FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2022	**PERÍODO:**	II PAO	**MATERIA:**	Cálculo de una variable
PROFESORES:	Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., García A., García E., Hernández C., Laveglia F., Mejía M., Ramos M., Ronquillo C., Toledo X.				
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	21/noviembre/2022		

1. (5 PUNTOS) De ser posible, calcule:

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1)sen\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Solución:

El TEOREMA DEL EMPARADEDADO indica lo siguiente:

"Sean f, g y h funciones que satisfacen $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
para toda x cercana a c, excepto posiblemente en c.
Si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \to c} g(x) = L$. "

En este caso, la función trigonométrica $seno$ es acotada para todo elemento x diferente de 1:

$$\left|sen\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \leq 1$$

$$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$$

Se multiplica los términos de la expresión por el factor $(x-1)$. Dado que $x \to 1^+$, se trata de una expresión positiva que no altera el sentido de la desigualdad:

$$-(x-1) \leq (x-1)sen\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq (x-1)$$

Se calculan los límites de las funciones presentes en los extremos de la desigualdad:

$$\left(\lim_{x \to 1^+} -(x-1) = 0\right) \quad \wedge \quad \left(\lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0\right)$$

Puesto que ambos límites son iguales y la función, de la cual se desea calcular el límite, está acotada entre las dos funciones en los extremos de la inecuación, se puede aplicar el TEOREMA DEL EMPAREDADO:

$$\boxed{\therefore \lim_{x \to 1^+} (x-1)sen\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0}$$

2. La temperatura T del café recién hecho es de 130 °F y se conoce que dicha temperatura a través del tiempo t, medido en $minutos$, puede ser modelizada con la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{T(t) = Ae^{-0.044t} + 72 \quad ; \quad t \geq 0}$$

(a) (1 PUNTO) Determine el valor de la constante A. Especifique la regla de correspondencia para la temperatura T, considerando el valor calculado.
(b) (4 PUNTOS) Después que ha transcurrido mucho tiempo, mediante el cálculo de un límite, calcule la temperatura final T_f a la cual se enfría el café. Explique lo que representa la recta $T = T_f$ para la gráfica de la función T.

Solución:

Cuando se especifica la condición del café recién hecho, se considera que $t = 0$:

$$T(0) = Ae^{-0.044(0)} + 72 = A + 72$$

Se conoce que dicha temperatura inicial es de 130 °F, entonces:

$$A + 72 = 130$$

$$\boxed{\therefore A = 58}$$

La regla de correspondencia para la temperatura T en función del tiempo t sería:

$$T(t) = 58e^{-0.044t} + 72 \quad ; \quad t \geq 0$$

Si ha transcurrido mucho tiempo, se considera que $t \to +\infty$. Por lo que, se calcula el valor asociado a T_f mediante el siguiente límite:

$$T_f = \lim_{t \to +\infty} (58e^{-0.044t} + 72)$$

Se aplica el TEOREMA PRINCIPAL y el TEOREMA DE SUSTITUCIÓN:

$$T_f = \underbrace{\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{58}{e^{0.044t}}\right)}_{0} + \lim_{t \to +\infty} (72)$$

$$\boxed{\therefore T_f = 72 \text{ °F}}$$

Dado que $T_f = \lim\limits_{t \to +\infty} T(t)$, la recta $T = 72$ °F representa la asíntota horizontal de la gráfica de la función T.

3. (6 PUNTOS) Dada la función de variable real f tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3} \quad ; \quad x \neq 3}$$

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$, ¿cómo debe ser definida en $x = 3$?

Solución:

Nótese que:

$$f(3) = \frac{(3)^3 - 2(3)^2 - 2(3) - 3}{(3)^3 - 4(3)^2 + 4(3) - 3} = \frac{27 - 18 - 6 - 3}{27 - 36 + 12 - 3} = \frac{0}{0}$$

Como se tiene esta indeterminación, la función no está definida en $x = 3$.

Se aplica división sintética, cuando $x = 3$, a cada función polinomial:

$$\begin{array}{c|cccc} \boxed{3} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \boxed{3} & 1 & -4 & 4 & -3 \\ & & 3 & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1) \qquad x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = (x - 3)(x^2 - x + 1)$$

Para que f sea continua en $x = 3$, debe cumplirse que:

$$f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$$

$$f(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x - 3)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x - 3)}(x^2 - x + 1)}$$

$$f(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{(3)^2 + 3 + 1}{(3)^2 - 3 + 1} = \frac{9 + 3 + 1}{9 - 3 + 1}$$

$$\boxed{\therefore f(3) = \frac{13}{7}}$$

La función redefinida quedaría así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}, & x \neq 3 \\ \dfrac{13}{7}, & x = 3 \end{cases}$$

4. Para cada función, obtenga la expresión simplificada correspondiente a:

$$\frac{dy}{dx}$$

(a) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{y = \frac{3^{4x}}{cos(4x)}}$

Se aplica la REGLA DE DERIVACIÓN PARA UNA DIVISIÓN DE FUNCIONES, REGLAS DE DERIVACIÓN ELEMENTALES y la REGLA DE LA CADENA:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos(4x) \cdot \frac{d(3^{4x})}{dx} - 3^{4x} \cdot \frac{d\left(cos(4x)\right)}{dx}}{cos^2(4x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos(4x) \cdot (3^{4x} ln(3) \cdot 4) - 3^{4x} \cdot (-sen(4x) \cdot 4)}{cos^2(4x)}$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4(3^{4x})\left(ln(3)cos(4x) + sen(4x)\right)}{cos^2(4x)}}$$

(b) (3 PUNTOS) $\boldsymbol{y = x^{sec(x)}}$

Se aplica la FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL a ambos términos de la expresión y una PROPIEDAD LOGARÍTMICA:

$$ln(y) = ln\left(x^{sec(x)}\right)$$

$$ln(y) = sec(x) \cdot ln(x)$$

Se aplica DERIVACIÓN IMPLÍCITA, la REGLA DE DERIVACIÓN PARA UN PRODUCTO DE FUNCIONES y REGLAS DE DERIVACIÓN ELEMENTALES:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(sec(x)\right)}{dx} \cdot ln(x) + sec(x) \cdot \frac{d\left(ln(x)\right)}{dx}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = sec(x)tan(x) \cdot ln(x) + sec(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot sec(x)\left(tan(x)ln(x) + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = x^{sec(x)} sec(x)\left(tan(x)ln(x) + \frac{1}{x}\right)}$$

5. (6 PUNTOS) Determine la ecuación de la recta tangente en el punto P_0 a la curva:

$$\frac{9}{4}x-(x+y)^2+\arctan(2y)=\frac{\pi}{4} \qquad ; \qquad P_0\left(1,\frac{1}{2}\right)$$

Solución:

Se aplica DERIVACIÓN IMPLÍCITA y la REGLA DE LA CADENA:

$$\frac{9}{4}-2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\frac{1}{1+(2y)^2}\left(2\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\frac{9}{4}-2(x+y)-2(x+y)\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1+4y^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$2\left(\frac{1}{1+4y^2}-(x+y)\right)\frac{dy}{dx}=2(x+y)-\frac{9}{4}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(x+y)-\frac{9}{4}}{2\left(\frac{1}{1+4y^2}-(x+y)\right)}$$

Se calcula la pendiente m_T de la recta tangente:

$$m_T=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{4}}{2\left(\frac{1}{1+4\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$m_T=\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{4}}{2\left(\frac{1}{1+1}-\frac{3}{2}\right)}=\frac{3-\frac{9}{4}}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)}=\frac{\frac{12-9}{4}}{2(-1)}=\frac{\frac{3}{4}}{-2}$$

$$m_T=-\frac{3}{8}$$

La ecuación de la recta tangente en $P_0\left(1,\frac{1}{2}\right)$ es:

$$\boxed{y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}(x-1)}$$

6. (8 PUNTOS) Bosqueje la gráfica de una función de variable real f que es continua y que cumple con todas las condiciones especificadas:

i. $\boldsymbol{dom\ f = \mathbb{R}}$
ii. $\boldsymbol{f(0) = f(4) = f(6) = 0\ ;\ f(2) = 4\ \ ;\ f(5) = -5}$
iii. $\boldsymbol{\forall x \in (0, 2) \cup (5, +\infty)\ ,\ f'(x) > 0}$
iv. $\boldsymbol{\forall x \in (2, 5)\ ,\ f'(x) < 0}$
v. $\boldsymbol{f'(5)\ no\ existe.}$
vi. $\boldsymbol{\forall x \in (0, 5) \cup (5, +\infty)\ ,\ f''(x) < 0}$
vii. $\boldsymbol{f\ es\ impar.}$

Determine qué tipo de punto crítico se tiene cuando $x = 2$.

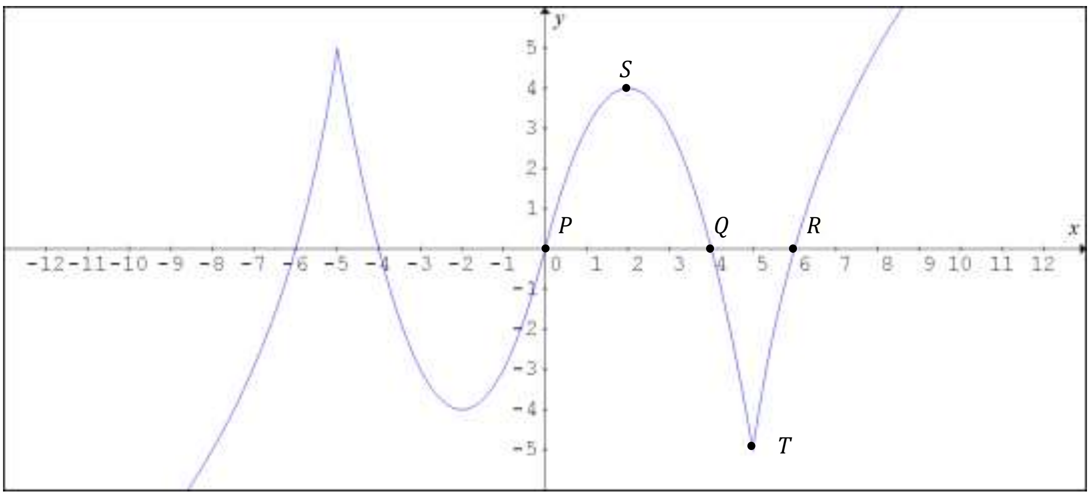
Solución:

Se realiza una interpretación de cada condición dada:

i. La función está definida para todos los reales.
ii. Los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de la función:
$$P(0,0)\ \wedge\ Q(4,0)\ \wedge\ R(6,0)\ \wedge\ S(2,4)\ \wedge\ T(5,-5)$$
iii. f es estrictamente creciente en los intervalos $(0,2)$ y $(5,+\infty)$.
iv. f es estrictamente decreciente en $(2,5)$.
v. f tiene un punto crítico singular, cuando $x = 5$.
vi. f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(0,5)$ y $(5,+\infty)$.
vii. $\forall x \in dom\ f\ , f(-x) = -f(x)$. La gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Con base en el CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA, por el cambio de signo especificado, cuando $x = 2$, se concluye que existe un valor EXTREMO MÁXIMO LOCAL. Dado que la segunda derivada existe en el intervalo $(0,5)$, se infiere que en $x = 2$ la primera derivada es continua; luego, puesto que $f'(x)$ cambia de signo en dicha abscisa, se concluye que $f'(2) = 0$ y en $x = 2$ se presenta un PUNTO CRÍTICO ESTACIONARIO.

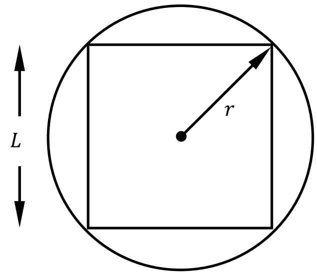
Una gráfica para la función f que satisface todas las condiciones, es:



7. (8 PUNTOS) De los problemas mostrados a continuación, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y RESUÉLVALO:

Un cuadrado está inscrito en un círculo. Si la longitud del radio del círculo se está incrementando a una velocidad constante de $0.8\ cm/s$, calcule la velocidad con la que crece el área del círculo cuando el lado del cuadrado mide $4\ cm$.

Solución:



Se indica que existe un crecimiento para la longitud del radio r respecto al tiempo t, por lo tanto se asocia el signo positivo:

$$\frac{dr}{dt} = 0.8\ cm/s$$

El área del círculo es $A = \pi r^2$.

Se deriva el área A respecto al tiempo t en forma implícita:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Se solicita evaluar $\frac{dA}{dt}$ cuando $L = 4\ cm$, por lo que se necesita obtener la longitud r correspondiente. Para tal efecto, se aplica el TEOREMA DE PITÁGORAS:

$$(2r)^2 = L^2 + L^2 \quad \rightarrow \quad 4r^2 = 2L^2$$
$$|r| = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} L$$

Se descarta el valor negativo, por el contexto del problema:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}(4) = 2\sqrt{2}\ cm$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=2\sqrt{2}} = 2\pi\left(2\sqrt{2}\right)\left(\frac{8}{10}\right)$$

$$\boxed{\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=2\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}\,\pi}{5}\ cm^2/s}$$

Por lo tanto, cuando el lado del cuadrado inscrito mide $4\ cm$ y la longitud del radio del círculo se incrementa a razón de $0.8\ cm/s$, por cada $segundo$ transcurrido, el área del círculo también se incrementa en $\frac{16\sqrt{2}\,\pi}{5}\ cm^2$.

La función $\boldsymbol{Q(p) = log_2(65 - p^2)}$ representa la cantidad, en $\boldsymbol{miles\ de\ acciones}$, que demanda el mercado y $\boldsymbol{p}$ es el precio de cada acción en $\boldsymbol{dólares}$. Si el precio de las acciones decrece a razón de $\$\,2\ \boldsymbol{por\ semana}$, calcule la variación de la demanda cuando la cantidad demandada es de $4\ \boldsymbol{mil\ acciones}$.

Solución:

Se indica que existe un decrecimiento para el precio p respecto al tiempo t, por lo tanto se asocia el signo negativo:

$$\frac{dp}{dt} = -2\ dólares/semana$$

Se deriva la demanda Q respecto al tiempo t en forma implícita:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{(65 - p^2)ln(2)}(-2p)\frac{dp}{dt}$$

Se solicita evaluar $\frac{dQ}{dt}$ cuando $Q = 4\ mil\ aciones$, por lo que se necesita obtener el precio p correspondiente. Para tal efecto, se evalúa:

$$Q(p) = log_2(65 - p^2) = 4$$

$$65 - p^2 = 2^4$$

$$p^2 = 65 - 16 = 49$$

$$|p| = 7$$

Se descarta el valor negativo, por el contexto del problema:

$$p = 7$$

$$\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{p=7} = \frac{1}{(65 - 7^2)ln(2)}(-2)(7)(-2) = \frac{(4)(7)}{16ln(2)}$$

$$\boxed{\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{p=7} = \frac{7}{4ln(2)}\ miles\ de\ acciones/semana}$$

Por lo tanto, cuando la cantidad demandada es de $4\ mil\ acciones$ y cada acción disminuye su valor a razón de $2\ \ dólares/semana$, por cada $semana$ transcurrida, la cantidad demandada aumenta en $\frac{7}{4ln(2)}\ miles\ de\ acciones$.

8. (6 PUNTOS) Dada la función de variable real f definida por:

$$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x-1}\ ;\ \ x\geq 1}$$

Verifique si cumple con la hipótesis del TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS (TEOREMA DE LAGRANGE) en el intervalo $[5, 17]$, y, en caso de hacerlo, determine el valor de c cuya existencia está garantizada por dicho teorema.

Solución:

El TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS indica lo siguiente:

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en su interior (a, b), entonces existe al menos un número c en (a, b) donde:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

La expresión de f es la regla de correspondencia de una función conocida, raíz cuadrada, la cual es continua en todo su dominio, y, por lo tanto también lo será en el intervalo $[5, 17]$.

Se obtiene la expresión correspondiente a la primera derivada f':

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ ;\ \ x>1$$

Al observar la regla de correspondencia, se concluye que la función es derivable en el intervalo $(5, 17)$.

Se evalúa cada extremo del intervalo proporcionado: $x=5$ y $x=17$:

$$f(5)=\sqrt{5-1}=2$$
$$f(17)=\sqrt{17-1}=4$$

Con base en el TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS (TEOREMA DE LAGRANGE), se garantiza la existencia de al menos un valor $c\in(5, 17)$ tal que:

$$\frac{f(17)-f(5)}{17-5}=f'(c)$$

$$\frac{4-2}{12}=f'(c)$$

$$f'(c)=\frac{1}{6}$$

Luego:

$$f'(c) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c-1}} = \frac{1}{6}$$

$$\sqrt{c-1} = 3$$

$$c - 1 = 9$$

$$\boxed{\therefore c = 10}$$

Se cumple el TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS:

$$\boxed{\therefore \exists c \in (5, 17)\,, f'(c) = \frac{1}{6}}$$