ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

AÑO:	2018	**PERIODO:**	PRIMER TÈRMINO
MATERIA:	ESTADISTICA	**PROFESOR:**	J. MERO, C.PINOS, C.RONQUILLO
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	30 DE AGOSTO DE 2018

SOLUCION Y RUBRICA

Tema 1 (15 puntos) / 5 ptos cada uno. El jefe de recursos humanos de una empresa realiza un test de diez ítems a los aspirantes a un puesto, teniendo en cada ítem cuatro posibles respuestas, de las que sólo una es correcta.
Suponiendo que los aspirantes teniendo la misma probabilidad de responder. Se pide hallar las probabilidades para el aspirante:

a) Conteste todos los ítems mal.
b) Conteste entre uno y tres ítems bien.
c) Conteste menos de tres ítems bien.

Solución:

Sea X = "contestar ítems bien en el test", la variable sigue una distribución binomial

$$n = 10 \;,\; p = \frac{1}{4} = 0{,}25 \;,\; b(10, 0{,}25) \;,\; P(X = k) = \binom{10}{k}.0{,}25^{k}.0{,}75^{10-k} \qquad k = 0,1,\cdots,10$$

a) $P(X = 0) = \binom{10}{0}.0{,}25^{0}.0{,}75^{10} = 0{,}25^{0}.0{,}75^{10} = 0{,}0563$

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No identifica eventos, ni el tipo de distribución a utilizar.	Plantea Evento y distribución a utilizar.	Plantea y desarrolla la solución pero se equivoca en alguna parte.	Responde correctamente al problema y ejercicio planteado.
Puntos	0	1-2	3-4	5

b)

$$P(1 \leq x \leq 3) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$$
$$= \binom{10}{1}(0{,}25^{1})(0{,}75^{9}) + \binom{10}{2}(0{,}25^{2})(0{,}75^{8}) + \binom{10}{3}(0{,}25^{3})(0{,}75^{7})$$
$$= 0{,}1877 + 0{,}2816 + 0{,}2503 = 0{,}7196$$

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No identifica eventos, ni el tipo de distribución a utilizar.	Plantea Evento y distribución a utilizar.	Plantea y desarrolla la solución pero se equivoca en alguna parte.	Responde correctamente al problema y ejercicio planteado.
Puntos	0	1-2	3-4	5

c)

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$
$$= \binom{10}{0}.0{,}25^{0}.0{,}75^{10} + \binom{10}{1}.0{,}25^{1}.0{,}75^{9} + \binom{10}{2}.0{,}25^{2}.0{,}75^{8} = 0{,}0563 + 0{,}1877 + 0{,}2816 = 0{,}5256$$

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No identifica eventos, ni el tipo de distribución a utilizar.	Plantea Evento y distribución a utilizar.	Plantea y desarrolla la solución pero se equivoca en alguna parte.	Responde correctamente al problema y ejercicio planteado.
Puntos	0	1-2	3-4	5

Tema 2 (20 puntos) / 5 ptos. cada uno. Consideremos la variable aleatoria X, cuya distribución de probabilidades es:

$$f(x) = K(x+1)^2 \; para \; x \in S$$

Siendo el soporte de X, el conjunto $S = \{0, 1, 2, 3\}$.

a) Determinar el valor de la constante K.
b) Calcular la media y la varianza de la variable aleatoria X.
c) Graficar el histograma de probabilidades.
d) Determinar la distribución acumulada $F(X) = P(X \leq x)$.

SOLUCIÓN:

a.

$$\sum_{x=0}^{3} K(x+1)^2 = 1$$

$$K[(0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2] = 1$$

$$\rightarrow K = \frac{1}{30}$$

$$f(x) = \frac{1}{30}(x+1)^2, \qquad para \; x \in S; \; S = \{0, 1, 2, 3\}$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No realiza ningún cálculo	Plantea las condiciones que debe cumplir una función de probabilidad.	Calcula el valor de la constante, pero no llega a la respuesta.	Calcula correctamente el valor de la constante.
Puntos	0	1-2	3-4	5

b.

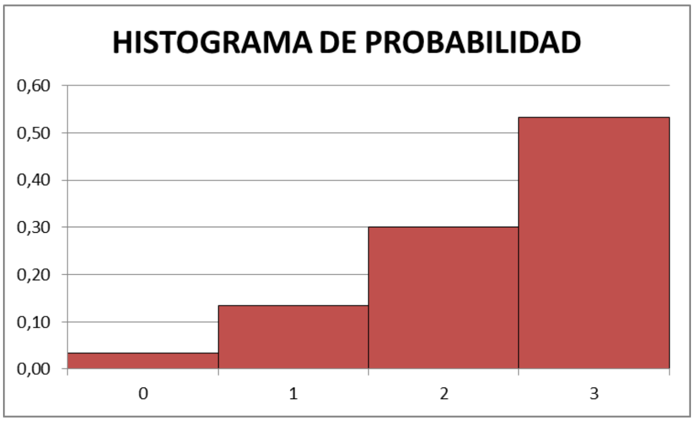
$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x.f(x) \; y \; \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x=0}^{3} (X-\mu)^2 f(x)$$

x	$f(x)$	$x.f(x)$	$X-\mu$	$(X-\mu)^2$	$(X-\mu)^2 f(x)$
0	0,03	0,00	-2,33	5,44	0,18
1	0,13	0,13	-1,33	1,78	0,24
2	0,30	0,60	-0,33	0,11	0,03
3	0,53	1,60	0,67	0,44	0,24
		μ =2,33			σ^2 =0,69

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Solo plantea la fórmula para calcular la media y la varianza.	Plantea un método para calcular los parámetros solicitados.	Calcula correctamente los parámetros solicitados.
Puntos	0	1-2	3-4	5

c.



RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No realiza gráfico alguno.	Bosqueja un gráfico sin asociar correctamente las probabilidades	Grafica correctamente, omite rótulos	Se evidencia que la altura de cada barra es proporcional a la probabilidad de x. Rotula el gráfico
Puntos	0	1-2	3-4	5

d)

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}03 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}17 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}47 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No realiza ningún cálculo.	Propone la función acumulada de forma equivocada.	Obtiene las probabilidades acumuladas, pero determina de forma incorrecta los intervalos.	Construye correctamente la regla de correspondencia para la función acumulada.
Puntos	0	1-2	3-4	5

<u>Tema 3</u> (15 puntos) /5 ptos. cada uno

El valor de la nota sobre 100 puntos, de Matemáticas que obtiene un estudiante nativo de una comunidad rural ecuatoriana al terminar la educación básica, puede ser modelado como una variable aleatoria normal con media 60 y desviación estándar 15.

a) Determine la probabilidad que los alumnos obtengan una nota entre 50 y 70 puntos.

b) Dado que en la comunidad residen 20 estudiantes, determine la probabilidad de que 3 de los 20 estudiantes obtengan en Matemáticas una nota entre 50 y 70, considerando como probabilidad de éxito el resultado del inciso anterior.

c) Se supone que aquellos estudiantes que alcanzan notas inferiores a $\mu - \sigma$ no tiene acceso directo a bachillerato, sino que deben aprobar un curso propedéutico, ¿cuántos de los estudiantes deben cursar el propedéutico?

SOLUCIÓN:

a. $X \sim N(\mu, \sigma) \sim N(60{,}15)$

$$P(50 \leq X \leq 70) = P\left[\frac{(50-60}{15} \leq \frac{(X-\mu)}{\sigma} \leq \frac{(70-60)}{15}\right]$$
$$P(-0.667 \leq Z \leq 0.667) = F(0.667) - F(-0.667)$$
$$= 0.7475 - 0.2500 = 0.4975$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios: El estudiante sabe estandarizar los valores que puede tomar la variable aleatoria normal, y calcula correctamente las probabilidades asociadas usando la tabla acumulada F(X).	No identifica la variable aleatoria, ni sus parámetros.	Identifica la variable aleatoria, pero no realiza la estandarización de la variable.	Identifica la variable y la estandariza, pero no estima correctamente la probabilidad mediante el uso de la tabla acumulada.	Identifica la variable y la estandariza, además calcula correctamente la probabilidad mediante el uso de la tabla acumulada.
Puntos	0	1-2	3-4	5

b. Se modela el experimento binomial, con $n = 20,\ x = 3,\ p = 0.4975.$

$$P(X = 3) = \binom{20}{3}(0.4975)^3(1 - 0.4975)^{20-3}$$
$$P(X = 3) = 0.0012$$

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios El estudiante reconoce el experimento binomial, y partiendo de una probabilidad de éxito dada, calcula la probabilidad solicitada.	No logra identificar el experimento binomial	Identifica el experimento binomial, pero no determina el número de ensayos, y, éxitos.	Identifica el experimento binomial, considerando el número de ensayos, y, éxitos, pero no calcula la probabilidad solicitada correctamente.	Identifica el experimento binomial, considerando el número de ensayos, y, éxitos, además calcula la probabilidad solicitada correctamente.
Puntos	0	1-2	3-4	5

c. Quienes tengan nota menor a $\mu - \sigma$ no accederían directamente al bachillerato.

$$\mu - \sigma = 60 - (15) = 45$$

Los estudiantes cuya nota sea menor a 45 no accederían directamente al bachillerato.

$$P(X < 45) = P\left[\frac{(X-\mu)}{\sigma} \leq \frac{(45-60)}{15}\right]$$
$$P(Z \leq -1) = F(-1) = 0.1587$$

El 15.87% de los estudiantes deberán tomar el curso propedéutico para ingresar a bachillerato, es decir 20(15.87%) = 3.17 niños de la comunidad no ingresarían directamente a bachillerato.

RÚBRICA:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios: El estudiante sabe estandarizar los valores que puede tomar la variable aleatoria normal, y calcula correctamente las probabilidades asociadas usando la tabla acumulada F(X).	No identifica la variable aleatoria, ni sus parámetros.	Identifica la variable aleatoria, pero no calcula el valor de x indicado.	Identifica la variable, calcula el valor de x solicitado; estandariza la variable aleatoria, pero no determina correctamente la probabilidad.	Determina correctamente la probabilidad, y, concluye acorde a lo solicitado.
Puntos	0	1-2	3-4	5

Tema 4 (25 puntos)

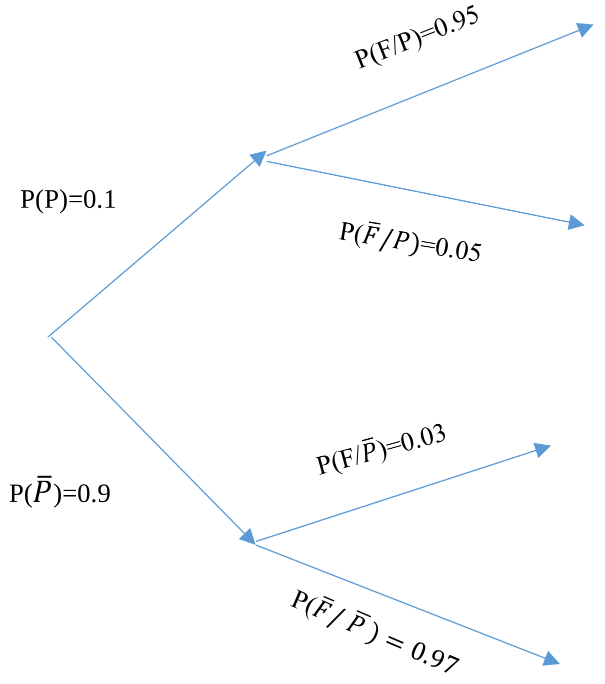
En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es de 0.95. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber habido peligro es 0.03. Hallar:

a) Construya el árbol de decisión.**(11 puntos)**
b) Probabilidad de que, habiendo funcionado la alarma, no haya habido peligro.**(7 puntos)**
c) Probabilidad de que, no habiendo funcionado la alarma, haya un peligro.**(7 puntos)**

Solución:

Ω=P+$\bar{P}$, siendo P= {hay peligro}
$\bar{P}$= {no hay peligro}
Con P(P)=0.1; $P(\bar{P}) = 0.9$
Si F={ la alarma funciona}, tendremos:
P(F/P)=0.95 $P(F/\bar{P}\ ) = 0.03$

a)



Rúbrica:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno	Identifica el primer paso que es la presencia de peligro, asignando sus	Identifica el segundo paso que es el Funcionamiento de la alarma,	Grafica el árbol de decisión de manera

		correspondientes probabilidades	asignando sus correspondientes probabilidades condicionales	correcta y completa
Puntos	0	1-5	6-10	11

b)$P(\overline{P}/F) = \frac{P(F/\overline{P}).P(\overline{P})}{\mathrm{P(F/}\,\overline{P}\,\mathrm{).P(}\,\overline{P}\,\mathrm{)+P(F/P).P(P)}} = \frac{(0.03)(0.9)}{(0.03)(0.9)+(0.95)(0.1)} = 0.221$

Rúbrica:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno	Plantea correctamente la fórmula del Teorema de Bayes	Reemplaza las correspondientes probabilidades pero comete errores en los cálculos.	Calcula correctamente la probabilidad
Puntos	0	1-3	4-6	7

c) $P(P/\bar{F}) = \frac{P(\bar{F}/P).P(P)}{\mathrm{P}(\bar{F}/\,P\,).\mathrm{P}(\,P\,)+\mathrm{P}(\bar{F}/\overline{P}).\mathrm{P}(\overline{P})} = \frac{(0.05)(0.1)}{(0.05)(0.1)+(0.97)(0.03)} = 0.0057$

Rúbrica:

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**Regular**	**Satisfactorio**	**Excelente**
Criterios	No realiza cálculo alguno	Plantea correctamente la fórmula del Teorema de Bayes	Reemplaza las correspondientes probabilidades pero comete errores en los cálculos.	Calcula correctamente la probabilidad
Puntos	0	1-3	4-6	7

<u>**Tema 5**</u> **(25 puntos)** Un banco quiere analizar si las comisiones que cobra a sus clientes por operaciones en el mercado bursátil difieren significativamente de las que cobra la competencia, cuya media es de 12 euros mensuales con una desviación estándar de 4,3 euros. Este banco toma una muestra de 64 operaciones bursátiles y observa que la comisión promedio es de 13,6 euros.

a) Construya un intervalo al 99% confianza para la media. **(12 puntos)**
b) Contrastar, al nivel de significancia del 5%, que este banco no difiere significativamente en el cobro de las comisiones por operaciones en la Bolsa con respecto a la competencia. **(13 puntos)**

SOLUCIÓN:

a)

La media muestral $\overline{X}$ por el teorema central del límite se va a aproximar la distribución normal:

$$\overline{X} \approx N(\mu_{\bar{x}} = \mu, \sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n})$$

Entonces el intervalo de confianza es:

$$\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 13{,}6 \pm \left(2{,}57 \frac{4{,}3}{\sqrt{64}}\right) = 13{,}6 \pm 1{,}3813$$

$$[12{,}21\ ;\ 14{,}98]$$

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No identifica el tipo de intervalo de confianza a obtener.	Plantea los parámetros para el intervalo de confianza	Desarrolla el intervalo de confianza.	Responde correctamente al problema y ejercicio planteado.
Puntos	0	1-6	7-11	12

b)

Sea X = "Comisiones que se cobran por operaciones en el mercado bursátil"

Tenemos: $X \approx (\mu,\ 4{,}3)$

Queremos contrastar:

$$H_0 : \mu = 12$$
$$H_{1:} : \mu \neq 12$$

Es decir, queremos contrastar si μ es 12 euros como la competencia o si por el contrario es distinto de esta cantidad.

Calculamos el estadístico de contraste,

$$Z^* = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{13{,}6 - 12}{4{,}3 / \sqrt{64}} = \frac{1{,}6}{0{,}5375} = 2{,}98$$

Como es un contraste de dos extremos, ahora tenemos que calcular el p-valor correspondiente a z*=2,98, es decir el área que hay por debajo de z=-2,98 más el área que hay por encima de z= 2,98, i.e., el área en las dos colas.

Si observamos la tabla de la distribución normal estándar, podemos comprobar que el área que hay a la izquierda de z=-2,98 es 0,0014 y el área que hay a la derecha de 2,98 es también 1-0,9986=0,0014 por lo que el p-valor= 2*0,0014=0,0028

Como el p-valor es menor que el nivel de significación, rechazaremos la hipótesis nula a un nivel de significación del 5%.

Por lo tanto existe evidencia estadística de que la comisión promedio que cobra este banco difiere significativamente de la competencia.

Desarrollo				
Nivel	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollo**	**Excelente**
Criterios	No identifica el tipo de prueba de hipotesis a obtener.	Plantea los parámetros para la prueba de hipótesis	Desarrolla la prueba de hipótesis	Responde correctamente al problema y ejercicio planteado.
Puntos	0	1-6	7-12	13