

AÑO: 2022

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: **Tercera**

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **PRIMER TERMINO**

PROFESORES: Laveglia Franca, Martínez Margarita, Ramirez John, Sánchez Joffre, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

FECHA: 15 de septiembre de 2022

### COMPROMISO DE HONOR

Yo, ..... al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.**

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: \_\_\_\_\_

NÚMERO DE MATRÍCULA: \_\_\_\_\_

PARALELO: \_\_\_\_\_

1. (24 Puntos)

Califique justificadamente el grado de verdad de las siguientes proposiciones

(S=siempre verdadera, A=a veces verdadera, N=nunca verdadera)

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . sean

$\beta_1$  y  $\beta_2$  dos bases para  $V$

- Para todo par de vectores  $v, w \in V$ ,  $w \neq 0_V$ :  $\|\text{proy}_w^v\| \leq \|v\|$
- Si  $H$  es un subespacio de  $V$ , entonces  $(H \cap H^\perp)$  no es un subespacio de  $V$ .
- Una matriz cuadrada  $A$  con nulidad igual a 1 puede ser una matriz cambio de base de  $\beta_1$  a  $\beta_2$

2. (16 Puntos)

Un joyero tiene dos barras de aleación de oro: una es de 12 quilates y la otra de 18 (el oro de 24 quilates es oro puro, el de 12 quilates corresponde a  $12/24$  de pureza, el de 18 a  $18/24$  de pureza y así sucesivamente). ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?

3. (15 Puntos)

Sean  $V = \mathbb{R}^3$ , con las operaciones convencionales,  $H = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  y  $W = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Determine:

- $H \cap W^\perp$ .
- Una base ortonormal para  $W^\perp$ .
- ¿Es  $H \cup (H + W)$  un subespacio de  $V$ ?

4. (25 Puntos)

Sea  $T$  un operador lineal sobre  $S_{2 \times 2}$ , el espacio vectorial de las matrices simétricas  $2 \times 2$ .

$$\text{Definido por: } T \left( \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2b + 2c & -a - 3b - 2c \\ -a - 3b - 2c & a + 2b + c \end{bmatrix}$$

Determine, en caso de ser posible, una base de  $S_{2 \times 2}$  con respecto a la cual la matriz asociada a  $T$  sea una matriz diagonal.

5. (20 Puntos)

Demuestre que si  $T$  es un isomorfismo de  $V$  a  $W$  y  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  entonces  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  es base de  $W$ .