

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                    |  |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| <b>AÑO:</b>        | 2021                    | <b>PERÍODO:</b>    | II PAO   |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESORES:</b> | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                 | <b>FECHA:</b>      | 07/febrero/2022  |

**Tema # 1**

1. (10 PUNTOS)

Se cobra  $C$  dólares al facturar y enviar a domicilio  $x$  libras de un producto. Si la cantidad no llega a 20 libras, se cobra \$1.80 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 30 libras, se cobra \$1.10 por cada libra más un recargo de \$15 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función  $C$  es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.80x, & 0 \leq x < 20 \\ mx + b, & 20 \leq x < 30 \\ 1.10x + 15, & x \geq 30 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes  $m$  y  $b$  en el segundo tramo de la función  $C$ , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que  $C$  siempre sea continua.

2. (10 PUNTOS)

Se cobra  $C$  dólares al facturar y enviar a domicilio  $x$  libras de un producto. Si la cantidad no llega a 20 libras, se cobra \$1.70 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 30 libras, se cobra \$1.10 por cada libra más un recargo de \$15 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función  $C$  es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.70x, & 0 \leq x < 20 \\ mx + b, & 20 \leq x < 30 \\ 1.10x + 15, & x \geq 30 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes  $m$  y  $b$  en el segundo tramo de la función  $C$ , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que  $C$  siempre sea continua.

3. (10 PUNTOS)

Se cobra  $C$  dólares al facturar y enviar a domicilio  $x$  libras de un producto. Si la cantidad no llega a 30 libras, se cobra \$2.10 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 40 libras, se cobra \$1.30 por cada libra más un recargo de \$25 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función  $C$  es:

$$C(x) = \begin{cases} 2.10x, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b, & 30 \leq x < 40 \\ 1.30x + 25, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes  $m$  y  $b$  en el segundo tramo de la función  $C$ , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que  $C$  siempre sea continua.

4. (10 PUNTOS)

Se cobra  $C$  dólares al facturar y enviar a domicilio  $x$  libras de un producto. Si la cantidad no llega a 30 libras, se cobra \$1.90 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 40 libras, se cobra \$1.05 por cada libra más un recargo de \$30 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función  $C$  es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.90x, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b, & 30 \leq x < 40 \\ 1.05x + 30, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes  $m$  y  $b$  en el segundo tramo de la función  $C$ , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que  $C$  siempre sea continua.

5. (10 PUNTOS)

Se cobra  $C$  dólares al facturar y enviar a domicilio  $x$  libras de un producto. Si la cantidad no llega a 20 libras, se cobra \$2.20 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 40 libras, se cobra \$1.05 por cada libra más un recargo de \$34 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función  $C$  es:

$$C(x) = \begin{cases} 2.20x, & 0 \leq x < 20 \\ mx + b, & 20 \leq x < 40 \\ 1.05x + 34, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes  $m$  y  $b$  en el segundo tramo de la función  $C$ , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que  $C$  siempre sea continua.

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

|                    |                         |                    |  |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| <b>AÑO:</b>        | 2021                    | <b>PERÍODO:</b>    | II PAO   |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESORES:</b> | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                 | <b>FECHA:</b>      | 07/febrero/2022  |

**Tema # 2**

6. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = x^2 + 5x + 2 ; x \leq -\frac{5}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa  $f^{-1}$  en el punto cuya abscisa es  $-2$ .

7. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = -x^2 - 3x - 2 ; x \leq -\frac{3}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa  $f^{-1}$  en el punto cuya abscisa es  $-2$ .

8. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = x^2 + x - 3 ; x \leq -\frac{1}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa  $f^{-1}$  en el punto cuya abscisa es  $-1$ .

9. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 5 ; x \leq -2$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa  $f^{-1}$  en el punto cuya abscisa es  $-5$ .

10. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = x^2 - 7x + 3 ; x \leq \frac{7}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa  $f^{-1}$  en el punto cuya abscisa es  $-3$ .

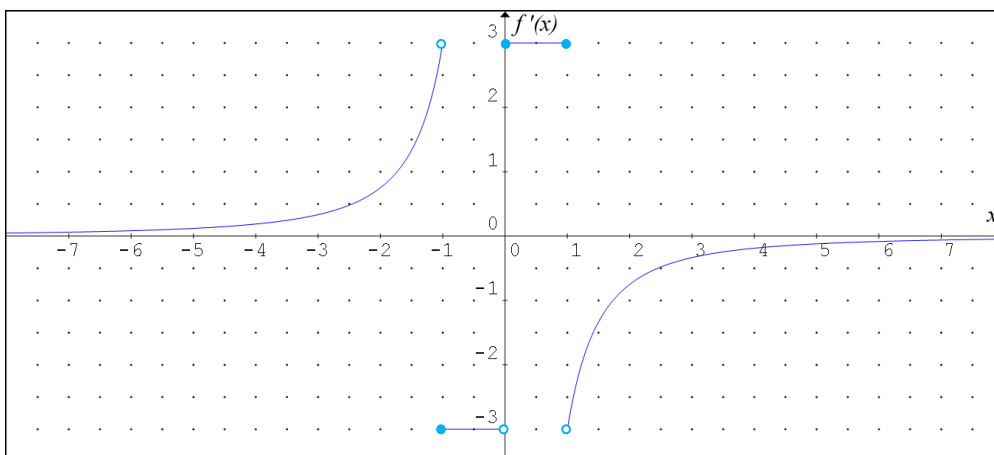
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                    |  |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| <b>AÑO:</b>        | 2021                    | <b>PERÍODO:</b>    | II PAO   |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESORES:</b> | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                 | <b>FECHA:</b>      | 07/febrero/2022  |

**Tema # 3**

11. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada  $f'$ :



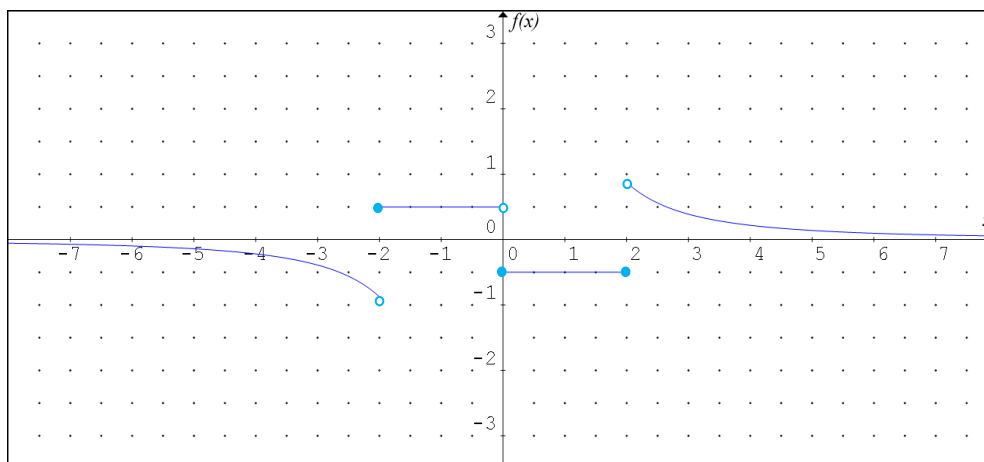
Considere que la función  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

- (a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$
- (b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x > N \Rightarrow |f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon]$
- (c)  $\forall x \in [0, 1]$ , la gráfica de  $f$  tiene un comportamiento lineal tal que  $\int_0^1 f(x) dx = 2$ .
- (d)  $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función  $f$  que cumpla con lo especificado.

12. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada  $f'$ :



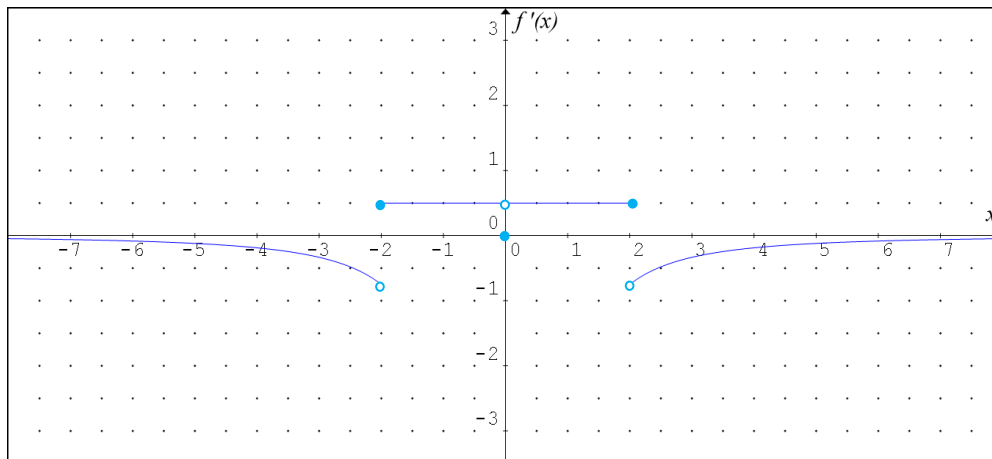
Considere que la función  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

- (a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon]$
- (b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x > N \Rightarrow |f(x) - \frac{5}{2}| < \varepsilon]$
- (c)  $\forall x \in [0, 2]$ , la gráfica de  $f$  tiene un comportamiento lineal tal que  $\int_0^2 f(x) dx = 3$ .
- (d)  $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función  $f$  que cumpla con lo especificado.

13. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada  $f'$ :



Considere que la función  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y cumple con las siguientes condiciones:

(a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x < -N \Rightarrow |f(x) + \frac{1}{2}| < \varepsilon]$

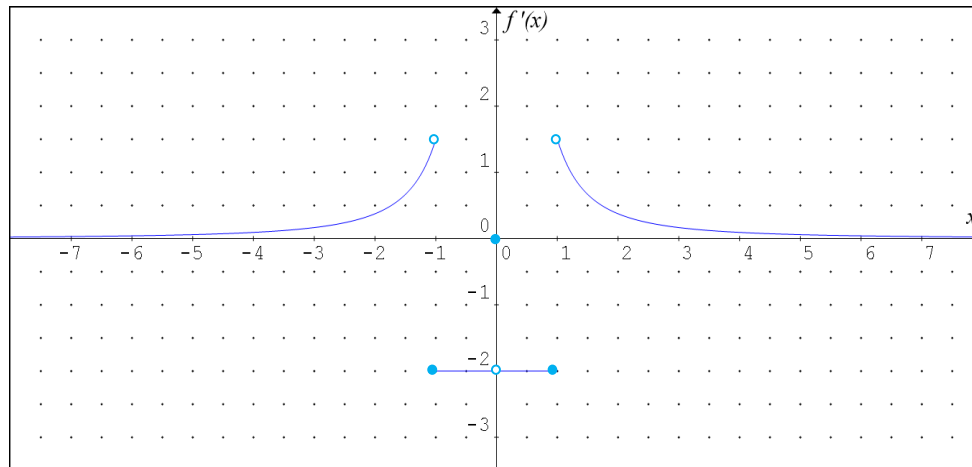
(c)  $\forall x \in [0, 2]$ , la gráfica de  $f$  tiene un comportamiento lineal tal que  $\int_0^2 f(x) dx = 3$ .

(d)  $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función  $f$  que cumpla con lo especificado.

14. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada  $f'$ :



Considere que la función  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y cumple con las siguientes condiciones:

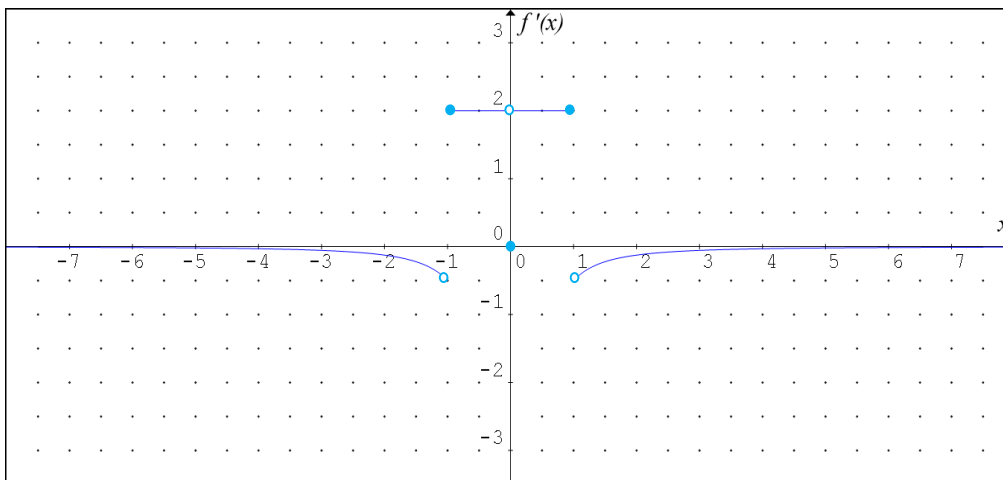
- (a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$
- (b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x < -N \Rightarrow |f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon]$
- (c)  $\forall x \in [0, 1]$ , la gráfica de  $f$  tiene un comportamiento lineal tal que  $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2$ .
- (d)  $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función  $f$  que cumpla con lo especificado.



15. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada  $f'$ :



Considere que la función  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y cumple con las siguientes condiciones:

(a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon]$

(b)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x < -N \Rightarrow |f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon]$

(c)  $\forall x \in [-1, 0]$ , la gráfica de  $f$  tiene un comportamiento lineal tal que  $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2$ .

(d)  $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función  $f$  que cumpla con lo especificado.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                    |  |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| <b>AÑO:</b>        | 2021                    | <b>PERÍODO:</b>    | II PAO   |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESORES:</b> | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                 | <b>FECHA:</b>      | 07/febrero/2022  |

**Tema # 4**

16. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{\operatorname{sen}(x) - x}$$

17. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x \ln(\operatorname{sen}(t)) dt}{(2x - \pi)^3}$$

18. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\arctan(t)]^2 dt}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}$$

19. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\arctan(t) - t) dt}{x^4}$$

20. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (2\operatorname{sen}^2(t) + 4t \operatorname{sen}(2t) + 2t^2 \operatorname{cos}(2t)) dt}{2x - \operatorname{sen}(2x)}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                    |  |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| <b>AÑO:</b>        | 2021                    | <b>PERÍODO:</b>    | II PAO   |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESORES:</b> | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                 | <b>FECHA:</b>      | 07/febrero/2022  |

**Tema # 5**

21. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

*“Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y además  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , entonces  $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ .”*

22. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

*“Si  $f$  no es una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , entonces  $f$  no es integrable en el intervalo  $[a, b]$ .”*

23. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

$$\int_1^{n+1} \llbracket x \rrbracket dx = \frac{n(n+1)}{2} ; n \in \mathbb{N}$$

24. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

*“Si  $\int_a^b f(x)dx = c$ , entonces  $\int_a^b (b^3 f(x) - 3cx^2)dx = a^3 c$ .”*

25. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

*“Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y además  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , entonces  $f(x) = 0$ .”*

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                    |  |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| <b>AÑO:</b>        | 2021                    | <b>PERÍODO:</b>    | II PAO   |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESORES:</b> | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                 | <b>FECHA:</b>      | 07/febrero/2022  |

**Tema # 6**

26. (16 PUNTOS)

Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x} ; x \in [1, 4]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de  $f$  considerando el dominio especificado.

27. (16 PUNTOS)

Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} ; x \in [-3, -1]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de  $f$  considerando el dominio especificado.

28. (16 PUNTOS)

Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x} ; x \in [1, 4]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de  $f$  considerando el dominio especificado.

29. (16 PUNTOS)

Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} ; x \in [4, 9]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de  $f$  considerando el dominio especificado.

30. (16 PUNTOS)

Dada la función  $f$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x} ; x \in [1, 5]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de  $f$  considerando el dominio especificado.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

|                    |                         |                    |  |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| <b>AÑO:</b>        | 2021                    | <b>PERÍODO:</b>    | II PAO   |
| <b>MATERIA:</b>    | Cálculo de una variable | <b>PROFESORES:</b> | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| <b>EVALUACIÓN:</b> | TERCERA                 | <b>FECHA:</b>      | 07/febrero/2022  |

**Tema # 7**

31. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ \ln(|x|), & (-e \leq x < -1) \vee (1 < x \leq e) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de  $f$  en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje  $X$  y las rectas  $x = e$ ,  $x = -e$ ; y finalmente, calcule su área.

32. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{\pi} \arctan(|x|), & |x| \leq 1 \\ 3 - |x|, & (-3 \leq x < -1) \vee (1 < x \leq 3) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de  $f$  en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje  $X$ ; y finalmente, calcule su área.

33. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{\pi} \arcsen(|x|), & |x| \leq \frac{1}{2} \\ |x| + \frac{1}{2}, & \left(-2 \leq x < -\frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2} < x \leq 2\right) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de  $f$  en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje  $X$  y las rectas  $x = 2$ ,  $x = -2$ ; y finalmente, calcule su área.

34. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - |3x|, & |x| \leq 1 \\ \log_2(|x|), & (-4 \leq x < -1) \vee (1 < x \leq 4) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de  $f$  en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje  $X$  y las rectas  $x = 4$ ,  $x = -4$ ; y finalmente, calcule su área.

35. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \left| \frac{x}{2} \right|, & |x| \leq 2 \\ 2 + \log_{\frac{1}{2}}(|x|), & (-4 \leq x < -2) \vee (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de  $f$  en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje  $X$ ; y finalmente, calcule su área.