ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

RUBRICA

TEMA 1 *(20 puntos)***:**

La magnitud de temblores registrados en una región de América del Sur puede modelarse como si tuviera una distribución exponencial con media 2.4, según se mide en la escala de Richter.

a) Encuentre la probabilidad de que un temblor que ocurra en esta región a sea mayor que 5.0 en la escala de Richter.

b) De los siguientes diez temblores que afecten esta región, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea mayor que 5.0 en la escala de Richter?

FÓRMULAS REQUERIDAS

Densidad de la Variable Aleatoria Exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} & ; x > 0 \\ 0; & resto\ de\ x \end{cases}$$

Distribución de Variable Aleatoria Binomial

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x};\ para\ todo\ x \in S;\ S = \{0,1,2,\ldots,n\}$$

SOLUCIÓN:

X = *Magnitud de los temblores en una región de América del Sur.*

X es una variable aleatoria Exponencial con β=2,4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{2,4}}}{2,4} & ; x > 0 \\ 0; & resto\ de\ x \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2,4}} & ; x > 0 \\ 0; & resto\ de\ x \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que un temblor que ocurra en esta región a sea mayor que 5.0 en la escala de Richter.

$$P(X > 5) = \int_5^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2,4}}}{2,4} dx = 0,1245$$

ó

$$P(X > 5) = 1 - P(X < 5)$$

$$P(X > 5) = 1 - F(5) = 1 - [1 - e^{-\frac{5}{2,4}}]$$

$$P(X > 5) = e^{-2,083} = 0,1245$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Plantea la Densidad o la Distribución Acumulada de la Variable Aleatoria Exponencial $\beta = 2,4$.	Plantea correctamente el cálculo de la probabilidad como $P(X > 5)$.	Calcula correctamente el valor de la probabilidad usando la Densidad o la Distribución Acumulada de la Variable Aleatoria Exponencial $\beta = 2,4$.
Puntos (10 PUNTOS)	0%	10% - 20%	30% - 40%	50% - 100%

b) De los siguientes diez temblores que afecten esta región, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea mayor que 5.0 en la escala de Richter?

Suceso: *La magnitud del temblor es mayor que 5.0 en la escala de Richter.*

P (Suceso)=p= 0,1245

Variable Aleatoria Binomial, n=10, p=0,1245

$$P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0{,}1245^{x}(1 - 0{,}1245)^{10-x};\ para\ todo\ x \in S;\ S = \{0,1,2,...,10\}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - \binom{10}{0} 0,1245^{0}(1 - 0,1245)^{10-0}}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - 0,2645}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 0,7354}$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Identifica la Variable Aleatoria Binomial con $n = 10$ y $p = 0,1245$.	Plantea correctamente el cálculo de la probabilidad requerida como $P(X \geq 1)$.	Calcula correctamente el valor de la $P(X \geq 1)$.
Puntos (10 PUNTOS)	0%	10% - 20%	30% - 40%	50% - 100%

TEMA 2 *(25 puntos)***:**

Un sistema importante funciona como apoyo de un vehículo en el programa espacial. Un solo componente crucial funciona únicamente 85% del tiempo. Para reforzar la confiabilidad del sistema, se decidió que se instalarán 3 componentes paralelos, de manera que el sistema falle sólo si todos fallan. Suponga que los componentes actúan de forma independiente y que son equivalentes en el sentido de que los 3 tienen una tasa de éxito del 85%. Considere la variable aleatoria X como el número de componentes de cada tres que fallan.

a) Escriba una función de probabilidad para la variable aleatoria X
b) Determine el número medio de componentes de cada tres que fallan
c) Determine el segundo momento central para la variable aleatoria X
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema completo sea exitoso?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que falle el sistema?

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = \binom{3}{x} 0.15^{x}(0.85)^{3-x};\ para\ todo\ \ x \in S;\ S = \{0,1,2,3\}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**
$f(x)$	**0.614125**	**0.325125**	**0.057375**	**0.003375**

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No identifica la función de probabilidad de la variable aleatoria X	Identifica la función de probabilidad pero no determina correctamente los parámetros de la función	Identifica la función de probabilidad con sus parámetros pero no calcula correctamente las probabilidades	Escribe correctamente la función de probabilidad y calcula correctamente las probabilidades
Puntos (9)	0	10% - 20%	30% - 40%	50% - 100%

b)

$$E(X) = \sum_{x} x\,f(x) = 0(0.61) + 1(0.33) + 2(0.06) + 3(0.003) = 0.45$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Escribe la fórmula del Valor esperado correctamente pero no realiza el cálculo	Escribe la fórmula del Valor esperado correctamente pero el cálculo es incorrecto	Calcula correctamente $E(X)$
Puntos (4 PUNTOS)	0	10% - 20%	30% - 40%	50% - 100%

c) $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = 0^2(0.61) + 1^2(0.33) + 2^2(0.06) + 3^2(0.003) = 0.585$

Por lo que

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 0.585 - 0.45^2 = 0.3825$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Escribe la fórmula de la Varianza correctamente pero no realiza el cálculo	Escribe la fórmula de la Varianza correctamente pero el cálculo es incorrecto	Calcula correctamente $Var(X)$
Puntos (4)	0	10% - 20%	30% - 40%	50% - 100%

d) $P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - 0.003375 = 0.996625$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Calcula la probabilidad incorrectamente usando la distribución binomial	Describe correctamente como realizar el cálculo, pero el resultado es incorrecto	Calcula correctamente la probabilidad de que el sistema completo sea exitoso
Puntos (4PUNTOS)	0	10% - 20%	30% - 40%	50% - 100%

e) $P(X = 3) = 0.003375$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Calcula la probabilidad incorrectamente usando la distribución binomial	Describe correctamente como realizar el cálculo, pero el resultado es incorrecto	Calcula correctamente la probabilidad de que falle el sistema

Puntos (4 PUNTOS)	0	10% - 20%	30% - 40%	50% - 100%

TEMA 3 *(20 puntos)*:

En una enlatadora de productos alimenticios hay 3 líneas de ensamblaje: 1, 2 y 3; las que representan respectivamente el 37%, 42% y 21% de la producción de latas respectivamente. Si el 6% de las latas de las líneas del ensamblaje 1 son selladas inadecuadamente, mientras que el porcentaje de las líneas de ensamblaje 2 y 3 es 0.4% y 1.2% en ese orden. Determinar:

a) La probabilidad, si se tomara una lata de la producción, que está sellada adecuadamente.

b) Que proceda de la línea de ensamblaje 2 dado que sabemos que esta sellada adecuadamente.

c) Que proceda de la línea de ensamblaje 3, dado que sabemos que esta sellada inadecuadamente.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|E_i)P(E_i)$$

$$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + P(A|E_3)P(E_3)$$

a) P(A)= 0.37*0.94 +0.42*0.996+0.21*0.988 = 0.957

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Identifica que se debe resolver con probabilidad total	Aplica todos los valores correctamente en la probabilidad total pero no obtiene el resultado correcto.	Aplica probabilidad total y realiza el cálculo correctamente.
Puntos (10)	0%	50%	50% – 80%	100%

b)

Aplicando Teorema de Bayes

$$P(E_1|A) = \frac{P(A|E_1)P(E_1)}{P(A)}$$

$$P(E_1|A) = \frac{0.42*0.996}{0.957} = \frac{0.41}{0.957} = 0.4284$$

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Identifica que se debe resolver con Bayes	Aplica todos los valores correctamente según teorema de Bayes pero no obtiene el resultado correcto.	Aplica teorema de Bayes y realiza el cálculo correctamente.
Puntos (5)	0%	50%	50% – 80%	100%

c) $P(E_1|A) = \frac{0.21*0.012}{(0.37*0.06)+(0.42*0.004)+(0.21*0.012)} = \frac{0.0025}{0.0261} = 0.0957$

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente

Criterios	No realiza cálculo alguno.	Identifica que se debe resolver con Bayes	Aplica todos los valores correctamente según teorema de Bayes pero no obtiene el resultado correcto.	Aplica teorema de Bayes y realiza el cálculo correctamente.
Puntos (5)	0%	50%	50% – 80%	100%

TEMA 4 *(20 puntos)*:

Sea X una variable aleatoria normal con media 10 y varianza σ2 desconocida.

a) Determine σ, si $P(X \geq 7)=0.90$

b) Determine el valor de k tal que $P(X \leq k)= 4P(X>K)$

<u>Solución :</u> a) $P(X \geq 7) = 0,90 \Rightarrow P(Z \geq \frac{7-10}{\sigma}) = 0,90. \Rightarrow P(Z < -\frac{3}{\sigma}) = 0,10$

Según tabla 2.3 $\Rightarrow -\frac{3}{\sigma} = -1.282 \Rightarrow \sigma = \frac{3}{1,282} \Rightarrow \sigma = 2,34$

b) $P(X \leq k) = 4\,P(X>k) \Rightarrow P(X \leq k) = 4\,[1- P(X \leq k)] \Rightarrow P(X \leq k) = 4 - 4P(X \leq k)]$

$\Rightarrow P(X \leq k) + 4P(X \leq k)] = 4 \Rightarrow 5\,P(X \leq k) = 4 \Rightarrow P(X \leq k) = \frac{4}{5} = 0,80 \Rightarrow$

$P(Z \leq \frac{k-10}{2,34}) = 0,80 \Rightarrow$ Según tabla 2.3: $\frac{k-10}{2,34} = 0,842 \Rightarrow k = 11,97$

a)

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno	Plantea correctamente la ecuación	Determina correctamente el percentil	Calcula correctamente sigma
Puntos (10)	0	20%	60%	100%

b) 10 puntos

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno	Plantea el cálculo de la probabilidad	Determina correctamente el percentil	Calcula correctamente k
Puntos (10)	0	60%	80%	100%

TEMA 5 *(15 puntos)*:

Una empresa ha realizado un test físico entre sus empleados para comprobar la capacidad de esfuerzo que posee cada uno de ellos. Una de las medidas que componen el mismo es el número de pulsaciones después de una determinada actividad física, que está altamente relacionada con las que se realizan a lo largo de una jornada laboral. Los datos conseguidos han sido distribuidos en una tabla de frecuencias. La tabla resultante es la que se presenta:

Número de pulsaciones	Número de empleados
70 - 75	3
75 - 80	3
80 - 85	7
85 - 90	10
90 – 95	12
95 - 100	8

a) Construya una tabla de frecuencias completa (marcas de clase, frecuencias relativas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas acumuladas)
b) Determine la media aritmética, la varianza y la desviación estándar, del número de pulsaciones, e interprete cada uno de sus resultados.
c) Por medio de un método gráfico, determine de manera aproximada, el porcentaje de empleados que tuvieron menos de 83 pulsaciones.

SOLUCIÓN:

a)

# de pulsaciones	# de empleados	Marca de clase	Frec. relativa	Frec. Abs. Acum.	Frec. Rel. Acum.
70 - 75	3	**72.5**	**0.070**	**3**	**0.070**
75 - 80	3	**77.5**	**0.070**	**6**	**0.140**
80 - 85	7	**82.5**	**0.163**	**13**	**0.302**
85 - 90	10	**87.5**	**0.233**	**23**	**0.535**
90 – 95	12	**92.5**	**0.279**	**35**	**0.814**
95 - 100	8	**97.5**	**0.186**	**43**	**1.000**

b)

Usando las siguientes expresiones matemáticas, para la media aritmética, varianza y desviación estándar, respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i * m_i}{n} = \frac{(3 * 72.5) + (3 * 77.5) + \cdots + (8 * 97.5)}{43} = \mathbf{88.198}$$

Este valor indica la esperanza matemática (promedio) del número de pulsaciones de un empleado, después de una determinada actividad física.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(m_i - \bar{x})^2 * f_i}{n}$$
$$= \frac{(72.5 - 88.198)^2 * 3 + (77.5 - 88.198)^2 * 3 + \cdots + (97.5 - 88.198)^2 * 8}{43}$$
$$= \mathbf{51.838}$$

Esta es una medida de variabilidad, la cual, viene en unidades cuadráticas, por tal razón es necesario obtener su raíz cuadrada, para así trabajar con las unidades originales.

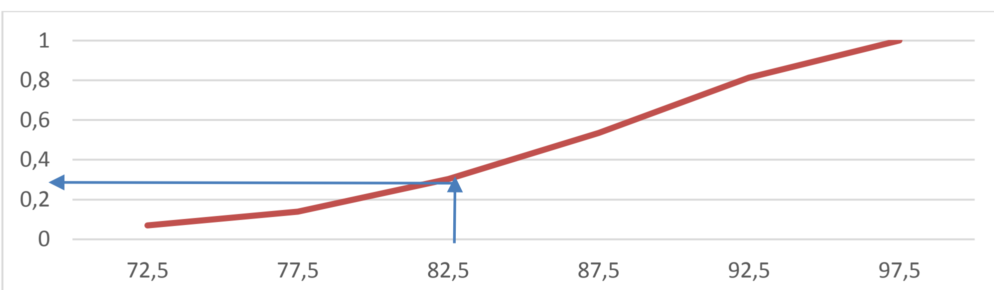
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(c_i - \bar{x})^2 * n_i}{n}} = \sqrt{51.838} = \mathbf{7.199}$$

Dado este valor de la desviación estándar, se interpreta en términos de la Regla Empírica, por ejemplo, tal que aproximadamente el 68% de este grupo de empleados, tiene un número de pulsaciones, después de una actividad física, de la media aritmética más menor una desviación estándar, con dos desviaciones estándar, aglomera aproximadamente un 95%, mientras que con tres desviaciones estándar aglomera aproximadamente 99.7%.

c)

Como método gráfico, se hará uso de la Ojiva:

Estamos hablando de que el porcentaje de empleados, que tuvieron menos de 83 pulsaciones, es aproximadamente **23.721%**



RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**

Criterios	No construye la tabla de frecuencias, no realiza cálculo alguno, ni estima el valor correspondiente.	Construye parcialmente la tabla de frecuencias, calcula correctamente de manera parcial, las medidas estadísticas solicitadas e intenta estimar el valor correspondiente.	Construye correctamente la tabla de frecuencias, calcula correctamente las medidas estadísticas solicitadas e intenta estimar correctamente el valor correspondiente.	Construye correctamente la tabla de frecuencias, calcula correctamente las medidas estadísticas solicitadas, intenta estimar correctamente el valor correspondiente y realiza un análisis de cada uno de los resultados obtenidos.
Puntos	0	30%	80%	100%