Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2023	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Segunda	Fecha:	29 de enero de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________ Número de matrícula: ________________ Paralelo: ________

1. (7 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to P_2$ una transformación lineal con regla de correspondencia:

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}(x) = (2a - b - c) + (a + 3b - c)x + (3a - 5b - c)x^2$$

Encuentre una base y determine la dimensión del núcleo de T y de la imagen de T.

2. Sea $T: P_2 \to W$ una transformación lineal donde $W = \text{gen}\left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}\right\}$, con $s > 0$, y para todo $p(x) \in P_2$:

$$T\,p(x) = \mathscr{L}\left\{p(x)\right\},$$

donde $\mathscr{L}$ es el operador transformada de Laplace.

(a) (4 puntos) Encuentre la representación matricial de T usando la base $B_1 = \{2, 1-t, t-t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ y la base $B_2 = \{\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}\}$ de W.

(b) (4 puntos) Usando la matriz del literal anterior, encuentra $\mathscr{L}\{1-t-2t^2\}$.

3. (10 puntos) Encuentre la solución general de $2y'' - 7y' + 3y = t^2 - 4\cos t$.

4. (10 puntos) Usando valores y vectores propios, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

5. (a) (4 puntos) Use la definición de transformada de Laplace para verificar que si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$. entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \text{ para } s > a + \alpha.$$

(b) (3 puntos) Sea A una matriz cuadrada de cualquier tamaño. Verifique que si v es un vector propio de A que está asociado al valor propio λ, entonces para todo número natural n, v es un vector propio de A^n asociado al valor propio λ^n. *Sugerencia*: Use inducción matemática.

6. (8 puntos) Use transformadas de Laplace para resolver el PVI

$$y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$