

|             |   |             |  |
|-------------|---|-------------|--|
| Año:        | 2023                                      | Periodo:    | II PAO   |
| Materia:    | Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal | Profesores: | Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín |
| Evaluación: | Segunda                                   | Fecha:      | 29 de enero de 2024                              |

### COMPROMISO DE HONOR

Yo, \_\_\_\_\_, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.**

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni deo copiar”.

Firma: \_\_\_\_\_ Número de matrícula: \_\_\_\_\_ Paralelo: \_\_\_\_\_

1. (7 puntos) Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$  una transformación lineal con regla de correspondencia:

$$T \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} (x) = (2a - b - c) + (a + 3b - c)x + (3a - 5b - c)x^2$$

Encuentre una base y determine la dimensión del núcleo de  $T$  y de la imagen de  $T$ .

**Solución:**

Sea  $(a, b, c)$  un vector tal que  $T(a, b, c)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$\begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ a + 3b - c = 0 \\ 3a - 5b - c = 0 \end{cases}$$

La matriz de este sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix},$$

cuya matriz escalón reducida por filas es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema arriba es equivalente a

$$\begin{cases} a - 4/7c = 0 \\ b - 1/7c = 0 \end{cases}$$

Por tanto, un vector  $(a, b, c)$  está en el núcleo de  $T$  si, y solamente si,  $a = 4/7c$  y  $b = 1/7c$ . De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(a, b, c) : a = 4/7c \text{ y } b = 1/7c\} \\ &= \{(4/7c, 1/7c, c) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{gen}\{(4/7, 1/7, 1)\}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $\{(4/7c, 1/7c, c)\}$  es una base para  $N(T)$  y en consecuencia  $\dim N(T) = 1$ . Por otro lado, el teorema del núcleo y la imagen nos dice que

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T) = 1 + \dim \text{Im}(T),$$

de donde  $\dim \text{Im}(T) = 2$ . Para hallar una base para la imagen, note que podemos extender la base  $\{(4/7, 1/7, 1)\}$  de  $N(T)$  a la base

$$\{(4/7, 1/7, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

de  $\mathbb{R}^3$  (para verlo, note que  $(1, 0, 0)$  no es múltiplo de  $(4/7, 1/7, 1)$ , y es imposible generar  $(0, 1, 0)$  con los vectores  $(4/7, 1/7, 1)$  y  $(1, 0, 0)$ ). Luego, por los argumentos de la demostración del teorema del núcleo y la imagen obtenemos que

$$\{T(1, 0, 0)(x), T(0, 1, 0)(x)\} = \{2 + x + 3x^2, -1 + 3x - 5x^2\}$$

es una base para  $\text{Im}(T)$ .

**Rúbrica:**

|  |            |
|--|------------|
| Halla una base y la dimensión de $N(T)$ o de $\text{Im}(T)$ .                                  | 1-6 puntos |
| Usa el Teorema del Núcleo y la Imagen para hallar la dimensión de $N(T)$ o de $\text{Im}(T)$ . | 1-4 puntos |

2. Sea  $T : P_2 \rightarrow W$  una transformación lineal donde  $W = \text{gen} \left\{ \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3} \right\}$ , con  $s > 0$ , y para todo  $p(x) \in P_2$ :

$$T p(t) = \mathcal{L} \{p(t)\},$$

donde  $\mathcal{L}$  es el operador transformada de Laplace.

(a) (4 puntos) Encuentre la representación matricial de  $T$  usando la base  $B_1 = \{2, 1-t, t-t^2\}$  de  $P_2$  y la base  $B_2 = \left\{ \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3} \right\}$  de  $W$ .

**Solución:** Sea  $p(t) = a + bt + ct^2$  un polinomio de grado menor o igual que 2 arbitrario. Entonces,

$$\mathcal{L}\{p(t)\} = \mathcal{L}\{a + bt + ct^2\} = a\mathcal{L}\{1\} + b\mathcal{L}\{t\} + c\mathcal{L}\{t^2\} = a\frac{1}{s} + b\frac{1}{s^2} + 2c\frac{1}{s^3}.$$

Por tanto, el vector de coordenadas de  $p(x)$  respecto a la base  $B_2$  es

$$[p(x)]_{B_2} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2c \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$[2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [1-t]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [t-t^2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$[\mathcal{L}]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Rúbrica:**

|  |            |
|--|------------|
| Halla los vectores de coordenadas de cada uno de las imágenes de los vectores de la base $B_1$ . | 1-2 puntos |
| Halla la matriz de $T$ respecto a las bases $B_1$ y $B_2$ .                                      | 1-2 puntos |

(b) (4 puntos) Usando la matriz del literal anterior, encuentra  $\mathcal{L}\{1-t-2t^2\}$ .

**Solución:** Primero, observamos que

$$[1-t-2t^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$[\mathcal{L}\{1-t-2t^2\}]_{B_2} = [\mathcal{L}]_{B_2}^{B_1} [1-t-2t^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

De aquí, se obtiene

$$\mathcal{L}\{1-t-2t^2\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}.$$

**Rúbrica:**

|   |            |
|---|------------|
| Halla el vector de coordenadas de $1-t-2t^2$ respecto a la base $B_1$ .           | 1 punto    |
| Usa la matriz $[\mathcal{L}]_{B_2}^{B_1}$ para hallar $\mathcal{L}\{1-t-2t^2\}$ . | 1-3 puntos |

3. (10 puntos) Encuentre la solución general de  $2y'' - 7y' + 3y = t^2 - 4 \cos t$ .

**Solución:** La solución general será la suma de la solución homogénea y la solución particular. Encuentre la solución homogénea resolviendo la EDO homogénea asociada

$$2y'' - 7y' + 3y = 0$$

La ecuación característica de esta EDO homogénea es

$$2r^2 - 7r + 3 = (r - 3)(2r - 1),$$

de donde obtendremos la base  $\{e^{3t}, e^{1/2t}\}$  para el espacio de soluciones homogénea, y así la solución homogénea asociada

$$y_b(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{1/2t}$$

Ahora, determinamos una solución particular para  $2y'' - 7y' + 3y = t^2 - 4 \cos t$  mediante el método de coeficientes indeterminados. La solución particular será suma de soluciones particulares para  $2y'' - 7y' + 3y = t^2$  y  $2y'' - 7y' + 3y = -4 \cos(t)$ . La solución particular para  $2y'' - 7y' + 3y = t^2$  tiene la forma:

$$y_{p_1}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

La solución particular para  $2y'' - 7y' + 3y = -4 \cos t$  tiene la forma:

$$y_{p_2}(t) = a_4 \sin t + a_5 \cos t$$

La solución particular total es:

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 \sin t + a_5 \cos t$$

Calculemos  $y'_p(t)$ :

$$y'_p(t) = a_2 + 2a_3 t + a_4 \cos t - a_5 \sin t$$

Calculemos  $y''_p(t)$ :

$$y''_p(t) = 2a_3 - a_4 \sin t - a_5 \cos t$$

Sustituimos la solución particular  $y_p(t)$  en la ecuación diferencial:

$$2y''_p(t) - 7y'_p(t) + 3y_p(t) = t^2 - 4 \cos t$$

Simplifiquemos y resolvamos el sistema de ecuaciones resultante para las constantes desconocidas:

$$a_1 = \frac{86}{27}, \quad a_2 = \frac{14}{9}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{14}{25}, \quad a_5 = -\frac{2}{25}$$

Sustituimos  $a_1, a_2, a_3, a_4,$  y  $a_5$  en  $y_p(t)$ :

$$y_p(t) = \frac{86}{27} + \frac{14t}{9} + \frac{t^2}{3} + \frac{14 \sin t}{25} - \frac{2 \cos t}{25}$$

Finalmente, la solución general es:

$$y(t) = y_b(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{1/2t} + \frac{86}{27} + \frac{14t}{9} + \frac{t^2}{3} + \frac{14 \sin t}{25} - \frac{2 \cos t}{25}$$

**Rúbrica:**

|   |            |
|---|------------|
| Halla la solución general homogénea.  | 1-2 puntos |
| Usa superposición no homogénea para determinar la forma de la solución particular.                  | 1 punto    |
| Usa el método de los coeficientes indeterminados (u otro método) para hallar la solución particular | 1-6 puntos |

4. (10 puntos) Usando valores y vectores propios, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

**Solución:** La matriz asociada a este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(x + 1)^2$$

De donde se obtienen los valores propios 5 y  $-1$ . Los espacios propios correspondientes son

$$E_5 = \text{gen}\{(1, -1, 1)\},$$

y

$$E_{-1} = \text{gen}\{(-1, 0, 1), (1, 1, 0)\}.$$

De aquí obtenemos las soluciones l.i.

$$y_1(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_3(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

y la solución general es por tanto

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} + (-c_2 + c_3) e^{-t} \\ -c_1 e^{5t} + c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \end{bmatrix}.$$

5. (a) (4 puntos) Use la definición de transformada de Laplace para verificar que si  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  existe para  $s > \alpha$ . entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \text{ para } s > a + \alpha.$$

**Solución:** Aplicamos la definición de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a).$$

Como  $F(s)$  está definida para  $s > \alpha$ , tiene que  $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$  está definida para  $s-a > \alpha$ , o equivalentemente, para  $s > a + \alpha$ .

**Rúbrica:**

|   |         |
|---|---------|
| Demuestra que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ .              | 3 punto |
| Justifica que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ para $s > a + \alpha$ . | 1 punto |

- (b) (3 puntos) Sea  $A$  una matriz cuadrada de cualquier tamaño. Verifique que si  $v$  es un vector propio de  $A$  que está asociado al valor propio  $\lambda$ , entonces para todo número natural  $n$ ,  $v$  es un vector propio de  $A^n$  asociado al valor propio  $\lambda^n$ . *Sugerencia:* Use inducción matemática.

**Solución:** El resultado es claro para  $n = 1$ . Suponga que, para un  $n$  natural dado,  $v$  es vector propio de  $A^n$  asociado al valor propio que  $\lambda^n$ , i.e.,  $A^n v = \lambda^n v$ . Entonces,

$$\begin{aligned} A^{n+1}v &= (A^n A)v \\ &= A^n(Av) \\ &= A^n(\lambda v) \\ &= \lambda A^n v \\ &= \lambda(\lambda^n v) \\ &= \lambda^{n+1}v \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $v$  es vector propio de  $A^{n+1}$  asociado al valor propio  $\lambda^{n+1}$ . Por el Principio de Inducción Matemática, se tiene que el enunciado es válido para todo  $n$  natural.

**Rúbrica:**

|   |            |
|---|------------|
| Demuestra el resultado usando inducción matemática. | 1-4 puntos |
|---|------------|

6. (8 puntos) Use transformadas de Laplace para resolver el PVI

$$y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

**Solución:** Sea  $y(t)$  la solución a este PVI. Entonces, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$y''(t) - y'(t) = e^t \cos t.$$

Aplicamos transformadas de Laplace a ambos lados de esta igualdad:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - \mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{e^t \cos t\}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - (sY(s) - y(0)) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$Y(s)(s^2 - s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s((s-1)^2 + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{-1/2(s-1) + 1/2}{(s-1)^2 + 1}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}\right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2 + 1}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^t \cos t + \frac{1}{2} e^t \sin t$$

**Rúbrica:**

|  |            |
|--|------------|
| Aplica correctamente la transformada de Laplace                      | 1 punto    |
| Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales | 1-5 puntos |
| Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace              | 1-3 puntos |
| Resuelve el PVI.   | 1 punto    |