptimo de la relación entre deformación y dureza del acero expresado en términos de una regresión no lineal.

Evaluar la calidad de la solución del método heurístico respecto a la solución calculada por el método analítico.

INTRODUCCIÓN

En el campo de la investigación de operaciones existen oportunidades de mejorar procesos, para ello es importante un compromiso de búsqueda de la mejora permanente y que las soluciones que se propongan tengan una base científica, que permita resolver los problemas cuantitativa y cualitativamente.

Es común ver que las empresas del medio incurren en costos adicionales por tener procesos deficientes, capacidad de producción sub utilizadas, exceso de recursos, mala planificación de turnos de trabajo, etc.

Las metaheurísticas son procedimientos basados en reglas estratégicas para la búsqueda de soluciones factibles que se pueden aplicar a problemas complejos, además su implementación puede ayudar a las empresas a tomar mejores decisiones respecto a la mejora de procesos.

CAPÍTULO I

1. REVISIÓN DE LA LITERATURA

1.1 METAHEURÍSTICAS

Las heurísticas son procedimientos que buscan encontrar una buena solución factible, que no siempre es la mejor para un problema de optimización, deben tener capacidad para resolver problemas de gran tamaño. La calidad de la solución dependerá de un buen diseño del algoritmo.

Las heurísticas se basan en procedimientos de búsqueda del valor óptimo mediante iteraciones durante un tiempo determinado, al final del proceso se debe obtener como resultado el mejor valor de todas las iteraciones o concluir que no hay solución para el problema.

Una metaheurística es un método heurístico que incorpora una estructura general y criterios estratégicos para hallar la solución óptima a un problema en particular.

Las metaheurísticas deben ser capaces de poder escapar de óptimos locales, ampliando la búsqueda de la mejor solución hacia regiones donde pudiera encontrarse el óptimo global.

Las metaheurísticas son utilizadas para resolver problemas muy grandes, donde es muy complejo resolver mediante métodos de algoritmos exactos.

Las metaheurísticas más concocidas son:
Búsqueda tabú. (b) Recocido simulado. (c) Algoritmo genético

1.2 BÚSQUEDA TABÚ

La Búsqueda Tabú, es un procedimiento metaheurístico cuya principal característica es el uso de memoria a corto plazo que almacena los movimientos tabú en cada iteración y memoria a largo plazo donde se almacena la mejor solución, además utiliza estrategias especiales para resolver problemas complejos o de gran tamaño. Su filosofía se basa en la aplicación de diversas estrategias inteligentes para la resolución de problemas, basadas en procedimientos de aprendizaje.

Un algoritmo de búsqueda tabú debe iniciar con una solución factible, definir la estructura del vecindario, establecer el procedimiento de búsqueda de soluciones en el vecindario, definir las reglas de los movimientos tabú, qué movimientos se deben agregar a la lista tabú, cuál es el tamaño de la lista tabú y la cantidad de iteraciones que permanecerá un movimiento dentro de la lista, finalmente debe haber una regla de detención que puede ser un número determinado de iteraciones o una unidad de tiempo determinada que conduzca a la solución del problema.

CAPÍTULO II

2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA METAHEURÍSTICA

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Una empresa ecuatoriana se dedica a la elaboración de herramientas para construcción. Se conoce que, en la producción de estas herramientas, el método para deformar acero a temperatura normal mantiene una relación inversa con la dureza del mismo ya que, a medida que la deformación crece, se ve afectada la dureza del acero. Para investigar esta relación se ha tomado una muestra detallada en la Tabla 1.

Tabla 1 Relación de Deformación con Dureza Brinell

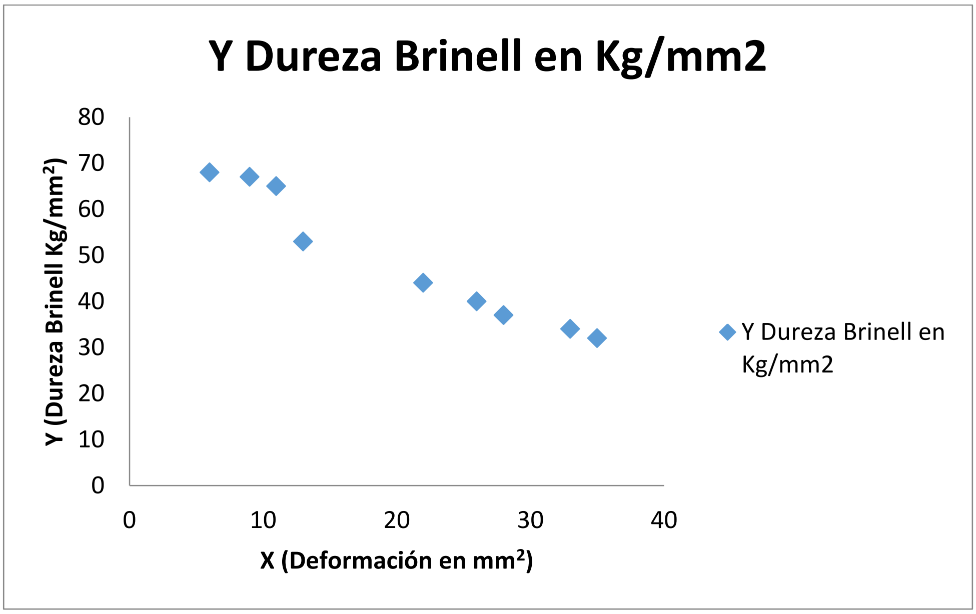
X (Deformación en mm^2)	6	9	11	13	22	26	28	33	35
Y (Dureza Brinell en Kg/mm^2)	68	67	65	53	44	40	37	34	32

Elaborado por: Autor

Se debe implementar una heurística para construir la función cuadrática $f(x) = a\,x^2 + bx + c$ y resolver el problema de regresión no lineal mediante el diseño e implementación de una metaheurística.

El Gráfico 1 muestra que existe una relación inversa en la relación de deformación y dureza del acero.

Gráfico 1 Relación Deformación con dureza



Elaborado por: Autor

2.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema sugiere que la relación deformación – dureza del acero se representa por una función cuadrática del tipo $f(x) = a\,x^2 + bx + c$, donde x representa a la deformación del acero en mm^2 y f(x) a la dureza del acero en Kg/mm^2.

El planteamiento de solución para resolver el problema se hará en 2 etapas, en la primera se encontrarán los valores de a, b y c por medio de una heurística y se definirá la función f(x), luego se buscará el valor de x que minimice f(x) por medio de una metaheurística.

Los valores de a, b y c, se pueden calcular por el **método de la suma de mínimos cuadrados**, el cual busca hallar la función que minimice el error de pronóstico entre el valor real y_i y el valor calculado en la función $\bar{y}_i$.

Del desarrollo de la expresión matemática del error del pronóstico elevado al cuadrado $\varepsilon_i^2 = (\bar{y}_i - y_i)^2$ obtenemos la función objetivo para el planteamiento de optimización de la suma de los mínimos cuadrados SMC.

Donde: SMC = $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$

Para complementar el planteamiento es necesario establecer una relación entre los coeficientes a, b y c para desarrollar la heurística.

El discriminante de una ecuación cuadrática del tipo $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ es una expresión definida como $\mathrm{D} = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$ en la que se relacionan los coeficientes de la ecuación de manera que al igualar la expresión a cero se obtienen los cruces de la función en el eje de las x.

Esta expresión permite establecer una relación entre los coeficientes de manera que será utilizada como restricción para el problema de optimización para hallar los valores de a, b y c.

Para determinar el tipo de restricción del modelo, se analizan los valores de D en los siguientes casos:

D > 0: f(x) tiene dos intersecciones en el eje de las abscisas en $\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$.

D = 0: f(x) es tangente al eje de las x en $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$.

D < 0: f(x) no tiene raíces reales, es decir que puede estar por encima o por debajo del eje de las x

Para el problema de la relación entre la deformación y dureza se asume que los valores de x y f(x) serán siempre positivos y mayores a cero, por lo que la restricción será D < 0.

Con todos los elementos anteriores se procede al planteamiento matemático del modelo de optimización.

FO:

Minimizar z: S(a, b, c) = $\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$

Sujeto a: $b^2 - 4ac < 0$

$\forall\, a, c \in R^+; b \in R$

Una vez definido los valores a, b y c, se obtiene una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde se deberá encontrar un valor de $x \in R$ que minimice f(x), se plantea el segundo problema de optimización que se resolverá con una metaheurística.

FO:

Minimizar z: $f(x) = ax^2 + bx + c$

2.3 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO DE LA HEURÍSTICA

La heurística va a realizar k iteraciones para calcular los valores de a, b, c y los evaluará en la función objetivo, a este valor se lo llamará Residuo. El algoritmo comparará el residuo de la iteración actual con el de la anterior y escogerá los coeficientes que den el menor valor de residuo para la siguiente iteración.

Se define la heurística de la siguiente manera:

I_k: $a_k > \frac{b_{k-1}^2}{4c_{k-1}}$

$-2\sqrt{a_k c_{k-1}} < b_k < 2\sqrt{a_k c_{k-1}}$

$c_k > \frac{b_k^2}{4a_k}$

$S_k = valor\ del\ residuo\ de\ la\ I_k$

Si $S_k < S_{k-1}$, se escogen los valores a_k, b_k y c_k para la siguiente iteración.
Si $S_k > S_{k-1}$, se escogen los valores actualizados en la iteración k-1 a_{k-1}, b_{k-1} y c_{k-1} para la siguiente iteración.

A continuación se explica cómo funciona el algoritmo:

Para la iteración inicial I_0 se escogen valores aleatorios dentro del rango de las restricciones definidas para el modelo:

I_0: $a_0 = \#\ aleatorio > 0$, donde $a_0 \in R^+$

$b_0 = \#\ aleatorio\ mayor\ o\ menor\ a\ 0$, donde $b_0 \in R$

$c_0 = \#\ aleatorio > 0$, donde $c_0 \in R^+$

$S_0 = valor\ del\ residuo\ de\ la\ I_0$

Para la primera iteración I_1 se toman los valores iniciales de los coeficientes a, b y c y se compara el valor del residuo de ambas iteraciones. Se escogen los coeficientes que den el menor valor de residuo para la segunda iteración I_2.

I_1: $a_1 > \frac{b_0^2}{4c_0}$

$-2\sqrt{a_1 c_0} < b_1 < 2\sqrt{a_1 c_0}$

$$c_1 > \frac{b_1^2}{4a_1}$$

$$S_1 = valor\ del\ residuo\ de\ la\ I_1$$

Si $S_1 < S_0$, se escogen los valores a_1, b_1 y c_1 para la siguiente iteración

Si $S_1 > S_0$, se escogen los valores a_0, b_0 y c_0 para la siguiente iteración

2.4 DESCRIPCIÓN DE LA METAHEURÍSTICA

Los parámetros requeridos para la ejecución de la Búsqueda Tabú, son:

x_0: Valor inicial de la función;

N(x): vecindario;

T = número máximo de iteraciones que puede permanecer un valor x dentro de la lista tabú, el cual sirve como restricción para no permanecer dentro de un óptimo local en caso que existiere;

K_{max}: número máximo de iteraciones a ejecutar en la búsqueda tabú.

x_k el número aleatorio seleccionado en la iteración k.

x_{SolIni} Valor actual de x.

$x_{SolCand}$ Valor del candidato x.

x^* número optimo elemento de la lista tabú.

LT Lista tabú.

Para la primera iteración k = 1

$x_0 = x_{solini}$ y $x_1 = X_{solcand}$

Evalúa $f(x_0)$ vs $f(x_1)$, para x_0 y $x_1 \in N(x)$

Si $f(x_1) < f(x_0) \rightarrow x_1 = x_{solini}$

$x_1 \in LT$

Para la segunda iteración k = 2

x_{solini} y $x_2 = X_{solcand}$

Evalúa $f(x_2)$ vs $f(x_{solini})$, para x_2 y $x_{solini} \in [N(x) – LT]$

Si $f(x_2) < f(x_{solini}) \rightarrow X_2 = X_{solini}$

$x_2 \in LT$

Para la iteración final k_{max}

x_{solini} y $x_{kmax} = X_{solcand}$

Evalúa $f(x_{kmax})$ vs $f(x_{solini})$, para x_{kmax} y $x_{solini} \in [N(x) – LT]$

Si $f(x_{kmax}) < f(x_{solini}) \rightarrow X_{kmax} = X_{solini,}$ y

Si $f(x_{kmax}) < f(x^* \in LT) \rightarrow f(x_{kmax})$ es mínimo en X_{kmax}, si no

$f(x_{solini})$ es mínimo en $X_{solini,}$

2.5 IMPLEMENTACIÓN DE LA METAHEURÍSTICA

Las heurísticas planteadas se programaron en el software Wolfram Mathematica 10.2, cuyo lenguaje de programación es sencillo y permite desarrollar modelos matemáticos para problemas de relativa complejidad, el código de la programación se muestra en el Anexo 1.

El algoritmo que calcula los valores de a, b y c que minimicen el error del pronóstico de y_i parte de valores iniciales a_0, b_0 y c_0 dentro de intervalos definidos, para generar k iteraciones también se definen intervalos para los valores de a_k, b_k y $c_{k.}$

Se generaron 4 corridas iniciales del programa para determinar la calidad del resultado en función del residuo, los resultados obtenidos evidenciaron que el modelo podía ser mejorado ajustando los intervalos para los coeficientes, se hicieron 2 ajustes de intervalos y 4 corridas del programa para cada uno de los ajustes.

Las primeras 4 corridas del modelo se generaron con los siguientes valores iniciales:

a_0: # aleatorio $\in R < 2$

b_0: # aleatorio $\in R\ [-5; 5]$

c_0: # aleatorio $\in R\ [\frac{b^2}{4a}; 100]$

k = 10000

Así mismo se establecieron los intervalos para las k iteraciones:

a_k: # aleatorio $\in R\ [\frac{b_{k-1}^2}{4c_{k-1}}; 2]$

b_k: # aleatorio $\in R\ [-2\sqrt{a_k c_{k-1}}\ ;\ 2\sqrt{a_k c_{k-1}}]$

c_k: # aleatorio $\in R\ [\frac{b_k^2}{4a_k}\ ; 100]$

Los resultados de las 4 corridas se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2 Resultados de iteraciones de la heurística valores iniciales

Valores	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Corrida 4
a_k	0.1057	0.1302	0.0488	0.0436
b_k	-5.4798	-5.9161	-3.4499	-3.1260
c_k	99.7044	97.1360	92.9070	89.6125
S	686.3660	1258.5500	100.7320	67.1372

Elaborado por: Autor

Se observa que los resultados son muy variados y el modelo no ofrece resultados confiables, por lo que se ajustan los intervalos en base a los resultados de la corrida 4 con residuo 67.1372 para las nuevas 4 corridas del programa.

Intervalos mejorados:

a_0: # aleatorio $\in R\ < 0.8$

b_0: # aleatorio $\in R\ [-3.5; 3.5]$

1. c_0: # aleatorio $\in R\ [\frac{b^2}{4a}; 90]$

k = 10000

Intervalos para los valores de las k iteraciones:

a_k: # aleatorio $\in R\ [\frac{b_{k-1}^2}{4c_{k-1}}; 0.8]$

b_k: # aleatorio $\in R\ [-2\sqrt{a_k c_{k-1}};\ 2\sqrt{a_k c_{k-1}}]$

c_k: # aleatorio $\in R\ [\frac{b_k^2}{4a_k}\ ; 90]$

Los resultados de las 4 corridas se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3 Resultados de iteraciones de la heurística primera modificación

Valores	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Corrida 4
a_k	0.0701	0.0462	0.0179	0.0171
b_k	-3.5569	-2.9970	-1.9316	-1.9683
c_k	80.1398	87.3200	78.6409	79.8621
S	722.0060	133.0310	65.1246	54.4266

Elaborado por: Autor

Se observa que los resultados son mejores y que el modelo se puede mejorar afinando los intervalos en base a los resultados de la corrida 4 con residuo 54.4266 para las nuevas 4 corridas del programa.

Intervalos ajustados para la corrida final:

a_0: # aleatorio $\in R\ < 0.5$

b_0: # aleatorio $\in R\ [-3; 3]$

c_0: # aleatorio $\in R\ [\frac{b^2}{4a}; 90]$

k = 10000

Intervalos para los valores de las k iteraciones:

a_k: # aleatorio $\in R\ [\frac{b_{k-1}^2}{4c_{k-1}}; 0.5]$

b_k: # aleatorio $\in R\ [-2\sqrt{a_k c_{k-1}}\ ;\ 2\sqrt{a_k c_{k-1}}]$

c_k: # aleatorio $\in R\ [\frac{b_k^2}{4a_k}\ ; 90]$

Los resultados de los coeficientes se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4 Resultados de iteraciones de la heurística valores finales

Valores	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Corrida 4
a_k	0.0428	0.0292	0.0234	0.0244
b_k	-3.0414	-2.6755	-2.2290	-2.3255
c_k	86.8070	87.5142	82.7180	83.9694
S	93.2022	79.2136	55.3899	51.1071

Elaborado por: Autor

Se puede observar que se mejoró la calidad de los resultados y la función cuadrática queda definida como $f(x) = 0.0244x^2 - 2.3255x + 83.9694$.

Se evalúan los valores de x en f(x) y se muestran en la Tabla 5.

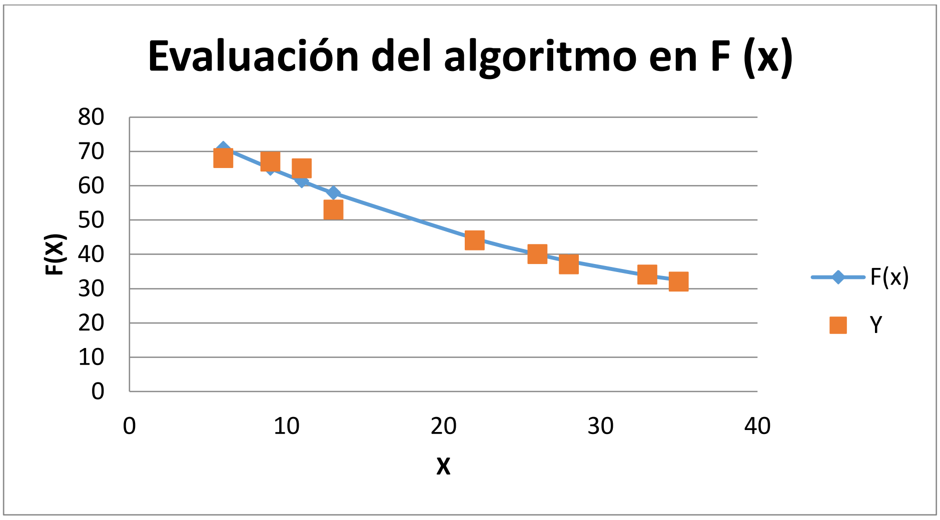
Tabla 5 Resultados de evaluación de f(x)

X	6	9	11	13	22	26	28	33	35
F(x)	70.90	65.02	61.35	57.87	44.64	40.03	38.02	33.85	32.52
Y	68	67	65	53	44	40	37	34	32

Elaborado por: Autor

El Gráfico 2 muestra los valores de y_i y la curva de la función obtenida por el método heurístico.

Gráfico 2 Función Cuadrática Calculada por la Heurística



Elaborado por: Autor

Encontrados los valores para la función cuadrática se procede a optimizar la función con el método de la búsqueda tabú.

Se definen los parámetros del algoritmo x_0 que es el valor de x al iniciar la primera iteración, el vecindario N(x), el número de iteraciones k y el tamaño de la lista tabú t.

Donde:

$X_0 = 28$

N(x) = [28; 70]

k = 1000

t = 5

Se generan 3 corridas para evaluar la calidad de los resultados, los cuales se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6 Resultados de la Búsqueda Tabú

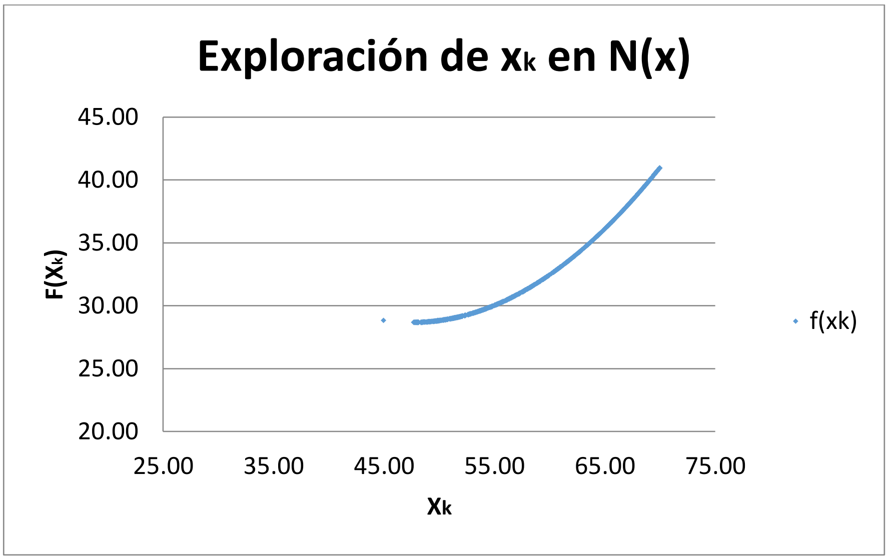
Valores	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3
x	49.7000	49.5300	47.6900
F(x)	28.7715	28.7541	28.6605

Elaborado por: Autor

Se observa que el algoritmo de la búsqueda tabú encuentra valores óptimos bastante cercanos en las 3 corridas del programa.

El Gráfico 3 muestra la exploración de N(x) para las 1000 iteraciones.

Gráfico 3 Explotación del vecindario N(x)



Elaborado por: Autor

La Tabla 7 muestra la lista tabú de las primeras 10 iteraciones.

Tabla 7 Valores de x de la Lista Tabú

Iteración	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	44.9700				
2	56.3000	44.9700			
3	59.9200	56.3000	44.9700		
4	47.6900	59.9200	56.3000	44.9700	
5	49.1200	47.6900	59.9200	56.3000	44.9700
6	56.4400	49.1200	47.6900	59.9200	56.3000
7	49.4900	56.4400	49.1200	47.6900	59.9200
8	59.4600	49.4900	56.4400	49.1200	47.6900
9	61.9300	59.4600	49.4900	56.4400	49.1200
10	63.6400	61.9300	59.4600	49.4900	56.4400

Elaborado por: Autor

La Tabla 8 muestra los valores de f(x) para las primeras 10 iteraciones.

Tabla 8 Valores de f(x) de la Lista Tabú

Iteración	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
1	28.8250				
2	30.5260	28.8250			
3	32.3910	30.5260	28.8250		
4	28.6605	32.3910	30.5260	28.8250	
5	28.7187	28.6605	32.3910	30.5260	28.8250
6	30.5856	28.7187	28.6605	32.3910	30.5260
7	28.7506	30.5856	28.7187	28.6605	32.3910
8	32.1156	28.7506	30.5856	28.7187	28.6605
9	33.7030	32.1156	28.7506	30.5856	28.7187
10	34.9742	33.7030	32.1156	28.7506	30.5856

Elaborado por: Autor

Se observa que el $X_{solcand}$ aparece en la iteración k = 4.

La Tabla 9 muestra los valores de x de las últimas 5 iteraciones.

Tabla 9 Valores de x de las iteraciones finales

Iteracion	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
996	63.8800	57.0400	61.5500	49.4300	58.2500
997	58.1100	63.8800	57.0400	61.5500	49.4300
998	60.5300	58.1100	63.8800	57.0400	61.5500
999	69.7600	60.5300	58.1100	63.8800	57.0400
1000	65.7200	69.7600	60.5300	58.1100	63.8800

Elaborado por: Autor

La tabla 10 muestra los valores de f(x) de las últimas 5 iteraciones.

Tabla 10 Valores de f(x) de las iteraciones finales

Iteracion	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
996	35.1639	30.8524	33.4389	28.7452	31.4507
997	31.3751	35.1639	30.8524	33.4389	28.7452
998	32.7664	31.3751	35.1639	30.8524	33.4389
999	40.6951	32.7664	31.3751	35.1639	30.8524
1000	36.7157	40.6951	32.7664	31.3751	35.1639

Elaborado por: Autor

El algoritmo de búsqueda tabú termina en la iteración 1000 con $f(x^*) = 31.3751$, después compara la mejor solución encontrada en la iteración k = 4 $f(x_4) = 28.6605$ con $f(x^*) = 31.3751$, dado que $f(x_4) < f(x^*)$ concluye que $f(x_4)$ es el óptimo de f(x), lo que quiere decir que cuando la deformación del acero es 47.69 mm^2, la dureza Brinell es 28.6505 $\frac{kg}{mm^2}$.

2.6 SOLUCIÓN DEL MÉTODO ANALÍTICO

El problema también se puede resolver por el método analítico, para esto se debe aplicar el método de la suma de mínimos cuadrados, luego derivar la ecuación para cada coeficiente a, b y c respectivamente, después se iguala cada ecuación al vector cero y se resuelve el sistema de 3 ecuaciones de 3 variables.

El desarrollo del método se describe a continuación:

Sea: $\varepsilon_i^2 = (\bar{y}_i - y_i)^2$

SMC = $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$

$\nabla S = (0{,}0{,}0)$

$\left(\frac{\partial S}{\partial a}, \frac{\partial S}{\partial b}, \frac{\partial S}{\partial c}\right) = (0{,}0{,}0)$

Donde SCM es la suma de los mínimos cuadrados del error del pronóstico.

Derivar S respecto a a e igualar a cero:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c)x_i^2 = 0$$

$$c\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + a\sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i$$

Derivar S respecto a b e igualar a cero:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c)x_i = 0$$

$$c\sum x_i + b\sum x_i^2 + a\sum x_i^3 = \sum x_i y_i$$

Derivar S respecto a c e igualar a cero:

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c) = 0$$

$$cn + b\sum x_i + a\sum x_i^2 = \sum y_i$$

Se obtienen las 3 ecuaciones de 3 variables que permitirán calcular los valores de a, b y c que minimicen la suma de los cuadrados de los errores del pronóstico.

$$c\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + a\sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i$$
$$c\sum x_i + b\sum x_i^2 + a\sum x_i^3 = \sum x_i y_i$$
$$cn + b\sum x_i + a\sum x_i^2 = \sum y_i$$

Los cálculos de los coeficientes para el sistema de ecuaciones se detallan en la Tabla 11.

Tabla 11 Cálculos de coeficientes

N	X	Y	X2	X3	X4	XY	X2Y
1	6	68	36	216	1296	408	2448
2	9	67	81	729	6561	603	5427
3	11	65	121	1331	14641	715	7865
4	13	53	169	2197	28561	689	8957
5	22	44	484	10648	234256	968	21296
6	26	40	676	17576	456976	1040	27040
7	28	37	784	21952	614656	1036	29008
8	33	34	1089	35937	1185921	1122	37026
9	35	32	1225	42875	1500625	1120	39200
TOTALES	**183**	**440**	**4665**	**133461**	**4043493**	**7701**	**178267**

Elaborado por: Autor

Se reemplazan los valores calculados en las ecuaciones

$$4665c + 133461b + 4043493a = 178267$$
$$183c + 4665b + 133461s = 7701$$
$$9c + 183b + 4665a = 440$$

El sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss – Jordan detallado en el Anexo 3, los valores de los coeficientes que se obtienen son:

a = 0.0245

b = -2.3223

c = 83.40

SMC = 49.12

La función quedaría expresada por $f(x) = 0.0245x^2 - 2.3223x + 83.40$.

La Tabla 12 muestra la evaluación de los valores de x en f(x) y los valores de y.

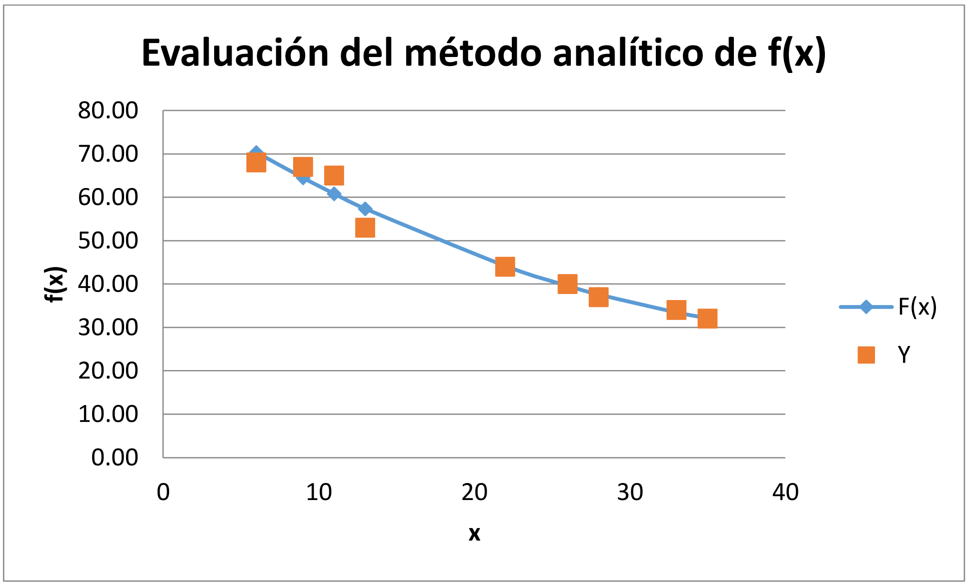
Tabla 12 Resultados de evaluar f(x) por método analítico

X	6	9	11	13	22	26	28	33	35
F(x)	70.35	64.49	60.82	57.35	44.18	39.59	37.60	33.47	32.16
Y	68	67	65	53	44	40	37	34	32

Elaborado por: Autor

El Gráfico 4 ilustra los resultados de x en f(x) calculada por el método analítico.

Gráfico 4 Función Cuadrática Calculada por el Método Analítico



Elaborado por: Autor

Finalmente para hallar el mínimo de la función cuadrática se debe calcular la primera derivada de f(x) e igualar a cero para hallar el valor de x donde f(x) es mínimo.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0.049x - 2.3223 \; = 0$$

$$0.049x = 2.3223$$

$$x = 47.3563$$

$$f(x) = 28.4118$$

2.7 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS

Para evaluar la calidad de la metaheurística se comparan los resultados obtenidos por ambos métodos desarrollados en la Tabla 13.

Tabla 13 Comparación de Resultados

Valores	Heurística	Método analítico
a	0.0244	0.0245
b	-2.3255	-2.3223
c	83.9694	83.4001
Residuo = SMC	51.1071	49.1212
x_{min}	47.6900	47.3563
$f(x_{min})$	28.6605	28.4118

Elaborado por: Autor

Se puede observar que los resultados de ambos métodos son bastante parecidos siendo el x_{min} del método heurístico 0.70% mayor al valor exacto y $f(x_{min})$ 0.88% mayor al valor exacto, sin embargo hay una diferencia del 4% entre los residuos de ambos modelos, lo cual en términos de inversión o gasto podría resultar oneroso.

CAPITULO III

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

3.1 CONCLUSIONES

Se diseñó e implementó una heurística capaz encontrar los coeficientes de una función de regresión no lineal.

Se diseñó e implementó una metaheurística basada en el procedimiento de búsqueda tabú que encontró una solución factible muy cercana al valor exacto calculado por el método analítico.

3.2 RECOMENDACIONES

En el diseño de procedimientos heurísticos se recomienda evaluar y comparar los resultados en varias corridas, ya que los modelos se pueden mejorar ajustando los parámetros para las nuevas corridas hasta hallar la mejor solución al problema.

Una metaheurística es capaz de hallar soluciones factibles muy cercanas al óptimo, sin embargo dependiendo de la complejidad, tamaño del problema y la calidad de solución que se requiere se recomienda antes evaluar otros métodos de solución.

BIBLIOGRAFÍA

[1] INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES de Hillier y Lieberman, 9na Edición, Mc. Graw Hill. México 2010, 563, 598.

[2] CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL de Ayres Frank, 2da Edición, Mc. Graw Hill. España 1989, 42, 49.

[3] ALGEBRA LINEAL de Stanley y Grossman, 6ta Edición, Mc. Graw Hill. China 2008, 7, 10.

ANEXOS

ANEXO 1. PROGRAMACIÓN DE LA HEURISTICA

```
(*Min: S(a,b,c)=∑_{i=1}^{n} (a x_i^2 + b x_i + c - y_i)^2 *)
Datos = {{6, 68}, {9, 67}, {11, 65}, {13, 53}, {22, 44}, {26, 40}, {28, 37}, {33, 34}, {35, 32}};
Prepend[Datos, {"X (Deformación en mm^2)", "Y Dureza Brinell en Kg/mm^2"}] // MatrixForm
n = Length[Datos];
It = 1;
Itermax = 10 000;
(*Discriminante <0; Δ=b^2-4 a c*)
a = RandomReal[0.5];
b = RandomReal[{-3, 3}];
c = RandomReal[{b^2/(4 a), 90}];
residuo = ∑_{i=1}^{n} (a Datos[[i, 1]]^2 + b Datos[[i, 1]] + c - Datos[[i, 2]])^2;
{a, "Valor inicial de a"}
{b, "Valor inicial de b"}
{c, "Valor inicial de c"}
{residuo, "Valor de residuo inicial"}
While[It ≤ Itermax,
  a1 = RandomReal[{b^2/(4 c), 0.5}];
  b1 = RandomReal[{-2 √(a1 c), 2 √(a1 c)}];
  c1 = RandomReal[{b1^2/(4 a1), 90}];
  residuonuevo = ∑_{i=1}^{n} (a1 Datos[[i, 1]]^2 + b1 Datos[[i, 1]] + c1 - Datos[[i, 2]])^2;
  If[residuonuevo < residuo, a = a1; b = b1; c = c1; residuo = residuonuevo, a; b; c; residuo];
  It++];
```

ANEXO 2. PROGRAMACION DE LA BÚSQUEDA TABÚ

```
(*Búsqueda Tabú*)
T = 5; (*Periodo de permanencia tabú expresado en cantidad de iteraciones sucesivas*)
ListaTabu = {}; (*Lista tabú*)
XSolIni = Datos[[7, 1]]; (*Toma un valor de la lista de datos*)
k = 1; (*Inicio de las iteraciones*)
kmax = 1000; (*Numero máximo de iteraciones*)
CotaMax = 70;
While[k ≤ kmax,
  XSolCand = If[RandomReal[{XSolIni, CotaMax}] > XSolIni, RandomReal[{XSolIni, CotaMax}, WorkingPrecision → 4]];
  (*Genera un valor mayor que el inicial*)
  If[f[XSolCand] < f[XSolIni],
   XSolIni = XSolCand (*Verdadero*),
   XSolIni (*Falso*)];
  If[Length[ListaTabu] < T, ListaTabu = Prepend[ListaTabu, {XSolCand, f[XSolCand]}],
   ListaTabu = Delete[ListaTabu, T]; ListaTabu = Prepend[ListaTabu, {XSolCand, f[XSolCand]}]];
  Print["Lista Tabu Iteración" k]; (*Mostrar encabezado lista tabu*)
  Print[ListaTabu]; (*Muestra la lista tabu en cada iteracón*)
  k++ (*Incrementa la iteración*)];
{{XSolIni, "Solucion de x BT"}, {f[XSolIni], "Evaluacion de f(x) con x = Solucion de x BT"}} (*Muestra el result
{Minimize[f[x], x], "Optimo con la funcion Minimize"}
```

ANEXO 3. SOLUCION CON EL METODO GAUSS – JORDAN

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4665 & 133461 & 4043493 & 178267 \\ 183 & 4665 & 133461 & 7701 \\ 9 & 183 & 4665 & 440 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow L1 \leftrightarrow L3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 9 & 183 & 4665 & 440 \\ 183 & 4665 & 133461 & 7701 \\ 4665 & 133461 & 4043493 & 178267 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow L1 \div 9 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 20.33 & 518.33 & 48.89 \\ 183 & 4665 & 133461 & 7701 \\ 4665 & 133461 & 4043493 & 178267 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \leftarrow -183 \times L1 + L2 \\ \leftarrow -4665 \times L1 + L2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 20.33 & 518.33 & 48.89 \\ 0 & 944.00 & 38606.00 & -1245.67 \\ 0 & 38606.00 & 1625468.00 & -49799.67 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \leftarrow L1 \div 944 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 20.33 & 518.33 & 48.89 \\ 0 & 1 & 40.90 & -1.32 \\ 0 & 38606.00 & 1625468.00 & -49799.67 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow -20.33 \times L2 + L1 \\ \\ \leftarrow -38606 \times L2 + L3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -313.22 & 75.72 \\ 0 & 1 & 40.90 & -1.32 \\ 0 & 0 & 46629.83 & 1143.35 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L3 \div 46629.83 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -313.22 & 75.7200 \\ 0 & 1 & 40.90 & -1.3196 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0245 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow 313.22 \times L3 + L1 \\ \leftarrow -40.90 \times L3 + L2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 83.4001 \\ 0 & 1 & 0 & -2.3223 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0245 \end{array}\right]$$