ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2018 - 2019	**PERIODO:** SEGUNDO TÉRMINO
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES	**PROFESORES:** Elvis Aponte Valladares, Jennifer Avilés Monroy, José Castro Carrasco, C. Mario Celleri Mujica, Antonio Chong Escobar, Liliana Rebeca Pérez, Hernando Sánchez Caicedo.
EVALUACIÓN: PRIMERA	**FECHA:** 19 NOVIEMBRE 2018

RESOLUCIÓN Y CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

Tema 1 (10 Puntos)

Complete las siguientes frases, para lo cual NO es necesario justificar sus respuestas.

A continuación se presentan las soluciones y ejemplos válidos.

a) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, entonces a_n está acotada de manera superior (ó tanto superior como inferior en el caso de ser una sucesión constante).

b) De acuerdo al criterio de la integral, si f es una función continua, positiva y decreciente en $[2,+\infty)$ y si $\forall k \in \mathbb{N}\ [a_k = f(k)]$ tal que a_1 es un valor finito, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si y sólo si $\int_2^{\infty} f(k)dk$ es convergente.

c) Uno de los valores de B para que la serie "p": $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, n^B}$ sea convergente es $B = 1$.

d) Si se conoce que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, se puede concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente.

e) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

f) La serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge de forma condicional puesto que:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ es una serie divergente, y

2) de acuerdo al criterio de las series alternantes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es una serie convergente.

g) El criterio de la suma acotada establece que: una serie infinita de términos no negativos converge si y sólo si su respectiva sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.

h) Para la ecuación diferencial $dy - (x^2 + y^2)dx = 0$, la isóclina que tiene los segmentos del respectivo campo direccional con pendiente igual a 1 está dada por la expresión $x^2 + y^2 = 1$.

i) Si $u(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$ es la solución de la ecuación diferencial exacta $A(x,y)dx + C(x,y)dy = 0$, entonces $u(x,y)$ debe satisfacer las condiciones: $\frac{\partial u}{\partial x} = A(x,y)$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = C(x,y)$.

j) Un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden escrita de forma canónica y cuyo factor integrante sea la función $h(x) = e^{2x}$ es $\frac{dy}{dx} + 2y = x$.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Completa correctamente cada literal sin necesidad de proporcionar justificación alguna.	1.0 P cada literal
TOTAL	**10.0 P**

Tema 2 (4 Puntos)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta.

Sea $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, entonces aplicando el criterio de comparación en el límite se puede concluir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f'(k^n)$ es divergente para $0 < n < 1$.

Desarrollo:

Al derivar $f(x)$ se obtiene: $f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Así, la serie a analizar es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^{2n}+1}}$.

Comparando en el límite con la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, la cual se conoce que es una serie p divergente para $n \le 1$ y por tanto para el intervalo $0 < n < 1$:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k^{2n}+1}}}{\frac{1}{k^n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k^{2n}}}{\sqrt{k^{2n}+1}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\left(\frac{k^{2n}+1}{k^{2n}}\right)^{-1}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^{2n}}\right)^{-1}} = 1$$

Dado que $L > 0$ y finito, entonces ambas series divergen juntas para el intervalo $0 < n < 1$.

Por consiguiente la proposición es VERDADERA.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Halla la derivada de $f(x)$ y obtiene la serie a analizar.	1.0 P
Selecciona una serie para realizar la comparación en el límite, argumentando acerca de su convergencia.	1.0 P
Obtiene el resultado de la comparación en el límite y concluye que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f'(k^n)$ diverge para $0 < n < 1$.	1.5 P
Concluye que la proposición es VERDADERA.	0.5 P
TOTAL	**4.0 P**

Tema 3 (10 Puntos)

Sea $f(x) = (1 + x)^k$ donde $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Determine la serie de Maclaurin de $f(x)$ y el radio de convergencia de esta serie.
b) A partir de la serie hallada obtenga el polinomio de Maclaurin de orden 2.
c) Usando la serie obtenida en el literal a para el caso de $k = 3$ determine, de ser posible, el valor de suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(2)\dots(4-n)(\,5^n)}{n!}$.

Desarrollo:

Literal a

La serie de Maclaurin de una función $f(x)$ está dada por: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$f^{(0)}(x) = (1 + x)^k \quad \rightarrow\ f^{(0)}(0) = 1$

$f^{(1)}(x) = k(1 + x)^{k-1} \quad \rightarrow\ f^{(1)}(0) = k$

$f^{(2)}(x) = k(k - 1)(1 + x)^{k-2} \quad \rightarrow\ f^{(2)}(0) = k(k - 1)$

$f^{(3)}(x) = k(k - 1)(k - 2)(1 + x)^{k-3} \quad \rightarrow\ f^{(3)}(0) = k(k - 1)(k - 2)$

Entonces:

$f^{(n)}(x) = k(k - 1)(k - 2)\dots\big(k - (n - 1)\big)(1 + x)^{k-n}\ ;\ n \in \mathbb{N}.$

$\rightarrow\ f^{(n)}(0) = k(k - 1)(k - 2)\dots(k - n + 1)\ ;\ n \in \mathbb{N}.$

Además, si $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > k$.

Por lo tanto, la serie de Maclaurin de $f(x)$ está dada por:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} x^n$ tal que:

si $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^{(n)}(0) = k(k - 1)(k - 2)\dots(k - n + 1) = 0$ para $n > k$.

Para obtener el intervalo de convergencia de la serie obtenida se puede hacer uso del criterio del cociente absoluto hallando el límite que sigue, donde $a_n = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n$ tal que x representa un número real diferente del centro de la serie (se conoce que una serie de potencias es convergente al evaluarla en su centro):

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(n+1)+1)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)(k-(n+1)+1)\,x}{(n+1)n!\,k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(k-(n+1)+1)\,x}{(n+1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(k-n)\,x}{(n+1)}\right| \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-n}{n+1}\right| \\ L &= |x| \end{aligned}$$

Entonces, el intervalo de convergencia está dado por: $L = |x| < 1 \ \equiv\ -1 < x < 1$ tal que la convergencia de los extremos $x = -1$ y $x = 1$ aún no se ha analizado. Sin embargo, se puede afirmar que el radio de convergencia es $R = 1$.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Deduce una expresión para la derivada n-ésima de $f(x)$ y la evalúa en cero. Además, indica que si $k \in \mathbb{N}$, entonces $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > k$.	3.0 P
Indica la expresión para la serie de Maclaurin de $f(x)$, desarrolla el primer término de esta serie, sustituye la expresión deducida para $f^{(n)}(0)$, e indica que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n > k$ en el caso de que $k \in \mathbb{N}$.	2.0 P
Determina el radio de convergencia de la serie de potencias obtenida.	2.0 P
TOTAL	**7.0 P**

Literal b

El polinomio de Maclaurin de orden 2 se obtiene al truncar la serie de Maclaurin del literal a, considerando sólo hasta el término que contiene x^2, esto es:

$$f(x) = P_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{2}\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n = 1 + \underbrace{\frac{k}{1!}x}_{n=1} + \underbrace{\frac{k(k-1)}{2!}x^2}_{n=2}$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Trunca la serie de Maclaurin del literal a y obtiene el polinomio de orden 2 solicitado.	1.0 P
TOTAL	**1.0 P**

Literal c

La serie obtenida en el literal a para el caso de $k = 3$ es:

$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(2)\dots(4-n)}{n!}x^n$ tal que: $f^{(n)}(0) = 3(2)\dots(4-n) = 0$ para $n > 3$.

Por lo tanto,
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(2)\dots(4-n)}{n!}x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{3}\frac{3(2)\dots(4-n)}{n!}x^n \\ &= 1 + \frac{3}{1!}x + \frac{3(2)}{2!}x^2 + \frac{3(2)(1)}{3!}x^3 \\ f(x) &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(2)\dots(4-n)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{3}\frac{3(2)\dots(4-n)}{n!}x^n = 3x + 3x^2 + x^3$, lo cual evaluado en $x = 5$ da como resultado el valor de suma pedido: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(2)\dots(4-n)}{n!}5^n = 3(5) + 3(5)^2 + (5)^3 = 215$.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Obtiene la serie de Maclaurin del literal a con $k = 3$ y determina el valor de suma de la serie numérica dada.	2.0 P
TOTAL	**2.0 P**

Tema 4 (8 Puntos)

Determine la solución del problema de valor inicial: $\frac{dy}{dx} = \frac{-7x+3y+7}{3x-7y-3}$; $y(1) = 2$.

<u>Desarrollo:</u>

La ecuación puede ser llevada a la forma: $(\underbrace{7}_{a_1} x \underbrace{-3}_{b_1} y \underbrace{-7}_{c_1})dx + (\underbrace{3}_{a_2} x \underbrace{-7}_{b_2} y \underbrace{-3}_{c_2})dy = 0$, esto es, una ecuación diferencial de coeficientes lineales, tal que $\neg(c_1 = 0 \wedge c_2 = 0) \wedge \left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right)$. Por lo tanto, para resolver la ecuación se aplica los cambios de variable: $\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$, donde h y k son constantes fijas que deben ser halladas a fin de que la ecuación se convierta en homogénea, como sigue:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-7(u+h)+3(v+k)+7}{3(u+h)-7(v+k)-3} \rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{-7u+3v+(-7h+3k+7)}{3u-7v+(3h-7k-3)} \rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{-7\frac{u}{v}+3+\frac{-7h+3k+7}{v}}{3\frac{u}{v}-7+\frac{3h-7k-3}{v}}$$

Así, h y k deben satisfacer: $\begin{cases} -7h+3k+7=0 \\ 3h-7k-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7h+3k=-7 \\ 3h-7k=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -21h+9k=-21 \\ 21h-49k=21 \end{cases}$.

Sumando las ecuaciones del sistema: $-40k = 0 \rightarrow k = 0$ y $h = 1$. Es decir, $x = u + 1$ y $y = v$.

La ecuación homogénea obtenida es: $\frac{dv}{du} = \frac{-7\frac{u}{v}+3}{3\frac{u}{v}-7}$, o también: $\frac{du}{dv} = \frac{3\frac{u}{v}-7}{-7\frac{u}{v}+3}$.

Aplicando el cambio de variable $w = \frac{u}{v}$ con lo cual $u = wv$ y así $\frac{du}{dv} = w + v\frac{dw}{dv}$, la ecuación homogénea se transforma en la siguiente ecuación separable:

$$w + v\frac{dw}{dv} = \frac{3w-7}{-7w+3}$$

Separando las variables se tiene: $v\frac{dw}{dv} = \frac{3w-7}{3-7w} - w \rightarrow v\frac{dw}{dv} = \frac{3w-7-3w+7w^2}{3-7w} \rightarrow \frac{3-7w}{7(w^2-1)}dw = \frac{1}{v}dv$

Integrando se tiene: $\frac{1}{7}\int \frac{3-7w}{w^2-1}dw = \int \frac{1}{v}dv$

Usando descomposición en fracciones parciales: $\frac{3-7w}{w^2-1} = \frac{A}{w-1} + \frac{B}{w+1} \rightarrow 3 - 7w = A(w+1) + B(w-1)$

$$3 - 7w = (A+B)w + (A-B)$$
$$A = -2 \quad ; \quad B = -5$$

Con los resultados de la descomposición se tiene:

$$\frac{1}{7}\int\left(\frac{-2}{w-1} + \frac{-5}{w+1}\right)dw = \int \frac{1}{v}dv$$

$$\frac{1}{7}(-2\,ln|w-1| - 5\,ln|w+1|) = ln|v| + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

Regresando a las variables originales $\left(w = \frac{u}{v} = \frac{x-1}{y}\right)$ se tiene:

$$\frac{1}{7}\left(-2\,ln\left|\frac{x-1}{y} - 1\right| - 5\,ln\left|\frac{x-1}{y} + 1\right|\right) = ln|y| + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo la condición inicial $y(1) = 2$ se tiene:

$$\frac{1}{7}(-2\,ln(1) - 5\,ln(1)) = ln(2) + c \ \rightarrow\ c = -ln(2)$$

Entonces el problema de valor inicial es:

$$\frac{1}{7}\left(-2\,ln\left|\frac{x-1}{y} - 1\right| - 5\,ln\left|\frac{x-1}{y} + 1\right|\right) = ln|y| - ln(2)$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Aplica doble cambio de variable para transformar la ecuación diferencial en una ecuación diferencial homogénea y halla las constantes (h y k) asociadas a estos cambios.	3.0 P
Transforma la ecuación diferencial homogénea obtenida en una ecuación diferencial separable y la resuelve.	3.0 P
Obtiene la familia mono-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial en términos de las variables originales.	1.0 P
Determina la solución del problema de valor inicial, hallando el valor de la constante de integración.	1.0 P
TOTAL	**8.0 P**

Tema 5 (10 Puntos)

Un estudiante que es portador del virus de influenza, ingresa a la ciudadela universitaria a la que él pertenece y que tiene 2000 alumnos en total. Si se asume que la velocidad con la que se propaga el virus es directamente proporcional tanto al número de estudiantes contagiados como al número de estudiantes sanos y se conoce que al cuarto día el número de estudiantes contagiados es de 50, entonces determine una expresión para la cantidad de enfermos en cualquier tiempo t. Considere que durante el proceso de propagación de la enfermedad los 2000 alumnos se encuentran en la ciudadela universitaria y que ninguno de ellos sale de la misma.

Desarrollo:

Sea $N(t)$: Número de estudiantes enfermos a los t días. (“enfermos” se refiere a contagiados)
Total de estudiantes incluido el portador del virus: 2000
$2000 - N(t)$: Número de estudiantes sanos a los t días.

Modelo matemático que se asume, considerando las condiciones descritas:

$$\frac{dN}{dt} = kN(2000 - N) \ ; \ N(0) = 1 \ ; \ N(4) = 50.$$

Resolviendo la ecuación diferencial, la cual se puede resolver como separable:

$$\int \frac{dN}{N(2000-N)} = \int kdt$$

Usando descomposición en fracciones parciales: $\frac{1}{N(2000-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{2000-N} \rightarrow 1 = A(2000 - N) + BN$

$\rightarrow \ 1 = (B - A)N + 2000A \ \rightarrow \ A = \frac{1}{2000} \ ; \ B = \frac{1}{2000}$

Entonces se tiene: $\int \left(\frac{1}{2000N} + \frac{1}{2000(2000-N)}\right) dN = kt + c \ , \ c \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2000} ln|N| - \frac{1}{2000} ln|2000 - N| = kt + c$$

Dado que $N > 0$ y considerando que $N < 2000$:

$$\frac{1}{2000} ln(N) - \frac{1}{2000} ln(2000 - N) = kt + c$$

$$ln\left(\frac{N}{2000-N}\right) = 2000kt + \underbrace{2000c}_{c_1} \ ; \ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{N}{2000-N} = e^{2000kt+c_1} \ ; \ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{N}{2000-N} = c_2 \, e^{2000kt} \ ; \ c_2 \in \mathbb{R}^+$$

Sustituyendo la condición inicial $N(0) = 1$: $\frac{1}{2000-1} = c_2 \rightarrow c_2 = \frac{1}{1999}$

Entonces se tiene la solución: $\frac{N}{2000-N} = \frac{1}{1999} \, e^{2000kt}$

Sustituyendo la condición adicional $N(4) = 50$:

$$\frac{50}{2000-50} = \frac{1}{1999} \, e^{8000k} \rightarrow \frac{1999}{39} = e^{8000k} \rightarrow ln\left(\frac{1999}{39}\right) = 8000k \rightarrow k = \frac{1}{8000} ln\left(\frac{1999}{39}\right)$$

Entonces se tiene la solución: $\frac{N}{2000-N} = \frac{1}{1999} \, e^{\frac{t}{4} ln\left(\frac{1999}{39}\right)} \rightarrow \frac{N}{2000-N} = \frac{1}{1999} \left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}}$

Llevando la solución del problema de valor inicial a una forma explícita para $N(t)$ se obtiene:

$$N = \frac{2000-N}{1999} \left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}} \rightarrow N = \frac{2000}{1999} \left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}} - \frac{N}{1999} \left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}} \rightarrow N\left[1 + \frac{1}{1999} \left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}}\right] = \frac{2000}{1999} \left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}}$$

Entonces la cantidad de enfermos a los t días está dada por: $N(t) = \dfrac{\frac{2000}{1999}\left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}}}{1+\frac{1}{1999}\left(\frac{1999}{39}\right)^{\frac{t}{4}}}$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	PUNTAJE
Define la incógnita del problema así como el modelo matemático del problema considerando las condiciones descritas.	5.0 P
Resuelve la ecuación diferencial del problema y halla tanto la constante de integración como la constante de proporcionalidad.	4.0 P
Determina una forma explícita para la cantidad de enfermos a los t días.	1.0 P
TOTAL	**10.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)

Tema 6 (8 Puntos)

Si $y_1 = \frac{1}{x}$ es una solución de la ecuación diferencial ordinaria: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, deduzca una segunda solución y_2 linealmente independiente a y_1 a partir de la suposición $y_2 = v(x)y_1$. Para esto, primero deduzca la función $v(x)$ resolviendo una ecuación diferencial de 2do orden. Finalmente, determine la solución general de la ecuación diferencial dada.

Desarrollo:

La ecuación diferencial escrita de forma canónica es: $y'' + \underbrace{\frac{3}{x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{q(x)} y = 0.$

Sea $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ una 2da solución de la ecuación diferencial linealmente independiente a y_1, tal que $v(x)$ es una función por hallar, se tiene que:

$$y_2{}'(x) = vy_1{}' + y_1v' \quad \rightarrow \quad y_2''(x) = vy_1'' + y_1'v' + y_1v'' + v'y_1'$$

Sustituyendo $y_2(x)$, $y_2'(x)$ y $y_2''(x)$ en la ecuación diferencial se tiene:

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$
$$vy_1'' + y_1'v' + y_1v'' + v'y_1' + p(x)(vy_1' + y_1\, v') + q(x)vy_1 = 0$$
$$v\underbrace{[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1]}_{=0:\ dado\ que\ y_1\ es\ solución} + v'[2y_1' + p(x)y_1] + y_1v'' = 0$$

$v'[2y_1' + p(x)y_1] + y_1v'' = 0$: EDO de 2do orden en la que la variable v está ausente.

Se reduce el orden de la ecuación con los cambios de variable $v' = w$ y $v'' = w'$ como sigue:

$$w[2y_1' + p(x)y_1] + y_1\frac{dw}{dx} = 0$$
$$y_1\frac{dw}{dx} = -w[2y_1' + p(x)y_1]$$
$$\int\frac{dw}{w} = -\int\frac{2y_1' + p(x)\, y_1}{y_1}dx$$
$$\ln(w) = -2\, ln(y_1) - \int p(x)dx$$
$$w = e^{ln(y_1)^{-2} - \int p(x)dx}$$
$$w(x) = \left(y_1(x)\right)^{-2}e^{-\int p(x)dx}$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}$$
$$\int dv = \int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}dx$$
$$v(x) = \int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}dx$$

Entonces una 2da solución de la ecuación diferencial linealmente independiente a y_1 es igual a:

$$y_2(x) = y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}dx = \frac{1}{x}\int\frac{e^{-\int\frac{3}{x}dx}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \frac{1}{x}\int x^2\, e^{-3\, ln(x)}\, dx = \frac{1}{x}\int x^{-1}dx = \frac{1}{x}ln(x).$$

Así, la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\ ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{1}{x}ln(x)\ ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
A partir de la suposición para $y_2(x)$ obtiene la expresión para $y_2{}'(x)$ y para $y_2''(x)$. Opcionalmente se puede trabajar en términos de $y_1(x)$ o de su respetiva expresión $\frac{1}{x}$.	2.0 P
Sustituye $y_2(x)$, $y_2{}'(x)$ y $y_2''(x)$ en la ecuación diferencial y obtiene una ecuación de 2do orden en la que la variable v está ausente. Opcionalmente se puede trabajar en términos de $p(x)$ y de $y_1(x)$ o de sus respectivas expresiones: $\frac{3}{x}$ y $\frac{1}{x}$.	2.0 P
Resuelve la ecuación diferencial obtenida, esto es, halla la función $v(x)$. Para esto, realiza cambios de variable adecuados para reducir el orden de la ecuación a orden uno.	2.0 P
Obtiene $y_2(x)$ multiplicando $v(x)$ por $y_1(x)$.	1.0 P
Determina la solución general de la ecuación diferencial dada.	1.0 P
TOTAL	**8.0 P**