ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
TERCERA EVALUACIÓN DE ÁLGEBRA LINEAL

Nombre: ………………………………. Paralelo: ……

Firma: ……………………….. 16 de septiembre de 2010

1. (20 ptos) Califique como verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. **Justifique su respuesta**.

a. Existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to P_n$ tal que $\text{Nu}(T) = \{0_V, v_0\}$, donde $v_0 \in \mathbb{R}^n$, $v_0 \neq 0_V$.

b. Si $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ es base de *V* y *L* una transformación lineal de *V* en *W*, entonces $B_2 = \{L(v_1), ..., L(v_n)\}$ genera a *W*.

c. Si *A* es una matriz invertible y λ es valor propio de *A*, entonces λ es diferente de cero.

d. Dos matrices semejantes tienen los mismos valores y vectores propios.

2. (20 ptos) Sea f un producto interno real en el espacio vectorial P_1, tal que $\|1\|=\sqrt{2}$, $\|x\|=1$ y $f(1,x)=-1$.

a. Encuentre la regla de correspondencia de f

b. Sea $W=\{p(x)\in P_1 / p(1)=0\}$ un subespacio vectorial de P_1, encuentre una base y determine la dimensión de $W^{\perp}$

c. Construya una base para P_1 formada por un vector de W y por un vector de $W^{\perp}$

3. (20 ptos) Sea $L:\mathbb{R}^2 \to P_1$ una transformación lineal tal que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de L respecto de las bases $B_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \ 1+x,\ 1-3x$ de P_1.

a. Determine una base y la dimensión del núcleo y recorrido de L

b. ¿Es L invertible? Justifique su respuesta

4. (20 ptos) **a.** Encuentre una matriz $A \in M_{2x2}$, tal que $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ sean sus valores propios, y, además:

$$E_{\lambda_1} = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda_2} = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

b. Sea $L : P_1 \to P_1$ un operador lineal tal que A es su representación matricial respecto de la base $B_1 = \{1 - x,\ 1 + x\}$ de P_1. Encuentre, de ser posible, una base B_2 de P_1 respecto de la cual la matriz asociada a L sea una matriz diagonal.

5. (20 ptos) Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^4$. Sean los subespacios de V:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,/\, a - b + c = 0 \;\;,\;\; 2a + b + c - d = 0 \right\}, \qquad W = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Encuentre una base y determine la dimensión de los subespacios de V:

a. $H \cap W$
b. $H + W$