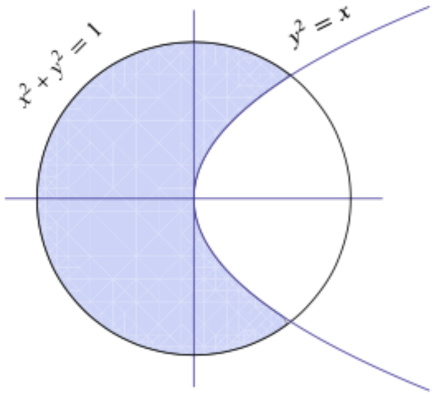
TEMA 1-1

Para el conjunto

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \le y^2, \ x^2+y^2 \le 1\}$.

a) Represente gráficamente el conjunto A de $\mathbb{R}^2$

b) Indique y Justifique sí el conjunto a es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.



Calculamos la abscisa del punto de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la parábola $y^2=x$,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x \end{cases} \Rightarrow \ x^2+x=1 \ \Rightarrow \ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, la frontera del conjunto A (ver figura 1.13.(e)) vendrá dada por:

$$Fr(A)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1, \ -1\le x\le \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right\}$$
$$\bigcup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2=x, \ 0\le x\le \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right\}.$$

Luego,

- A no es abierto, porque $A\cap Fr(A)\neq\emptyset$.
- A es cerrado, ya que $Fr(A)\subset A$.
- A es acotado porque $A\subset B_1(0,0)$.
- A es compacto, porque ser cerrado y acotado.
- A no es convexo ya que, por ejemplo, los puntos $(\frac{1}{2},1)$ y $(-\frac{1}{2},1)$ pertenecen a A, pero el segmento que los une no está contenido en A.

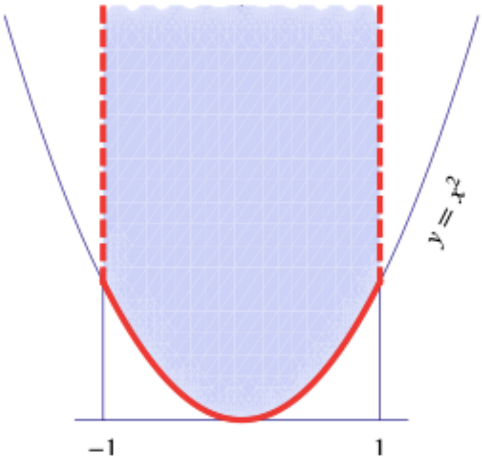
TEMA 1-2

Para el conjunto

f) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x^2, \ -1 < x < 1\}$.

a) Represente gráficamente el conjunto A de $\mathbb{R}^2$

b) Indique y Justifique sí el conjunto a es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.



La frontera del conjunto A viene dada por

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\} \cup \{(-1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}$$

- A no es abierto, porque $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
- A no es cerrado, ya que $Fr(A) \not\subset A$.
- A no es acotado.
- A no es compacto, porque no es acotado.
- A es convexo. Dados dos puntos cualesquiera de A el segmento que los une está contenido en A.

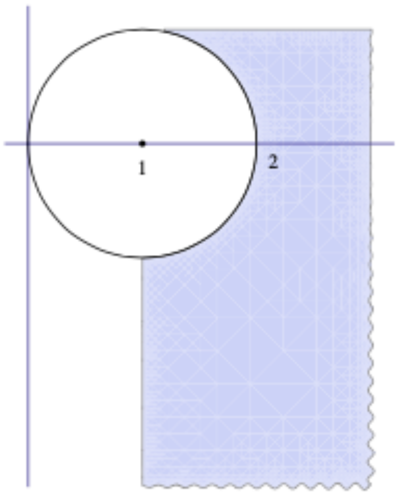
TEMA 1-3

Para el conjunto

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \geq 2, x \geq 1, y \leq 1\}$

a) Represente gráficamente el conjunto A de $\mathbb{R}^2$

b) Indique y Justifique sí el conjunto a es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.



La ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ representa una circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1. La frontera del conjunto A vendrá dada por:

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\; x \geq 1\} \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2\}.$$

Por tanto,

- A no es abierto, porque $A \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
- A es cerrado, ya que $Fr(A) \subset A$.
- A no es acotado.
- A no es compacto, porque no es acotado.

- A no es convexo ya que, por ejemplo, los puntos $(1,1)$ y $(-1,1)$ pertenecen a A y, sin embargo, el segmento que los une no está contenido en A.

Rúbrica General:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe cómo representar un conjunto dado en R^2 y reconocer sus caracteristicas de abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo representar graficamente un conjunto en R^2 o lo hace d emanera incorrecta.	Representa bien el conjunto dado de manera gráfica pero solo justifica correctamente una o dos de las cuatro características solicitadas.	Representa bien el conjunto dado de manera gráfica pero solo justifica correctamente tres de las características solicitadas.	Representa bien el conjunto dado de manera gráfica y justifica correctamente las 4 características solicitadas.
	0	**1-4**	**5-8**	**9-10**

TEMA 2-1

Demostrar que la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

Es continua en $(0{,}0)$ y tiene derivadas en cada dirección en el punto $(0{,}0)$ pero no es diferenciable en $(0{,}0)$.

Solución:

- Estudiemos la continuidad de f en $(0{,}0)$. Observemos que:

a) $f(0{,}0)=0$ existe. Ahora probemos que

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(0{,}0)=0.$

Usando coordenada polares: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\,sen\,\theta\\ r^2=x^2+y^2\end{cases}$ tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|r\cos\theta|\,r\,sen\,\theta}{r}=\lim_{r\to0}|r\cos\theta|\;sen\,\theta=0$$

Ya que $\lim\limits_{r\to0}r=0$ y $g(r,\theta)=|\cos\theta|\sin\theta$ es acotada. Así, f es continua en $(0{,}0)$, más aún es continua en $\mathbb{R}^2$.

- Calculemos las derivadas direccionales en el punto $(0{,}0)$. Sea $v=(v_1,v_2)$ un vector unitario,

$$D_vf(0{,}0)=\frac{\partial f}{\partial v}(0{,}0)=\lim_{t\to0}\frac{f\big((0{,}0)+t(v_1,v_2)\big)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(tv_1,\;t\,v_2)}{t}=$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{|t\,v_1|\;t\,v_2}{t\sqrt{t^2(v_1^2+v_2^2)}}=\frac{v_1\,v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\;v_1\,v_2,$$

El cual existe para cualquier vector unitario $v=(v_1,v_2)$.

- Estudiemos la diferenciabilidad de f en el punto $(0{,}0)$.

Calculemos el siguiente límite, donde $h=(h_1,h_2)$ y $\boldsymbol{x_0}=(0{,}0)$:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0{,}0)-(h_1,h_2)\cdot(0{,}0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\dfrac{|\,h_1|\;\,h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Usando coordenada polares: $\begin{cases}h_1=r\cos\theta\\ h_2=r\,sen\,\theta\\ r^2={h_1}^2+{h_2}^2\end{cases}$ tenemos que:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\dfrac{|\,h_1|\;\,h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|\,h_1|\;\,h_2}{h_1^2+h_2^2}=\lim_{r\to0}\frac{|r\cos\theta|\,r\,sen\,\theta}{r^2}$$
$$=|\cos\theta|\;sen\,\theta$$

Por lo tanto el límite no existe y la función no es diferenciable en $(0{,}0)$.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo plantear el criterio de continuidad en un punto y demostrar la existencia del límite. Sabe calcular las derivadas direccionales de la función en un punto. Sabe demostrar la no diferenciabilidad de la función en un punto.	No sabe cómo plantear el criterio de continuidad, no calcula el límite, no calcula las derivadas direccionales y no demuestra la no diferenciabilidad de la función en el punto indicado.	No plantea el criterio de continuidad, pero demuestra que el límite existe y es igual a la imagen de la función en el punto dado. Calcula sólo las derivadas parciales en lugar de las derivadas direccionales .	Plantea el criterio de continuidad, demuestra que el límite existe y es igual a la imagen de la función en el punto dado. No considera un vector unitario pero calcula las derivadas direccionales de la función en un punto, sin concluir que todas éstas existen. No sabe cómo demostrar la diferenciabilidad o no de la función en el punto dado.	Plantea el criterio de continuidad y demuestra que el límite existe y es igual a la imagen de la función en el punto dado, concluyendo que la función es continua en dicho punto. Calcula las derivadas direccionales para cualquier vector unitario en el punto dado, y concluye que todas éstas existen. Demuestra que la función no es diferenciable en el punto dado.
	0	**1-10**	**11-18**	**19-25**

TEMA 2-2
Dada la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)|x|\sqrt{|y|}}{|x|+|y|}, & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demostrar que f es diferenciable en el punto $(0,0)$.
b) Según el resultado en (a), ¿qué puede decir acerca de la continuidad de la función en el punto $(0,0)$? Justifique su respuesta.

<u>Solución:</u>

(a) Probemos que f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

usando coordenadas polares: $\begin{cases} h_1 = r\cos\theta \\ h_2 = r\,sen\,\theta \\ r^2 = {h_1}^2 + {h_2}^2 \end{cases}$. Entonces,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1+h_2)|h_1|\sqrt{|h_2|}}{(|h_1|+|h_2|)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta + rsen\,\theta)\,|r\cos\theta|\,\left(\sqrt{|r\,sen\,\theta|}\right)}{(|r\cos\theta| + |rsen\,\theta|)\ r}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^2\sqrt{r}(\cos\theta + sen\,\theta)\,|\cos\theta|\,\left(\sqrt{|\,sen\,\theta|}\right)}{r^2(|\cos\theta| + |sen\,\theta|)}$$

Nótese que $\lim\limits_{r\to 0}\sqrt{r} = 0$. Como $(|\cos\theta| + |sen\,\theta|)$ nunca se anulará pues $\cos\theta$ y $sen\,\theta$ no serán cero simultáneamente, tenemos que

$$\left|\frac{(\cos\theta+sen\,\theta)\,|\cos\theta|\,\left(\sqrt{|\,sen\,\theta|}\right)}{|\cos\theta|+|sen\,\theta|}\right| \leq \frac{(|\cos\theta|+|sen\,\theta|)\ |\cos\theta|\,\left(\sqrt{|\,sen\,\theta|}\right)}{|\cos\theta|+|sen\,\theta|} \leq 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1+h_2)|h_1|\sqrt{|h_2|}}{(|h_1|+|h_2|)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Concluimos que f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

- (b) Según el resultado en (a), podemos afirmar por teorema que la función es continua en el punto $(0,0)$. A continuación, probaremos dicha afirmación, es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)|x|\sqrt{|y|}}{|x|+|y|} = f(0,0) = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)|x|\sqrt{|y|}}{|x|+|y|} = \lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta + rsen\,\theta)\,|r\cos\theta|\,\sqrt{|r\,sen\,\theta|}}{|r\cos\theta| + |rsen\,\theta|}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^2\sqrt{r}\,(\cos\theta + sen\,\theta)\,|\cos\theta|\,\sqrt{|sen\,\theta|}}{r\,(|\cos\theta| + |sen\,\theta|)}$$

Como $\lim\limits_{r\to 0} r\sqrt{r} = 0$ y $\left|\dfrac{(\cos\theta+sen\,\theta)\,|\cos\theta|\,\left(\sqrt{|\,sen\,\theta|}\right)}{|\cos\theta|+|sen\,\theta|}\right| \leq 1$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)|x|\sqrt{|y|}}{|x|+|y|} = 0.$$

Por tanto, la función es continua en el punto $(0,0)$.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe cómo plantear el límite para estudiar la diferenciabilidad de la función en un punto y prueba que este límite es cero. Sabe identificar el resultado del teorema que asocie la diferenciabilidad con la continuidad de la función, y finaliza probando la continuidad de la función en el punto indicado, usando el criterio correctamente.	El estudiante no sabe cómo plantear el límite para estudiar la diferenciabilidad de la función en un punto y por ende no prueba que da cero. No sabe identificar ningún resultado que asocie la diferenciabilidad con la continuidad de la función.	El estudiante plantea el límite para estudiar la diferenciabilidad de la función en un punto y prueba que este límite es cero. Pero no sabe identificar ningún resultado que asocie la diferenciabilidad con la continuidad de la función.	El estudiante plantea el límite para estudiar la diferenciabilidad de la función en un punto y prueba que este límite es cero. Pero no sabe identificar ningún resultado que asocie la diferenciabilidad con la continuidad de la función, sin embargo, prueba la continuidad de la función en el punto indicado.	El estudiante plantea el límite para estudiar la diferenciabilidad de la función en un punto y prueba que este límite es cero. Identifica el resultado del teorema que asocie la diferenciabilidad con la continuidad de la función, y finaliza probando la continuidad de la función en el punto indicado, usando el criterio correctamente.
	0	**1-10**	**11-18**	**19-25**

TEMA 2-3

Dada la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y, & si \quad x + y \geq 0 \\ \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & si \quad x + y < 0 \end{cases}$$

a) Determinar los puntos de la frontera donde la función f es continua.
b) Hallar las derivadas parciales en el punto $(0,0)$.
c) ¿Qué puede decir acerca de la diferenciabilidad de la función f en el punto $(0,0)$?

Solución:

- (a) Observemos que el dominio de definición de la función está dado por: $D = D_1 \cup D_2$; donde
  $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y \geq 0\}$ y $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y < 0\}$.

Entonces, D_1 y D_2 comparten la misma frontera, es decir,
$Fr(D_1) = Fr(D_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = -x\}$.
Para estudiar la continuidad de f, consideremos un punto en la frontera, digamos $(a,-a)$ y estudiemos los límites, supongamos:

CASO 1. $a \neq 0$. Calculamos los límites:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_1}} (x^2 + 2y) = a^2 - 2a$$

y

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_2}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{a^2(-a)}{a^2 + a^2} = \frac{-a}{2}$$

Entonces, para que f sea continua en $(a,-a)$ se debe cumplir que $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = f(a,-a)$. Por un lado,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) \Longrightarrow a^2 - 2a = \frac{-a}{2}$$

$$\Longrightarrow 2a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a(2a - 3) = 0$$

Como $a \neq 0$, tenemos que $2a - 3 = 0$, así $a = \frac{3}{2}$. Además,
$f\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-3}{4}$. Por lo tanto, f sea continua en $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

CASO 2. $a = 0$. Calculamos los límites:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} (x^2 + 2y) = 0$$

y

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2\, r\sin\theta}{r^2} = 0$$

usando coordenadas polares. Entonces, f sea continua en $(0,0)$ ya que se cumple que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Así, los puntos de la frontera donde la función f es continua son: $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y $(0,0)$.

- (b) Calculemos las derivadas parciales en el punto $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)}{t}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^2+0}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} t = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(t,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\frac{t^2.0}{t^2+0}}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{0}{t} = 0 \end{cases}$$

Así, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Ahora,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)}{t}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(0,t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{0+2t}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} 2 = 2 \\ \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(0,t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\frac{0^2.t}{0+t^2}}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{0}{t} = 0 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(0,t)}{t} \neq \lim\limits_{t\to 0^-}\frac{f(0,t)}{t}$ la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ no existe.

- (c) La función no es diferenciable en $(0,0)$ ya que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ no existe.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante identifica la frontera. Sabe cómo plantear el límite para los puntos que están en dicha frontera. Sabe que para que la función sea continua debe igualar los limites calculados en cada recinto y obtener los puntos que satisfagan el criterio de continuidad. Sabe cómo calcular las derivadas parciales. Sabe que la diferenciabilidad de la función en un punto dependerá de la existencia o no de las derivadas parciales en dicho punto..	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	El estudiante no identifica la frontera y no sabe cómo plantear el límite para los puntos que están en dicha frontera. No sabe cómo calcular los límites en cada recinto para igualarlos y aplicar el criterio de continuidad. No sabe calcular las derivadas parciales y por ende no realiza el estudio de la diferenciabilidad que se basa en la existencia o no de dichas derivadas parciales en el punto.	El estudiante identifica la frontera. Aplica el criterio de continuidad en los puntos frontera, y plantea los límites en cada recinto, pero comete errores en los cálculos y no obtiene todos los puntos donde f es continua. Plantea las derivadas parciales en el punto, según los recintos que comparten la frontera, pero no logra calcularlas. No sabe cómo estudiar la diferenciabilidad de la función en un punto pues no pudo llegar a ver la existencia o no de las derivadas parciales en dicho punto.	El estudiante identifica la frontera. Aplica el criterio de continuidad en los puntos frontera, plantea y calcula los límites en cada recinto, igualándolos para obtener los puntos donde f es continua. Plantea las derivadas parciales según los recintos que comparten la frontera, pero comete pequeños errores, lo que lo conduce a un estudio erróneo de la diferenciabilidad de la función en un punto.	El estudiante identifica la frontera. Aplica el criterio de continuidad en los puntos frontera, plantea y calcula los límites en cada recinto, igualándolos para obtener todos los puntos donde f es continua. Plantea las derivadas parciales según los recintos que comparten la frontera, y las calcula correctamente. Concluye que la función no es diferenciable ya que una de las derivadas parciales no existe.
	0	**1-10**	**11-18**	**19-25**

TEMA 3-1

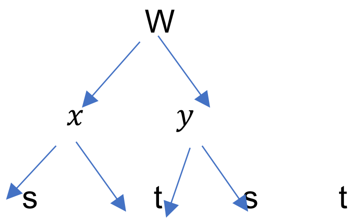
Sean $w = f(x, y)$ de Clase $C^{(2)}$, $x = e^s \cos t,\quad y = e^s \sin t.$
Hallar:

a) $\frac{\partial w}{\partial s}$

b) $\frac{\partial w}{\partial t}$

c) $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$

Encontremos las derivadas parciales de primer y segundo orden



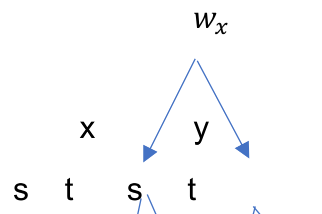
$$\frac{\partial x}{\partial s} = e^s \cos t,\quad \frac{\partial x}{\partial t} = -e^s \sin t$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = e^s \sin t,\quad \frac{\partial x}{\partial t} = e^s \cos t$$

(1) $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y}$

(2) $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial y}$

Calculemos las parciales segundas de (1) y (2), con respecto a s y t respectivamente,



$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left[e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y}\right]$

$= \frac{\partial}{\partial s}\left[e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial s}\left[e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y}\right]$

$= e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^s \cos t\,\frac{\partial w_x}{\partial s} + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y} + e^s \sin t\,\frac{\partial w_y}{\partial s}$

$= e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^s \cos t\left[\frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right] + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y} + e^s \sin t\left[\frac{\partial w_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right]$

$= e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^s \cos t\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,e^s \cos t + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\,e^s \sin t\right] + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y} +$
$e^s \sin t\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\,e^s \cos t + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,e^s \sin t\right]$

$= e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^{2s} cos^2 t\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{2s} \cos t \sin t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y} +$
$e^{2s} \sin t \cos t\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + e^{2s} \sin^2 t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

$= e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^{2s} cos^2 t\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2e^{2s} \cos t \sin t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y} + e^{2s} \sin^2 t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$

Por lo que

(3) $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = e^s \cos t\,\frac{\partial w}{\partial x} + e^{2s} cos^2 t\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2e^{2s} \cos t \sin t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$
$\qquad + e^s \sin t\,\frac{\partial w}{\partial y} + e^{2s} \sin^2 t\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

TEMA 3-2

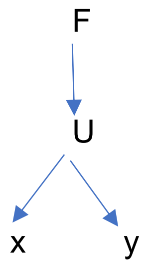
Sean f y g de clase $C^{(2)}$. Si $z = xf(x+y) + yg(x+y)$
Hallar:

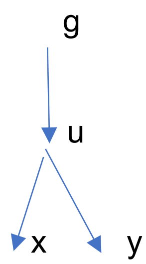
d) $\frac{\partial z}{\partial x}$

e) $\frac{\partial z}{\partial y}$

f) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Sea $u = x + y$, calculemos las derivadas parciales de primer orden, tomando en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$





$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(xf(x+y)\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(yg(x+y)\big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\big(xf(u)\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(yg(u)\big)$$

$$= f(u) + x\frac{\partial f(u)}{\partial x} + y\frac{\partial g(u)}{\partial x}$$

$$= f(u) + xf'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + yg'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= f(u) + xf'(u) + yg'(u).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(xf(x+y)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(yg(x+y)\big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\big(xf(u)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(yg(u)\big)$$

$$= x\frac{\partial f(u)}{\partial y} + g(u) + y\frac{\partial g(u)}{\partial y}$$

$$= xf'(u)\frac{\partial u}{\partial y} + g(u) + yg'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= xf'(u) + g(u) + yg'(u)$$

Calculando las parciales de segundo orden se tiene que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(f(u) + xf'(u) + yg'(u)\big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\big(f(u)\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(xf'(u)\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(yg'(u)\big)$$

$$= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + f'(u) + x\frac{\partial}{\partial x}\big(f'(u)\big) + y\frac{\partial}{\partial x}\big(g'(u)\big)$$

$$= f'(u) + f'(u) + xf''(u)\frac{\partial u}{\partial x} + yg''(u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= 2f'(u) + xf''(u) + yg''(u).$$

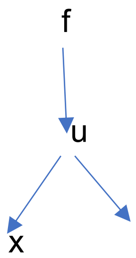
TEMA 3-3

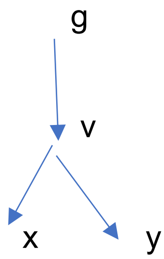
Sean f y g de clase $C^{(2)}$. Si $z = f(x + e^y) + g(x - e^y)$, probar que

$$e^{2y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Solución

Sea $u = x + e^y$ y $v = x - e^y$, calculando las derivadas parciales se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -e^y$





$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(f(u) + g(v)) = \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(v)}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Así, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du} + \frac{dg}{dv} = f'(u) + g'(v)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{du} + \frac{dg}{dv}\right) = \frac{\partial f'(u)}{\partial x} + \frac{\partial g'(v)}{\partial x}$$

$$= f''(u)\frac{\partial u}{\partial x} + g''(v)\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v)$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f(u) + g(v)) = \frac{\partial f(u)}{\partial y} + \frac{\partial g(v)}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y f'(u) - e^y g'(v)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y\frac{df}{du} - e^y\frac{dg}{dv}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y\frac{df}{du}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y\frac{dg}{dv}\right)$$

$$= e^y f'(u) + e^y f''(u)\frac{\partial u}{\partial y} - e^y g'(v) - e^y g''(v)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= e^y f'(u) + e^{2y} f''(u) - e^y g'(v) + e^{2y} g''(v).$$

Así,

$$e^{2y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2y}\big(f''(u) + g''(v)\big) - \big(e^y f'(u) + e^{2y} f''(u) - e^y g'(v) + e^{2y} g''(v)\big) + \big(e^y f'(u) - e^y g'(v)\big) = 0$$

Rúbrica general:

El estudiante debe estar en la capacidad de resolver ejercicios demostrativos, de ecuaciones diferenciales parciales, utilizando regla de la cadena.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Realiza los cambios de variables adecuados, y plantea un diagrama, determinando las variables de cada funcion. Pero no calcula ningun derivada parcial, o lo hace de forma incorrecta.	Realiza los cambios de variables adecuados, plantea un diagrama determinando las variables de cada funcion, encuentra las derivadas parciales de primer orden de forma correcta, tomando en cuentas las tecnicas de derivacion correspondientes, entre ellas regla de la cadena. Pero no calcula las derivas parciales de segundo orden, o lo hace de forma incorrecta	Realiza los cambios de variables adecuados, plantea un diagrama determinando las variables de cada funcion, encuentra las derivadas parciales de primer y segundo orden de forma correcta, cometiendo errores no significativos, o no demuestra la igualdad de la ecuacion, o lo hace de forma incorrecta	Realiza los cambios de variables adecuados, plantea un diagrama determinando las variables de cada funcion, encuentra las derivadas parciales de primer y segundo orden solicitadas o demuestrando la igualdad de la ecuacion.
	0	1-10	11-18	19-20

TEMA 4-1

La elevación de una montaña sobre el nivel del mar para un punto (x,y) este dada por la expresión $3000\,e^{-\frac{x^2+2y^2}{100}}$ con x, y en metros. El eje X positivo apunta hacia el este y el eje Y positivo apunta hacia el norte. Una montañista está directamente ubicada sobre el punto (10,10). Si la montañista se mueve hacia el noroeste, ¿ascenderá o descenderá y con qué pendiente? Justifique su procedimiento.

La escaladora se está moviendo en la dirección de $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1,1)$

Como la función es diferenciable pues sus derivadas parciales son continuas, entonces $f(x,y) = 3000e^{-(x^2+2y^2)/100} \Rightarrow \nabla f(x,y) = 3000e^{\frac{-(x^2+2y^2)}{100}}\left(-\frac{x}{50}, -\frac{y}{25}\right)$

Entonces $\nabla f(x,y) == -600e^{-3}(1,2)$

Entonces se mueve en una pendiente de

$$D_u(10,10) = -600e^{-3}(1,2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1,1) = (-300\sqrt{2})e^{-3} \approx -21.1229$$

Ella va a descender y la pendiente es de aproximadamente -21

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño literal**			
El estudiante debe ser capaz de aplicar el gradiente y la derivada direccional en problemas de la vida real	**Inicial**	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo plantear o no plantea la gráfica de A	El estudiante interpreta y calcula el vector unitario correctamente	El estudiante calcula correctamente el gradiente justificando diferenciabilidad	El estudiante calcula correctamente La derivada direccional y responde adecuadamente las preguntas
	0	1-5	6-12	13-15

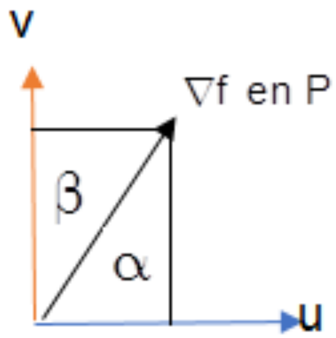
TEMA 4-2

Sean u=(3i−4j)/5 y v=(4i+3j)/5 y suponga que en algún punto P(x,y), Duf=−6 y Dvf=17

Determine

a) ∇f en P(x,y)

b) Note que en la parte a) del ejercicio $\|\|\nabla f\|\|2=(Duf)^2+(Dvf)^2$. Demuestre que esta relación siempre es válida si u y v son perpendiculares (ver figura)



a) $D_uf = \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)(f_x,f_y) = -6$ así $3f_x - 4f_y = -30$

$$D_vf = \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)(f_x,f_y) = 17 \text{ así } 4f_x + 3f_y = 85$$

Resolviendo el sistema tenemos $f_x = 10$, $f_y = 15$

b)

$$\begin{aligned}(D_uf)^2 + (D_vf)^2 &= \left(\|\nabla f(p)\| \bullet \boxed{\|u\|}\, cos\,\alpha\right)^2 + \left(\|\nabla f(p)\| \bullet \boxed{\|u\|}\, cos\,\beta\right)^2 \\ &= \|\nabla f(p)\|^2 cos^2\alpha + \|\nabla f(p)\|^2 cos^2\beta \\ &= \|\nabla f(p)\|^2 (cos^2\alpha + cos^2\beta), \text{ pero, } \alpha+\beta = 90^0 \\ &= \|\nabla f(p)\|^2 \boxed{(cos^2\alpha + sen^2\alpha)} \\ &= \|\nabla f(p)\|^2\end{aligned}$$

Rúbrica

Capacidades deseadas	**Desempeño literal**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar el gradiente y la derivada direccional en problemas de la vida real.	No sabe cómo plantear o no plantea la gráfica de A	El estudiante interpreta y calcula el vector unitario correctamente	El estudiante calcula correctamente el gradiente justificando diferenciabilidad	El estudiante calcula correctamente La derivada direccional y responde adecuadamente las preguntas
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 4-3

La temperatura T en grados Celsius en (x, y, z) está dada por $T(x,y,z) = \frac{10}{(x^2+y^2+z^2)}$ donde las distancias están en metros. Una abeja vuela alejándose del punto más caliente en el origen siguiendo una trayectoria t (en segundos) es $r(t) = t\cos(\pi t)\vec{\imath} + t\,sen\,(\pi t)\vec{\jmath} + t\vec{k}$
Determine la razón de cambio de T respecto al punto que alcanza a la distancia recorrida en $t = 1$.

$$\nabla T(x,y,z) = \left(-\frac{10(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{10(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{10(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

$$= -\frac{20}{(x^2+y^2+z^2)}(x,y,z)$$

$$r(t) = (t\cos\pi\,t, t\,sen\,\pi\,t, t) \quad \rightarrow \quad r(1) = (-1,0,1)$$

Luego $\nabla T(-1,0,1) = -5(-1,0,1)$

$u = \frac{r'(1)}{\|r'(1)\|} = \frac{(-1,-\pi,1)}{\sqrt{2+\pi^2}}$ es el vector unitario tangente en $(-1,0,1)$.

Entonces

$$D_u T(-1,0,1) = u, \nabla T(-1,0,1) = \frac{(-1,-\pi,1)(5,0,-5)}{\sqrt{2+\pi^2}} = -\frac{10}{\sqrt{2+\pi^2}}$$

$$\approx -2.9026$$

Por lo tanto, la temperatura disminuye aproximadamente 2.9℃ por metro recorrido, cuando la abeja se encuentra en (-1,0,1).

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño literal b)**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar el gradiente y la derivada direccional en problemas de la vida real	No sabe cómo plantear el problema	El estudiante calcula correctamente el gradiente justificando diferenciabilidad	El estudiante interpreta y calcula el vector unitario correctamente	El estudiante calcula correctamente La derivada direccional y responde adecuadamente la pregunta.
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 5-1

Dada una curva C con vector posición $\vec{r}(t) = (sen(4t), \cos(4t), 2t^{\frac{3}{2}})$ que describe el movimiento de una hormiga en un tiempo dado t.

a) Halle el vector velocidad y el vector aceleración de la hormiga en el tiempo t

b) Halle la ecuación de la recta tangente para $t = 1$.

c) Determine el plano Normal en $t = 1$

a) $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left(4\,cos(\,4t), -4\,sen(\,4t), 3t^{\frac{1}{2}}\right)$ y $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$

$$= \left(-16\,sen(\,4t), -16\,cos(\,4t), \frac{3}{2\sqrt{t}}\right)$$

b) $\vec{r}(1) = (\text{sen}4, \cos 4, 2)$ Como el vector velocidad en $\vec{v}(1) = (4\cos 4, -\ 4\,\text{sen}4, 3)$ es tangente a la curva descrita por $\vec{r}(t)$ en el punto $(\text{sen}4, \cos 4, 2)$, las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son:

$$\begin{cases} x = sen\,4 + (4\,cos\,4)t \\ y = cos\,4 - (4\,sen\,4)t \quad , \quad t \in R \\ \quad z = 2 + 3t \end{cases}$$

c) El vector T es igual a $T = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{5}\left(4\,cos(\,4t), -4\,sen(\,4t), 3t^{\frac{1}{2}}\right)$

Por lo tanto: EL vector normal es $T = \frac{1}{5}(4\,cos\,4\,, -4\,sen\,4\,, 3)$

Así, la ecuación del plano normal es

$$\left(\frac{4}{5}cos\,4\right)x - \left(\frac{4}{5}sen\,4\right)y + \frac{3}{5}z = \left(\frac{4}{5}cos\,4\right)sen4 - \left(\frac{4}{5}sen\,4\right)c\,os\,4 + \frac{6}{5}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño literal b)**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de determinar conceptos asociados a la derivad de una función vectorial que representa trayectoria en el espacio	No sabe cómo determinar ninguno de los conceptos solicitados	El estudiante calcula el vector velocidad y aceleración pero tiene problemas para hallar los demás.	El estudiante calacual correctamente los vectores velicidad y aceleracion y la ecuacion de la recta solicitada, pero tiene problemas para hallar al ecuacion del plano osculador.	El estudiante calcula correctamente todos los conceptos solicitados o comete pocos errores no significativos.
	0%	1-5	6-12	13-15

TEMA 5-2

Dada la curva C con ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = sen(2t) \\ y = \frac{t}{\pi} \\ z = cos(2t) \end{cases}, t > 0$

Determine las ecuación del plano osculador en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$.

Primero se determina el valor del parámetro t, para el cual se obtiene el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$

$$sen(2t) = 1, \quad \frac{1}{4} = \frac{t}{\pi} \quad y \quad cos(2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

C puede ser descrita por la función vectorial $\vec{r}(t) = \left(sen(2t), \frac{t}{\pi}, cos(2t)\right)$

El vector tangente $\vec{r}'(t)$ es:

$$\vec{r}'(t) = \left(2\,cos(2t), \frac{1}{\pi}, -2\,sen(2t)\right)$$

Su magnitud

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{4\cos^2(2t) + \frac{1}{\pi^2} + 4\,\mathrm{sen}^2(2t)} = \sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}}$$

Así $\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\left(2\,cos(2t), \frac{1}{\pi}, -2\,sen(2t)\right)$

El vector tangente unitario en el punto $P\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$ es el vector

$$\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\left(0, \frac{1}{\pi}, -2\right)$$

El vector $\vec{T}'(t)$ es :

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}(-4\,sen(2t), 0, -4\,cos(2t))$$

Su magnitud es

$$\left|\vec{T}'(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\sqrt{16sen^2(2t) + 16cos^2(2t)} = \frac{4}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}$$

$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$ es el vector $\vec{N}(t) = \frac{1}{4}(-4\,sen(2t), 0, -4\,cos(2t))$

$$\vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1,0,0)$$

El vector binormal

$$\vec{B}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \bar{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \vec{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\left(0, \frac{1}{\pi}, -2\right) \times (-1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\pi^2}}}\left(0, 2, \frac{1}{\pi}\right)$$

Por lo tanto, el plano osculador está dado por

$$\left(x - 1, y - \frac{1}{4}, z\right) \cdot (0, 2\pi, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2z + 4\pi y = \pi$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante debe ser capaz de calcular el plano osculador	**Inicial**	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo plantear el problema	El estudiante Calcula el vector tangente unitario.	El estudiante Calcula el vector Normal unitario.	El estudiante representa correctamente la ecuación del plano osculador
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 5-3

Dada la curva C descrita por $r(t) = \cos(\pi t)\,\vec{\imath} + \ sen\ (\pi t)\vec{\jmath} + t\overrightarrow{k}$; $0 \leq t \leq 2\pi$, determine los puntos de la curva donde el plano normal es ortogonal al plano $\pi: x + z = -7$

El vector tangente $\vec{r}'(t)$ a la curva C es:

$$\vec{r}'(t) = (-\,sen\,t\,, cos\,t\,, 1)$$

El plano normal es el plano cuyo vector normal tiene la dirección del vector tangente.

Por otra parte, el vector normal del plano es π es $\vec{n} = (1,0,1)$.

Los dos planos serán ortogonales si sus vectores normales son ortogonales, es decir, si:

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-\,sen\,t\,, cos\,t\,, 1) \cdot (1,0,1) = 0 \Leftrightarrow -\,sen\,t + 1 = 0 \Leftrightarrow sen\,t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Para hallar el punto de la curva, debemos hallar $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Es decir $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$

Por lo tanto, en el punto $Q\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$de la curva el plano normal a la curva es ortogonal al plano dado.

Rúbrica

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante debe ser capaz de determinar los puntos donde de una curv donde se producen características de ortogonalidad entre planos	**Inicial**	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo plantear el problema	El estudiante obtiene el vector tangente y el vector normal al plano.	El estudiante aplica la condición para que los planos sean perpendiculare s y realiza el producto punto, pero no sabe como fianlizar el ejercicio	A más de haber realizado todo lo anterior, iguala los dos vectores y concluye que el punto obtenido es el adecuado.
	0	1-6	7-12	13-15

TEMA 6-1
Parametrice la curva C de ecuación $(2y+x)^2 = -4y(2-x) - 4(x+1)$

$$(2y+x)^2 = -4y(2-x) - 4(x+1) \Rightarrow 4y^2 + 4yx + x^2 = -8y + 4yx - 4x - 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y^2 + x^2 = -8y - 4x - 4 \Rightarrow 4y^2 + 8y + x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow 4\left(y^2 + 2y + 1\right) + x^2 + 4x + 4 = 4$$
$$\Rightarrow 4(y+1)^2 + (x+2)^2 = 4 \Rightarrow (y+1)^2 + \frac{(x+2)^2}{4} = 1$$

Observe que se obtiene la ecuación de una elipse, y

$$\frac{x+2}{2} = \cos t \quad \text{y} \quad y+1 = \operatorname{sen} t$$

satisfacen la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{4} + (y+1)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la curva C son:

$$x = -2 + 2\cos t, \quad y = -1 + \operatorname{sen} t \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aprametrizar una curva dada C	No sabe cómo plantear el problema	El estudiante opera algebraicamen te la expresion pero comete errores.	El estudiante obtiene la ecuacion de la elipse pero comete errores al probar que se satisface la ecuación	El estudiante resuelve correctamente el ejercicio y muestra las ecuaciones paramétricas solcicitadas
	0	1-5	7-12	13-15

TEMA 6-2

Sea R la region definida por $R = \{(x, y) \in R^2; y \geq |x| + 2 \,; y \leq 4 - x\hat{}2\}$, determine una parametrización de la curva frontera dela region r en sentido horario.

Una vez bosquejada la R en el plano se puede verificar que otra forma de definir la región R es: $\begin{cases} y = 4 - x^2 \; si \; -1 \leq x \leq 1 \\ y = x + 2 \; si \; 0 \leq x \leq 1 \\ y = -x + 2 \; si - 1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

Parametrizando en el sentido indicado:

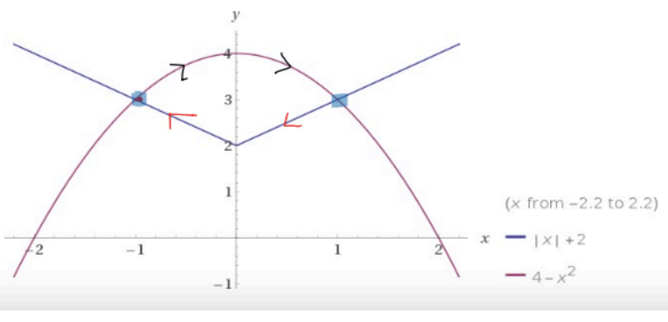
$C_1: y = 4 - x^2, -1 \leq x \leq 1 \rightarrow \; r_1(t) = (t, 4 - t^2), -1 \leq t \leq 1$

$C_2: y = x + 2 \; si \; 0 \leq x \leq 1 \rightarrow \; r_2(u) = (1 - u, 3 - u), -1 \leq u \leq 1 \rightarrow$
$1 \leq u + 1 \leq 2 \rightarrow t = u + 1 \;\; \rightarrow r_2(t) = (2 - t, 4 - t), 1 < t \leq 2$

$C_3: y = -x + 2 \; si \; -1 \leq x \leq 0 \rightarrow \; r_3(s) = (-s, 2 + s), 0 \leq s \leq 1 \rightarrow$
$2 \leq s + 2 \leq 3 \rightarrow t = s + 2 \;\; \rightarrow r_3(t) = (2 - t, t), 2 < t \leq 3$

Entonces una parametrización en el sentido indicado es:

$$r(t) = \begin{cases} (t, 4 - t^2), \; -1 \leq t \leq 1 \\ (2 - t, 4 - t), 1 < t \leq 2 \\ (2 - t, t), 2 < t \leq 3 \end{cases}$$



Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante debe ser capaz de calcular el plano osculador	**Inicial**	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe cómo deinir la región requerida en el ejercicio	El estudiante define correctamente la región pero comete errores al parametrizar los tres segmentos de curva	El estudiante define correctamente la región pero comete error al parametrizar uno de los tres segmentos de curva	El estudiante paaremtriza correctamente la curva o lo hace con con algún error poco significativo
	0	1-6	7-12	13-15