

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| AÑO: | 2021 | PERÍODO: | II PAO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESORES: | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 07/febrero/2022 |

Tema # 1

1. (10 PUNTOS)

Se cobra C dólares al facturar y enviar a domicilio x libras de un producto. Si la cantidad no llega a 20 libras, se cobra \$1.80 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 30 libras, se cobra \$1.10 por cada libra más un recargo de \$15 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.80x, & 0 \leq x < 20 \\ mx + b, & 20 \leq x < 30 \\ 1.10x + 15, & x \geq 30 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

2. (10 PUNTOS)

Se cobra C dólares al facturar y enviar a domicilio x libras de un producto. Si la cantidad no llega a 20 libras, se cobra \$1.70 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 30 libras, se cobra \$1.10 por cada libra más un recargo de \$15 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.70x, & 0 \leq x < 20 \\ mx + b, & 20 \leq x < 30 \\ 1.10x + 15, & x \geq 30 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

3. (10 PUNTOS)

Se cobra C dólares al facturar y enviar a domicilio x libras de un producto. Si la cantidad no llega a 30 libras, se cobra \$2.10 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 40 libras, se cobra \$1.30 por cada libra más un recargo de \$25 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 2.10x, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b, & 30 \leq x < 40 \\ 1.30x + 25, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

4. (10 PUNTOS)

Se cobra C dólares al facturar y enviar a domicilio x libras de un producto. Si la cantidad no llega a 30 libras, se cobra \$1.90 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 40 libras, se cobra \$1.05 por cada libra más un recargo de \$30 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 1.90x, & 0 \leq x < 30 \\ mx + b, & 30 \leq x < 40 \\ 1.05x + 30, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

5. (10 PUNTOS)

Se cobra C dólares al facturar y enviar a domicilio x libras de un producto. Si la cantidad no llega a 20 libras, se cobra \$2.20 por cada libra sin recargo por el envío a domicilio. A partir de las 40 libras, se cobra \$1.05 por cada libra más un recargo de \$34 por el envío a domicilio. La regla de correspondencia que define la función C es:

$$C(x) = \begin{cases} 2.20x, & 0 \leq x < 20 \\ mx + b, & 20 \leq x < 40 \\ 1.05x + 34, & x \geq 40 \end{cases}$$

Especifique lo que representan las constantes m y b en el segundo tramo de la función C , y, con base en la definición de continuidad en un punto, calcule sus valores (con sus respectivas unidades) para los que C siempre sea continua.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| AÑO: | 2021 | PERÍODO: | II PAO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESORES: | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 07/febrero/2022 |

Tema # 2

6. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = x^2 + 5x + 2 ; x \leq -\frac{5}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -2 .

7. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = -x^2 - 3x - 2 ; x \leq -\frac{3}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -2 .

8. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = x^2 + x - 3 ; x \leq -\frac{1}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -1 .

9. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 5 ; x \leq -2$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -5 .

10. (14 PUNTOS)

Dada la función de variable real biyectiva:

$$f(x) = x^2 - 7x + 3 ; x \leq \frac{7}{2}$$

Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a su función inversa f^{-1} en el punto cuya abscisa es -3 .

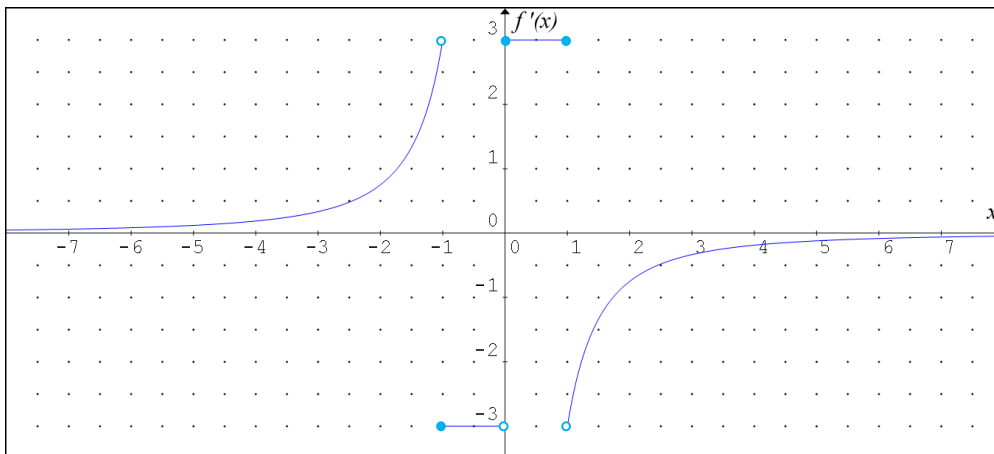
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| AÑO: | 2021 | PERÍODO: | II PAO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESORES: | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 07/febrero/2022 |

Tema # 3

11. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f' :



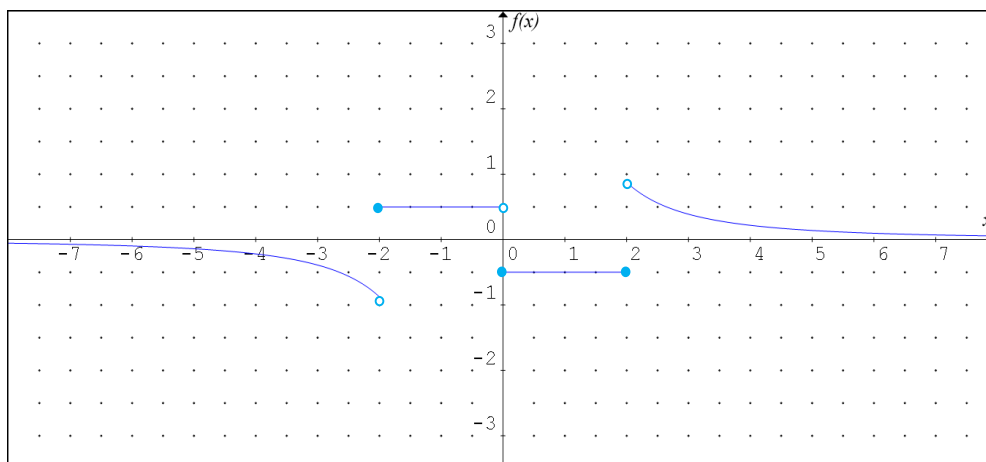
Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

- (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x > N \Rightarrow |f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon]$
- (c) $\forall x \in [0, 1]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_0^1 f(x) dx = 2$.
- (d) $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

12. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f' :



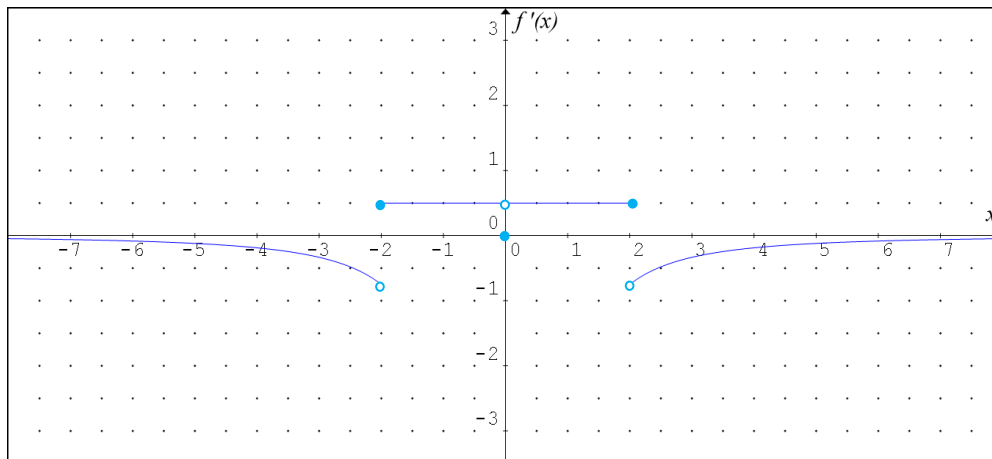
Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en todo su dominio y cumple con las siguientes condiciones:

- (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon]$
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x > N \Rightarrow |f(x) - \frac{5}{2}| < \varepsilon]$
- (c) $\forall x \in [0, 2]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_0^2 f(x) dx = 3$.
- (d) $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

13. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f' :



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x < -N \Rightarrow |f(x) + \frac{1}{2}| < \varepsilon]$

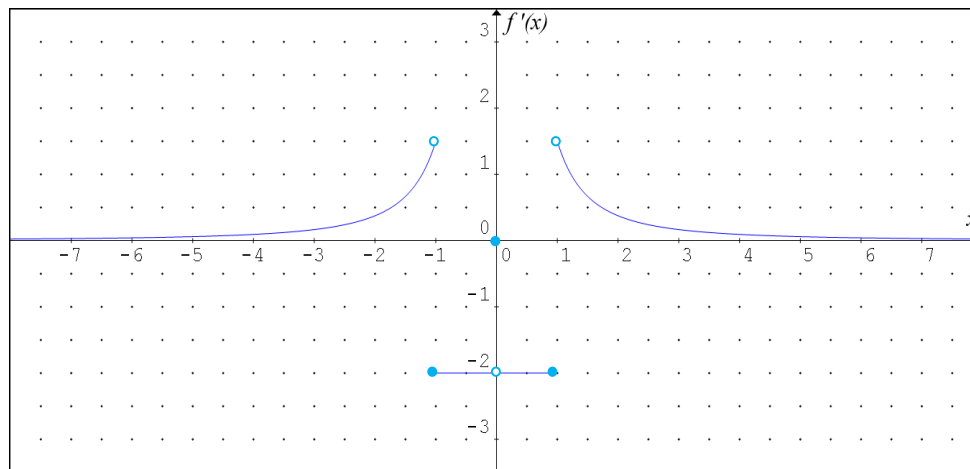
(c) $\forall x \in [0, 2]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_0^2 f(x) dx = 3$.

(d) $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

14. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f' :



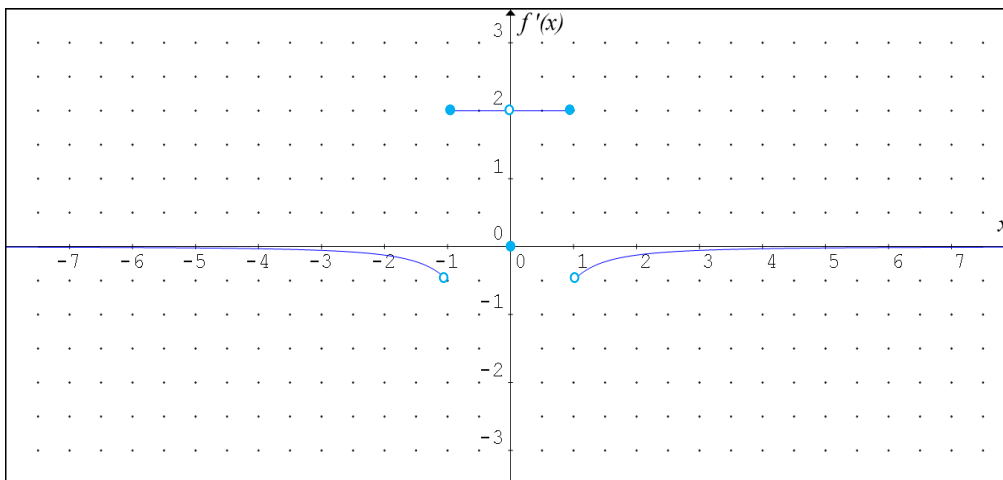
Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

- (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x < -N \Rightarrow |f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon]$
- (c) $\forall x \in [0, 1]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2$.
- (d) $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

15. (16 PUNTOS)

Dada la gráfica de la función derivada f' :



Considere que la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y cumple con las siguientes condiciones:

(a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f [0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon]$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall x \in \text{dom } f [x < -N \Rightarrow |f(x) - \frac{3}{2}| < \varepsilon]$

(c) $\forall x \in [-1, 0]$, la gráfica de f tiene un comportamiento lineal tal que $\int_{-1}^0 f(x) dx = 2$.

(d) $\forall x \in \text{dom } f, f(-x) = -f(x)$

Bosqueje en el plano cartesiano la gráfica de la función f que cumpla con lo especificado.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| AÑO: | 2021 | PERÍODO: | II PAO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESORES: | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 07/febrero/2022 |

Tema # 4

16. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{\operatorname{sen}(x) - x}$$

17. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x \ln(\operatorname{sen}(t)) dt}{(2x - \pi)^3}$$

18. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [\arctan(t)]^2 dt}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}$$

19. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\arctan(t) - t) dt}{x^4}$$

20. (16 PUNTOS)

De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (2\operatorname{sen}^2(t) + 4t \operatorname{sen}(2t) + 2t^2 \cos(2t)) dt}{2x - \operatorname{sen}(2x)}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| AÑO: | 2021 | PERÍODO: | II PAO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESORES: | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 07/febrero/2022 |

Tema # 5

21. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

“Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $\int_a^b f^2(x)dx = 0$.”

22. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

“Si f no es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f no es integrable en el intervalo $[a, b]$.”

23. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

$$\int_1^{n+1} \llbracket x \rrbracket dx = \frac{n(n+1)}{2} ; n \in \mathbb{N}$$

24. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

“Si $\int_a^b f(x)dx = c$, entonces $\int_a^b (b^3 f(x) - 3cx^2)dx = a^3 c$.”

25. (10 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

“Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y además $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $f(x) = 0$.”

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| AÑO: | 2021 | PERÍODO: | II PAO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESORES: | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 07/febrero/2022 |

Tema # 6

26. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x} ; x \in [1, 4]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

27. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} ; x \in [-3, -1]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

28. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x} ; x \in [1, 4]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

29. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} ; x \in [4, 9]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

30. (16 PUNTOS)

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x} ; x \in [1, 5]$$

Calcule el VALOR PROMEDIO de f considerando el dominio especificado.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

| | | | |
|--------------------|-------------------------|--------------------|--|
| AÑO: | 2021 | PERÍODO: | II PAO |
| MATERIA: | Cálculo de una variable | PROFESORES: | Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C. |
| EVALUACIÓN: | TERCERA | FECHA: | 07/febrero/2022 |

Tema # 7

31. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ \ln(|x|), & (-e \leq x < -1) \vee (1 < x \leq e) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x = e$, $x = -e$; y finalmente, calcule su área.

32. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{\pi} \arctan(|x|), & |x| \leq 1 \\ 3 - |x|, & (-3 \leq x < -1) \vee (1 < x \leq 3) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje X ; y finalmente, calcule su área.

33. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{\pi} \arcsen(|x|), & |x| \leq \frac{1}{2} \\ |x| + \frac{1}{2}, & \left(-2 \leq x < -\frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2} < x \leq 2\right) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x = 2$, $x = -2$; y finalmente, calcule su área.

34. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - |3x|, & |x| \leq 1 \\ \log_2(|x|), & (-4 \leq x < -1) \vee (1 < x \leq 4) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica, el eje X y las rectas $x = 4$, $x = -4$; y finalmente, calcule su área.

35. (18 PUNTOS)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \left| \frac{x}{2} \right|, & |x| \leq 2 \\ 2 + \log_{\frac{1}{2}}(|x|), & (-4 \leq x < -2) \vee (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

En forma analítica verifique la simetría de la función, luego bosqueje la gráfica de f en el plano cartesiano, identifique la región acotada por dicha gráfica y el eje X ; y finalmente, calcule su área.