



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Año: 2023	Período: PAO1
Materia: CÁLCULO VECTORIAL	Profesores: Mario Céleri, Nelson Córdova, Carlos Martín, María Nela Pastuizaca, Ebner Pineda, Pedro Ramos, Soraya Solís
Evaluación: Tercera	Fecha: 11 de septiembre del 2023

**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, ..... al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que no puedo usar calculadoras, celulares u otros dispositivos electrónicos, que sí puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que no debo hacer ruidos molestos durante el mismo; y, cualquier objeto que hubiere traído que sea de mi propiedad, debo depositarlo en el lugar autorizado. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.  
*Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.*

Firma

NÚMERO DE MATRÍCULA: ..... PARALELO: .....

- (15 p.) Considere la superficie  $S : x^2 + y^2 - 3z^2 = 1$  y sea  $\pi$  el plano que es tangente a  $S$  en el punto  $(3, -2, 2)$ .
  - Obtenga la ecuación general de  $\pi$ .
  - Suponga que  $L$  es la recta que contiene los puntos  $A(1, 0, -1)$  y  $B(-1, 1, 0)$ . Determine si  $L$  es perpendicular a  $\pi$ .

---

2. (20 p.) Sea  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1 & , x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ .

- a) Determine si  $f$  es continua en  $(0, 0)$  empleando el criterio de continuidad.
- b) Calcule  $f_x$  y  $f_y$  en  $(0, 0)$ .
- c) Concluya sobre la diferenciabilidad de  $f$  en  $(0, 0)$  usando alguno de los resultados obtenidos en los literales a) o b).

- 
3. (15 p.) Sean  $f, g$  funciones de variable real de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}$ . Sea  $z = f(u) + g(v)$ , siendo  $u = xy$ ,  $v = 2x - y$ . Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4u + v^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 8 \frac{d^2 g}{dv^2}.$$

- 
4. (15 p.) Una empresa que transporta gasolina necesita diseñar un nuevo tipo de contenedor en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada. El volumen de cada contenedor debe ser de  $288m^3$  debido a una restricción de los camiones. Además, el costo de fabricar cinco de las seis caras del contenedor es de 3 dólares por cada  $m^2$ . La base del contenedor debe ser de un material diferente, por lo que cada  $m^2$  cuesta 5 dólares. Empleando el método de Lagrange, determine las dimensiones del contenedor que minimizan su costo de fabricación.

---

5. (15 p.) Considere la región plana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 3 \leq y \leq -x^2 + 5\}$$

y sea  $f$  una función continua en  $D$ .

a) Dibuje y sombree  $D$ , especificando ejes coordenados y vértices.

b) Plantear  $\int_D \int f(x, y) dA$  en el orden  $dx dy$ .

- 
6. (20 p.) Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$  un campo vectorial definido en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $S$  la superficie del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z = 9 - x^2 - y^2$  y  $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$ . Empleando el teorema de la divergencia de Gauss, determine el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $S$  orientado hacia el exterior de  $Q$ .