FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 1

1. (5 PUNTOS)

Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA. Demuéstrela en caso de ser VERDADERA, o proporcione un contraejemplo en caso de ser FALSA.

"Si $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *es una función par, entonces* f *es continua en* $\mathbb{R}$*."*

2. (5 PUNTOS)

Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA. Demuéstrela en caso de ser VERDADERA, o proporcione un contraejemplo en caso de ser FALSA.

"Si $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *es una función impar, entonces* f *es continua en* $\mathbb{R}$*."*

3. (5 PUNTOS)

Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA. Demuéstrela en caso de ser VERDADERA, o proporcione un contraejemplo en caso de ser FALSA.

"Sea $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *una función continua en su dominio tal que* $g(x) = |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$*; entonces,* f *también es continua en* $\mathbb{R}$*."*

4. (5 PUNTOS)

Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA. Demuéstrela en caso de ser VERDADERA, o proporcione un contraejemplo en caso de ser FALSA.

"Sea la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *tal que* $\left(\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2\right)$, *entonces* $\left(\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2\right)$*."*

5. (5 PUNTOS)

Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA. Demuéstrela en caso de ser VERDADERA, o proporcione un contraejemplo en caso de ser FALSA.

"Sea la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *tal que* $\left(\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = -2 \right)$,
entonces $\left(\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2 \right)$*."*

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 2

6. (6 PUNTOS)

Suponga que la cantidad C de conejos, en cierta región, aumenta con el tiempo t y está regida por la siguiente expresión:

$$C(t) = \frac{10\,000}{\pi}\, arctan\left(\frac{t}{1+t}\right) \quad ; \quad t \geq 0$$

Determine cuál es el valor límite de la cantidad de conejos $C(t)$, a través del tiempo, a la cual se podría llegar en esta región.

7. (6 PUNTOS)

Suponga que la cantidad de unidades U, de cierto producto en inventario, disminuye con el tiempo t y está regida por la siguiente expresión:

$$U(t) = 20\left(5 - \frac{t^2}{(t+2)^2}\right) \quad ; \quad t \geq 0$$

Determine cuál es el valor límite de la cantidad de unidades $U(t)$, a través del tiempo, a la cual se podría llegar con este inventario.

8. (6 PUNTOS)

Suponga que la cantidad C, de personas que se contagian con un virus, aumenta con el tiempo t y está regida por la siguiente expresión:

$$C(t) = 100\,000\left(1 + \frac{7}{2 + e^{-t}}\right) \quad ; \quad t \geq 0$$

Determine cuál es el valor límite de la cantidad de personas $C(t)$, a través del tiempo, que se podrían contagiar con este virus.

9. (6 PUNTOS)

Suponga que el porcentaje P, de conocimiento de los seres humanos, disminuye en el tiempo t después de haberlo aprendido y está regido por la siguiente expresión:

$$P(t) = Q + (100 - Q)e^{-0.7t} \quad ; \quad t \geq 0$$

Si Q es el porcentaje de conocimiento que nunca olvidaremos, determine cuál es el valor límite del porcentaje $P(t)$, a través del tiempo, si $Q = 60$.

10. (6 PUNTOS)

Suponga que el costo C en $\mathrm{millones\ de\ dólares}$, de una compañía, aumenta con el tiempo t y está regido por la siguiente expresión:

$$C(t) = 2\left(10 - \frac{1}{2 + 10^t}\right) \quad ; \quad t \geq 0$$

Determine cuál es el valor límite del costo en $\mathrm{millones\ de\ dólares}$ $C(t)$, a través del tiempo, para esta compañía.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 3

11. (6 PUNTOS)

Dada la función $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = x^2 ln(x) - 1$$

Verifique si se cumple la hipótesis del TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS en el intervalo $[1, e]$. En caso de cumplirse, compruebe que existe al menos un valor de c entre 1 y e, tal que $f(c) = 0$. Considere que $(e^2 \approx 7.39)$.

12. (6 PUNTOS)

Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = x\ sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{5}$$

Verifique si se cumple la hipótesis del TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS en el intervalo $[1, 3]$. En caso de cumplirse, compruebe que existe al menos un valor de c entre 1 y 3, tal que $f(c) = 0$.

13. (6 PUNTOS)

Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{5}$$

Verifique si se cumple la hipótesis del TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS en el intervalo $[2, 4]$. En caso de cumplirse, compruebe que existe al menos un valor de c entre 2 y 4, tal que $f(c) = 0$.

14. (6 PUNTOS)

Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = x\, e^{-x} - \frac{1}{4}$$

Verifique si se cumple la hipótesis del TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS en el intervalo $[0, 1]$. En caso de cumplirse, compruebe que existe al menos un valor de c entre 0 y 1, tal que $f(c) = 0$. Considere que $(e^{-1} \approx 0.37)$.

15. (6 PUNTOS)

Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \frac{1}{2} - x\, e^{x}$$

Verifique si se cumple la hipótesis del TEOREMA DE VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES CONTINUAS en el intervalo $[0, 1]$. En caso de cumplirse, compruebe que existe al menos un valor de c entre 0 y 1, tal que $f(c) = 0$. Considere que $(e \approx 2.72)$.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 4

16. (8 PUNTOS)

Dada la función $f(x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; aplicando la definición de derivada:

$$D_x\big(f(x)\big) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Obtenga $D_x\big(f(x)\big)$ y determine la ecuación de la recta tangente a f en $x_0 = -1$.

17. (8 PUNTOS)

Dada la función $f(x) = \frac{2}{3}x - 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$; aplicando la definición de derivada:

$$D_x\big(f(x)\big) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Obtenga $D_x\big(f(x)\big)$ y determine la ecuación de la recta tangente a f en $x_0 = 1$.

18. (8 PUNTOS)

Dada la función $f(x) = 2\sqrt{x} - x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$; aplicando la definición de derivada:

$$D_x\big(f(x)\big) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Obtenga $D_x\big(f(x)\big)$ y determine la ecuación de la recta tangente a f en $x_0 = 9$.

19. (8 PUNTOS)

Dada la función $f(x) = x - 3\sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$; aplicando la definición de derivada:

$$D_x\big(f(x)\big) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Obtenga $D_x\big(f(x)\big)$ y determine la ecuación de la recta tangente a f en $x_0 = 4$.

20. (8 PUNTOS)

Dada la función $f(x) = -3x^2 - \frac{5}{2}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; aplicando la definición de derivada:

$$D_x\big(f(x)\big) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Obtenga $D_x\big(f(x)\big)$ y determine la ecuación de la recta tangente a f en $x_0 = -1$.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 5

21. (6 PUNTOS)

Considere la curva C definida por:

$$arctan(y) = \frac{2ax}{1+y^2} - \frac{3}{2}b$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(1,0) \in C$; y, la pendiente de la recta normal a la gráfica de C en dicho punto sea igual a -1.

22. (6 PUNTOS)

Considere la curva C definida por:

$$arctan(x) = \frac{4ay}{1+x^2} + \frac{5}{4}b$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(0,1) \in C$; y, la pendiente de la recta normal a la gráfica de C en dicho punto sea igual a -1.

23. (6 PUNTOS)

Considere la curva C definida por:

$$ln\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{a}{x} - y + \frac{3}{2}b$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(1,1) \in C$; y, la pendiente de la recta normal a la gráfica de C en dicho punto sea igual a 2.

24. (6 PUNTOS)

Considere la curva C definida por:

$$ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a}{x} + y - \frac{1}{4}b$$

Determine los valores de los coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(1,1) \in C$; y, la pendiente de la recta normal a la gráfica de C en dicho punto sea igual a $-4/3$.

25. (6 PUNTOS)

Considere la curva C definida por:

$$arcsen(x) = ay - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} - 5b$$

Determine los valores de los coeficientes $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$, tal que $P(0, -1/2) \in C$; y, la pendiente de la recta normal a la gráfica de C en dicho punto sea igual a -1.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 6

26. (5 PUNTOS)

Dada la curva C en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 3t - 2 \\ y(t) = t^2 + 5t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine el intervalo de valores de x para el cual la curva C es estrictamente creciente.

27. (5 PUNTOS)

Dada la curva C en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 4t - 4 \\ y(t) = -t^2 + t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine el intervalo de valores de x para el cual la curva C es estrictamente creciente.

28. (5 PUNTOS)

Dada la curva C en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 3t + 4 \\ y(t) = t^2 + 4t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine el intervalo de valores de x para el cual la curva C es estrictamente decreciente.

29. (5 PUNTOS)

Dada la curva C en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 5t - 2 \\ y(t) = -t^2 + t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine el intervalo de valores de x para el cual la curva C es estrictamente decreciente.

30. (5 PUNTOS)

Dada la curva C en forma paramétrica:

$$C: \begin{cases} x(t) = 3t + 2 \\ y(t) = t^2 - 3t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine el intervalo de valores de x para el cual la curva C es estrictamente creciente.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 7

31. (6 PUNTOS)

Dada una función $f\colon [-1,2) \mapsto \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones:

- $f'(x) = [\![x-1]\!], \quad -1 \le x < 2$
- $f(-1) = 4$
- f es continua en su dominio.

Realice un bosquejo en el plano cartesiano de la gráfica de la función f que cumpla con estas condiciones, obteniendo previamente su regla de correspondencia.

32. (6 PUNTOS)

Dada una función $f\colon [-1,2) \mapsto \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones:

- $f'(x) = [\![x]\!] + 2, \quad -1 \le x < 2$
- $f(-1) = -3$
- f es continua en su dominio.

Realice un bosquejo en el plano cartesiano de la gráfica de la función f que cumpla con estas condiciones, obteniendo previamente su regla de correspondencia.

33. (6 PUNTOS)

Dada una función $f\colon [-1,2) \mapsto \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones:

- $f'(x) = [\![x+1]\!], \quad -1 \le x < 2$
- $f(-1) = -1$
- f es continua en su dominio.

Realice un bosquejo en el plano cartesiano de la gráfica de la función f que cumpla con estas condiciones, obteniendo previamente su regla de correspondencia.

34. (6 PUNTOS)

Dada una función $f: [-2, 4) \mapsto \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones:

- $f'(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right], \quad -2 \leq x < 4$
- $f(-2) = 3$
- f es continua en su dominio.

Realice un bosquejo en el plano cartesiano de la gráfica de la función f que cumpla con estas condiciones, obteniendo previamente su regla de correspondencia.

35. (6 PUNTOS)

Dada una función $f: [-1, 2) \mapsto \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones:

- $f'(x) = -[\![x]\!], \quad -1 \leq x < 2$
- $f(-1) = 1$
- f es continua en su dominio.

Realice un bosquejo en el plano cartesiano de la gráfica de la función f que cumpla con estas condiciones, obteniendo previamente su regla de correspondencia.

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2021	**PERÍODO:**	PRIMER TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Ángel M., Baquerizo G., Díaz R., García E., Laveglia F., Pastuizaca M., Ramos M., Ronquillo C
EVALUACIÓN:	PRIMERA	**FECHA:**	05/julio/2021

Tema # 8

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

36. (8 PUNTOS)

    Un club cobra a cada integrante $\$ 200$ por una membresía anual. Sin embargo, por cada miembro adicional que este club tenga, a partir de los 60, el precio por cada miembro se reduce en $\$ 2$. Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule el NÚMERO DE MIEMBROS que permite a este club maximizar su INGRESO TOTAL y cuánto es ese INGRESO TOTAL MÁXIMO.

37. (8 PUNTOS)

    Se desea enrollar una hoja rectangular, cuyo perímetro es $27\ cm$, hasta formar un cilindro hueco. Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule las DIMENSIONES DEL RECTÁNGULO que le permitirán construir el cilindro hueco con la MÁXIMA CAPACIDAD posible.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

38. (8 PUNTOS)

Se quiere determinar el precio de la entrada para un concierto. Si se cobra $\$\ 5$ por entrada, esto representará $35\ 000$ personas en el concierto. Por cada incremento de $\$\ 1$ en el precio, la productora pierde $5\ 000$ personas. Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule cuál es el PRECIO POR ENTRADA que deberá cobrar para maximizar su INGRESO TOTAL y cuánto es ese INGRESO TOTAL MÁXIMO.

39. (8 PUNTOS)

Se desea construir un triángulo en el primer cuadrante del plano cartesiano. Los vértices se encuentran en los puntos $P_1(a, 0)$, $P_2(0, b)$ y $P_3(0, 0)$. La distancia entre P_1 y P_2 mide $20\ unidades$ y el perímetro del triángulo es igual a $40\ unidades$. Realizando un análisis de cálculo diferencial, determine los VALORES DE LAS COORDENADAS a y b que permiten construir un triángulo cuya superficie tenga la MÁXIMA ÁREA posible.

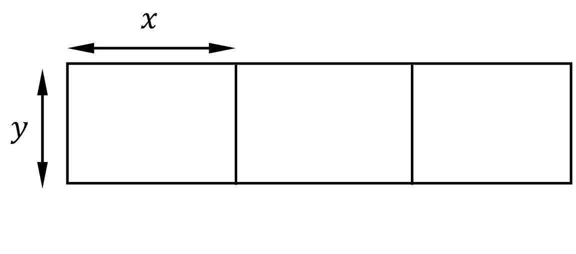
De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

40. (8 PUNTOS)

Una empresa se encuentra cotizando en la bolsa de valores. El precio por cada orden de acciones fluctúa con respecto a la demanda, es así que, cuando se tienen $1\ 000$ órdenes, el precio promedio es de $\$\ 500$. Por cada disminución de $\$\ 25$ en el precio, la venta de órdenes aumenta en 100. Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule el NÚMERO DE ÓRDENES que permite a esta empresa maximizar su INGRESO TOTAL y cuánto es ese INGRESO TOTAL MÁXIMO.

41. (8 PUNTOS)

Un granjero desea cercar con valla tres corrales rectangulares adyacentes idénticos (véase la figura), cada uno con un área de $150\ pies^2$. Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule las DIMENSIONES DEL ANCHO Y DEL LARGO de cada corral, de modo que se ocupe la MENOR CANTIDAD DE VALLA.



De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

42. (8 PUNTOS)

El salario W, en dólares, que se paga en una empresa, depende de la cantidad de trabajadores x, y está definido así:

$$W(x) = -10 + \frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad x \geq 0$$

El ingreso I, en dólares, que recibe la empresa, también depende del número de trabajadores que contrata la empresa, el cual se puede representar con:

$$I(x) = -3x^2 + 140x - 5 \quad ; \quad x \geq 0$$

Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule el SALARIO W que debe pagar la empresa para maximizar su UTILIDAD U y cuánto es esa UTILIDAD MÁXIMA.

43. (8 PUNTOS)

Se quiere inscribir un cilindro recto en una esfera cuyo radio R mide $3\,cm$. Realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule las dimensiones r (LONGITUD DEL RADIO) y h (LONGITUD DE LA ALTURA) del cilindro que permitan MAXIMIZAR SU VOLUMEN.

De los siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.

44. (8 PUNTOS)

El ingreso (utilidad) que a usted le representa consumir h horas de videojuegos se puede representar con la siguiente función:

$$I(h) = -\frac{h^2}{4} + \frac{h}{2} \quad ; \quad 0 \le h \le 24$$

Sin embargo, el costo (desutilidad) que a usted le representa consumir h horas de videojuegos puede ser representado por:

$$C(h) = -\frac{h^2}{8} - 1 \quad ; \quad 0 \le h \le 24$$

Si cada día tiene $24\ horas$, realizando un análisis de cálculo diferencial, calcule el NÚMERO DE $horas$ que podría dedicar a otras actividades (que no sean videojuegos) para MAXIMIZAR EL BENEFICIO B de consumir horas de videojuegos. Siendo este BENEFICIO, la diferencia entre la utilidad y la desutilidad.

45. (8 PUNTOS)

Realizando un análisis de cálculo diferencial, determine las COORDENADAS DEL PUNTO P perteneciente a la curva $y = \frac{x^2}{4}$, $0 \le x \le 2\sqrt{3}$ que está MÁS CERCA del punto $Q(0,4)$.

Sugerencia.- Considere el cuadrado de la distancia requerida, en lugar de la distancia original L.