espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2023	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Primera	Fecha:	20 de noviembre de 2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ______________________ Número de matrícula: ______________ Paralelo: ________

1. (10 puntos) Encuentre la solución general de la EDO de primer orden

$$(t^2-1)y' + (t^2+1)y = e^{-t}, \quad t > 0.$$

2. (10 puntos) Un equipo de biólogos descubrió un tipo especial de población bacteriana que, al invadir un cultivo de $N\,\mathrm{cm}^2$, se propaga a una tasa que es proporcional al producto del número de cm^2 afectados por el número de cm^2 no afectados por la bacteria en un tiempo t. En uno de los experimentos llevados a cabo para estudiar esta bacteria se usó un cultivo de $15\,\mathrm{cm}^2$. Inicialmente, la población bacteriana ocupó $2\,\mathrm{cm}^2$. Al día siguiente, la bacteria había afectado un total de $5\,\mathrm{cm}^2$. Determine el tiempo que le tomó a la bacteria afectar el $80\,\%$ de este cultivo.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{M}_{2\cdot 2}$, de matrices 2×2, considere el siguiente conjunto de vectores:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) (5 puntos) ¿Qué condición (o condiciones) debe satisfacer una matriz $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ para que esté en gen S? Determine si $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{gen} S$.

(b) (5 puntos) ¿Es S un connjunto linealmente independiente?

4. Sea $\mathbb{W} = \{p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{P}_2 \colon p(3) + p(-1) = p'(2)\}$.

(a) (4 puntos) Demuestre que $\mathbb{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2$

(b) (4 puntos) Encuentre una base de $\mathbb{W}$ y determine su dimensión.

(c) (2 puntos) ¿Pertenece $1 - 2x + x^2$ a $\mathbb{W}$?

5. Resuelva solo uno de los siguientes problemas:

   (a) (10 puntos) Considere la EDO de segundo orden

   $$ty'' + 2y' + ty = 0, \quad t > 0.$$

   Se conoce que $y_1(t) = \frac{\cos t}{t}$ es solución de esta EDO. Halle una segunda solución $y_2(t)$, de modo que $\{y_1(t), y_2(t)\}$ sea una base para el espacio vectorial de soluciones de la EDO. *Atención*: No basta hallar la solución $y_2(t)$ únicamente, también debe demostrar $\{y_1(t), y_2(t)\}$ es una base en el interval $(0, +\infty)$.

   (b) (10 puntos) Un circuito en serie tiene un capacitor de 10^{-5} faradios, un resistor de 3×10^2 ohmios, y un inductor de 0,2 henrios. La carga inicial en el capacitor es 10^{-6} culombios y no hay corriente inicial. Halle la carga $Q(t)$ en el capacitor en cualquier tiempo t.