

IMPLEMENTACION DE UNA SOLUCION DEL FLUJO LAMINAR VISCOSO 2D CON INFLUENCIA DE SUPERFICIE LIBRE APLICANDO EL METODO DE HINO

José R. Marín¹ y Rubén J. Paredes²

¹ **Director de Tesis**, Ing. Naval, ESPOL 1982, M.S.E. Ing. Naval, U. de Michigan 1984, M.S.E. Ing. Aeroespacial, U. de Michigan 1990, Ph.D. Ing. Naval, U. de Michigan 1990, email: jmarin@espol.edu.ec

² **Ingeniero Naval 2006**, email: rparedes@espol.edu.ec

ABSTRACT

The present work describe the implementation of one method used to resolve the Navier-Stokes using a unstructured grid to simulated incompressible viscous laminar flow with a free surface, developed by Hino, [4]. The method use the artificial compressibility concept developed by Chorin, [2]. The Finite Volume Method is used for spatial discretization with a cell centered layout. The convection and diffusion terms are evaluated with centered differences. The explicit Runge-Kutta method is used for the time integration. The Free surface boundary condition is implemented with a procedure that regenerates it, satisfying the Navier-Stokes equations inside the domain. The numerical procedure is applied to the flow inside a 2D duct with constant section and then with a 1:3 expansion. Finally, a flow passing over a submerged body with a free surface is analyzed. Besides, the convergence rate of the process is analyzed varying the number of cells and the step size of time.

RESUMEN

En el presente trabajo se describe la implementación de un método para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes usando una malla no estructurada para simular flujo laminar viscoso e incompresible con influencia de superficie libre, desarrollado por Hino, [4]. El método emplea el artificio de compresibilidad artificial desarrollada por Chorin, [2]. La discretización espacial se desarrolla aplicando el método de Volúmenes Finitos con un esquema de celda centrada. Los términos de convección y viscosos son evaluados con diferencias centradas. La integración en tiempo se desarrolla con esquema explícito. La condición de frontera de la superficie libre es implementada con un esquema que regenera el contorno de la dicha superficie, que resulta de la satisfacción de las ecuaciones de equilibrio dentro del dominio. El procedimiento numérico se lo aplica al flujo dentro de un ducto 2D de sección constante y luego a uno que incluye expansión. Finalmente se lo aplica al caso del flujo sobre un cuerpo sumergido con influencia de la superficie libre. Además, se analiza el efecto del refinamiento de la malla y el tamaño del paso del tiempo en la razón de convergencia del proceso implementado.

1. INTRODUCCIÓN

La importancia de las ecuaciones de Navier-Stokes radica en que gobiernan el movimiento de cualquier fluido. Lamentablemente existen pocas soluciones analíticas, para casos muy sencillos, lo que impide su aplicación en muchas situaciones de Ingeniería. Otra alternativa para analizar flujos viscosos, es la utilización de modelos para mediante la utilización de las leyes de similitudes poder predecir el comportamiento del fluido; lastimosamente esto requiere de una gran inversión para equipar los laboratorios, y de gran cantidad de tiempo de trabajo. Por estas razones, a comienzos de la década de los 60 se volvió imperativo el uso de herramientas computacionales (CFD por sus siglas en inglés) para poder resolver de manera numérica problemas más complejos con gran aplicación en el área aerodinámica.

En la actualidad el CFD es esta siendo aplicado a problemas hidrodinámicos, en los cuales a menudo la presencia de la superficie libre influye en gran medida. Problemas típicos con presencia de superficie libre en Hidrodinámica son fluidos alrededor de un barco, olas oceánicas y costeras, el líquido en un tanque entre otros. Debido a que el contorno de la superficie libre debe ser obtenido como parte de la solución, la generación de la malla es mucho más importante que en casos sin superficie libre.

El propósito del presente trabajo es implementar un método desarrollado por Hino [4], aunque ciertas modificaciones han sido implementadas debido a las limitaciones con los equipos utilizados (Pentium 4 2.8 GHz.) A continuación, el procedimiento numérico es descrito y resultados son comparados con datos medidos y otras aproximaciones numéricas.

2. FORMULACION

2.1 Ecuaciones Gobernantes

Las ecuaciones gobernantes de movimiento de un fluido viscoso e incompresible en dos dimensiones son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \quad (3)$$

Donde x es la coordenada horizontal y y es la vertical, positivo hacia arriba. (u,v) son los componentes (x,y) de la velocidad. P es la presión con componente hidrostático. (F_x, F_y) son los componentes (x,y) de las fuerzas externas.

Llamemos D a la profundidad del agua, y U la velocidad en flujo uniforme, y ρ la densidad del fluido,

$$u' = \frac{u}{U}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad x' = \frac{x}{D}, \quad y' = \frac{y}{D}, \quad t' = \frac{Ut}{D},$$

$$p' = \frac{p}{\rho_0}, \quad F_y' = \frac{F_y}{\rho g}$$

Y eliminando los primas, se obtiene la ecuación de Navier-Stokes de forma adimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{F_y}{\text{Fn}^2} \quad (6)$$

Donde F_n es el número de Froude definido usando la constante gravitacional g y Re es el número de Reynolds donde ν es la viscosidad cinemática:

$$\text{Fn} = \frac{U}{\sqrt{gD}}, \quad \text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (7)$$

Llamemos p^* a la presión sin la componente hidrostática [3]. Además, los términos

viscosos pueden ser escritos de una manera diferente

$$p^* = p + \frac{\gamma}{Fn^2} \quad (8)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (10)$$

Donde:

$$\tau_{xx} = \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$\tau_{yy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (13)$$

Combinando las ecuaciones (8)-(13) con las Ecuaciones Gobernantes pueden ser escritos como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (16)$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 + p^* - \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial uv - \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv - \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial v^2 + p^* - \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

Debido a que no hay un término asociado con la variación de la presión con respecto al tiempo, intentar resolver este sistema de ecuaciones con técnicas numéricas que avancen en el tiempo se vuelve una tarea difícil de implementar.

Cuando solo la solución en el estado estable es requerida, una aproximación alternativa llamada método de compresibilidad artificial puede ser usada. En este método, propuesto por Chorin [2], la ecuación de continuidad es modificada introduciendo un término de seudo-compresibilidad.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

Llamemos a ρ una densidad artificial, β la compresibilidad artificial y la ecuación de estado artificial es

$$p = \rho/\beta \quad (27)$$

Por lo que la Ec (26) puede ser rescrita de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

Cuando la solución se vuelve estable, la ecuación (29) recupera la forma original de la ecuación (4). Debido que el sistema de ecuaciones (29),(24), y (25) es hiperbólico, métodos numéricos para resolver ecuaciones hiperbólicas puede ser aplicado.

Escribiendo en forma vectorial el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(e - e^v)}{\partial x} + \frac{\partial(f - f^v)}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} p^* \\ u \\ v \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p^* \\ uv \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p^* \end{bmatrix}$$

$$e^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, f^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{bmatrix}$$

2.2. Discretización en el Espacio

La discretización en el espacio es basada en el método de volúmenes finitos. El dominio a resolver es dividido en celdas de distribución arbitraria (mallas no estructuradas). En este caso las celdas a utilizarse tendrán forma triangular. El layout centrado en la celda es empleado, en la cual las variables del flujo (ρ^*, u, v) son definidas en el centro de cada celda. El volumen de control para cada variable del flujo es naturalmente la celda que contiene la variable.

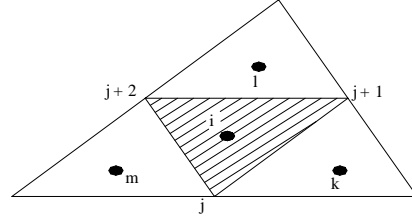


Fig. 1 Volumen de Control para la celda triangular i

Integrando la ecuación (30) alrededor del volumen de control

$$\iint_{vi} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(e - e^v)}{\partial x} + \frac{\partial(f - f^v)}{\partial y} \right) dv = 0 \quad (31)$$

$$\iint_{vi} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) dv + \iint_{vi} \left(\frac{\partial(e - e^v)}{\partial x} + \frac{\partial(f - f^v)}{\partial y} \right) dv = 0 \quad (32)$$

Eq (32) puede ser escrita de la siguiente manera [4]

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{vi} q dv + \oint_{\partial v} \left((e - e^v)hx + (f - f^v)hy \right) ds = 0 \quad (33)$$

La integral cerrada de la Eq (33) puede ser aproximada por la suma de los flujos en los bordes de la celda

$$\oint_{\partial v} \left((e - e^v)hx + (f - f^v)hy \right) ds \approx \sum_{edges} \left((e - e^v)S_x + (f - f^v)S_y \right)_{j+1/2} \quad (34)$$

Como se muestra en la Fig. 1, la celda i esta formada por los vértices j, j+1, j+2 en sentido contrario a las manecillas del reloj y el subíndice j+1/2 denota el valor evaluado para el borde (j,j+1). La suma es hecha sobre todos los bordes de la celda i. (S_x, S_y) son los vectores de área del borde (j,j+1) y esta definido por $(y_{j+1}-y_j, -x_{j+1}+x_j)$.

Llamemos $E_{j+1/2}$ y $E^v_{j+1/2}$ al flujo no viscoso y viscoso cruzando el borde (j,j+1), que pueden ser escritos como

$$E_{j+1/2} = (eS_x + fS_y)_{j+1/2} \quad (35)$$

$$E^v_{j+1/2} = (e^vS_x + f^vS_y)_{j+1/2} \quad (36)$$

Entonces la forma semi-discreta de las ecuaciones de Navier-Stokes es obtenida como sigue:

$$v \frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{edges} (E_{j+1/2} + E^v_{j+1/2}) = 0 \quad (37)$$

2.3. Flujo No Viscoso

Cada componente del vector del flujo no viscoso, E, puede ser escrito como sigue [4]:

$$E(q) = \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + pS_x \\ vU + pS_y \end{bmatrix} \quad (38)$$

Donde $U = uS_x + vS_y$. El flujo no viscoso es evaluado con diferencias centradas. [5]

2.4. Flujo Viscoso

Los componentes del vector del flujo viscoso son escritos como [4]:

$$E^v(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ S_x \tau_{xx} + S_y \tau_{xy} \\ S_x \tau_{xy} + S_y \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Los gradientes de velocidad en el borde son requeridos para la evaluación del flujo viscoso. Aplicando el Teorema de Gauss al volumen de control que se forma al conectar los nodos localizados en los extremos de los

bordes y los centroides de las celdas que comparten el mismo borde, como se muestra en la Fig. 2. Por ejemplo:

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{j+1/2} = \frac{1}{V^*} \oint_{\partial V} q \partial y$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{j+1/2} \approx \frac{1}{V^*} \left(\frac{q_k + q_{j+1}}{2} (y_{j+1} - y_k) + \frac{q_{j+1} + q_i}{2} (y_i - y_{j+1}) \right. \\ \left. - \frac{q_i + q_j}{2} (y_j - y_i) - \frac{q_j + q_k}{2} (y_k - y_j) \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{j+1/2} \approx \frac{1}{2V^*} ((q_k - q_i)(y_{j+1} - y_j) + (q_{j+1} - q_j)(y_i - y_k)) \quad (49)$$

Donde V^* es el área del volumen de control. Las variables del flujo en los vértices, q_i y q_{j+1} , son calculados de los valores centrados en la siguiendo el método de promediación ponderada Laplaciana [6]. $\frac{\partial q}{\partial y}$ Puede ser evaluado de una manera similar.

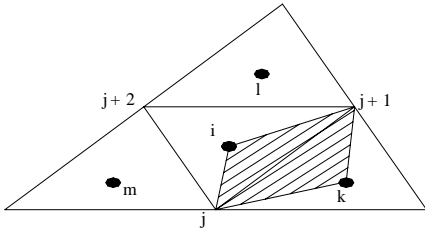


Fig. 2 Volumen de Control para el borde $(j,j+1)$

Finalmente, el flujo viscoso es escrito como:

$$E_{j+1/2}^y = M(j+1,j)(q_k - q_i) + M(i,k)(q_{j+1} - q_j) \quad (50)$$

Donde:

$$M(\alpha,\beta) = \frac{1}{2ReV^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2S_x dy_{\alpha\beta} - S_y dx_{\alpha\beta} & S_y dy_{\alpha\beta} \\ 0 & -S_x dx_{\alpha\beta} & S_x dy_{\alpha\beta} - 2S_y dx_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$dx_{\alpha\beta} = x_\alpha - x_\beta \quad y \quad dy_{\alpha\beta} = y_\alpha - y_\beta \quad (52)$$

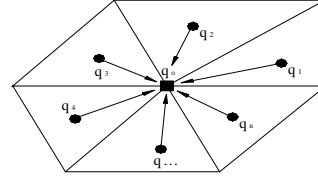


Fig. 3 Volumen de Control para el borde $(j,j+1)$

Como es ilustrado en la Fig. 3, el promedio ponderado de los valores centrados en la celda q_i alrededor de un nodo esta dado por: [6]

$$q_0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i q_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (53)$$

Donde el valor q_0 es calculado usando los factores w_i para cada celda. Este método fue propuesto Holmes y Connell, modificado luego por Rausch [6]. Los factores pueden ser calculados con las siguientes formulas:

$$w_i = 1 + \Delta w_i \quad (54)$$

Donde:

$$\Delta w_i = \lambda_x (x_i - x_0) + \lambda_y (y_i - y_0) \quad (55)$$

$$\lambda_x = \frac{(I_{xy} R_y - I_{yy} R_x)}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad (56)$$

$$\lambda_y = \frac{(I_{xy} R_x - I_{xx} R_y)}{(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad (57)$$

$$R_x = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \quad (58)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0) \quad (59)$$

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 \quad (60)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 \quad (61)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)(y_i - y_0) \quad (62)$$

Donde (x_0, y_0) es la coordenada del nodo y (x_i, y_i) es la coordenada del centroide de las celdas adyacentes.

Usando esta ponderación con procedimiento Laplaciano, Eq (53) es una interpolación exacta del valor nodal q_0 para una variación lineal de los valores centrados en las celdas q_i y para una variación no lineal, es de segundo grado de exactitud en espacio.

2.5. Esquema Explícito

Integración en tiempo de Eq. (37) es hecha por el esquema Explícito de Euler.

$$V_i \frac{\Delta q_i}{\Delta t} + \sum_{\text{edges}} (E_{j+1/2}^n - E_{j+1/2}^{v,n}) = 0 \quad (63)$$

Donde $\Delta q = q^{n+1} - q^n$ y los superíndices denotan el paso de tiempo. Eq (63) es resuelta por el método iterativo Jacobi de punto fijo.

Algunas técnicas son usadas para acelerar la convergencia a la solución en el estado estable. La técnica de paso de tiempo local es usada para este propósito [1], [3], [4], [5],[6], en este método cada celda tiene su propio tamaño del paso del tiempo definido por el límite de estabilidad (CFL) que es mantenido constante. El tamaño del paso del tiempo es calculado siguiendo la siguiente formula [5]:

$$\Delta t_i = \text{CFL} \frac{\Delta S_i}{\lambda_i} \quad (67)$$

Donde:
CFL es el número "Courant-Friedrich-Lewy" el cual limita la estabilidad numérica.

ΔS_i Es la longitud característica de transporte de información, el valor más pequeño entre la distancia más pequeña entre el centroide de la celda analizada y el centroide de la celda vecina y la longitud más pequeña de sus lados.

λ_i Es la máxima velocidad característica de transporte de información.

2.6. Condiciones De Frontera

En la frontera de ingreso del flujo, la velocidad (u, v) es uniforme $(1, 0)$ y la

presión es extrapolada del interior. En la frontera de salida del flujo, las componentes de la velocidad son extrapoladas del interior y la presión es cero. En una pared, debido a la condición de no deslizamiento, las componentes (u, v) son $(0, 0)$ y la gradiente de presión normal a la pared es nula. [4].

2.6.1. Condición De Frontera Sobre La Superficie Libre

Sobre la superficie libre que existe entre el agua y aire, las condiciones de frontera dinámica y cinemática deben ser satisfechas. La condición dinámica es la continuidad del esfuerzo sobre la superficie libre. Debido a que solo la porción de agua es resuelta en el presente esquema, el esfuerzo del aire es despreciado y el flujo viscoso E^v es cero sobre la superficie libre. Cuando la presión atmosférica es asumida igual a cero y los efectos de la tensión superficial y el esfuerzo viscoso normal es despreciado, la presión sobre la superficie libre es igual a $\frac{h}{Fr^2}$ donde h es la altura de la superficie libre.

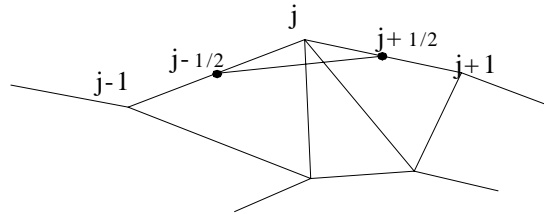


Fig. 4 Volumen de control para la condición cinemática de una superficie libre

La condición cinemática es aquella que señala que las partículas del fluido sobre la superficie libre se mantienen sobre esta. Llámemos $y = h(x, t)$ a la superficie libre, entonces la condición cinemática puede ser escrita como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = 0 \quad (68)$$

Para evitar la reflexión de ola en la frontera de salida, el procedimiento de amortiguamiento de ola es usado [3] y [4]. En este procedimiento, el término de amortiguamiento es añadido a la Ec. (68):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v + D(x) = 0 \quad (69)$$

Donde

$$D(x) = \begin{cases} A \left(\frac{x - x_d}{x_o - x_d} \right)^2 & \text{if } x > x_d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Donde x_o y x_d son las coordenadas en x de la frontera de salida y el punto inicial de la región amortiguada. A es una constante la cual determina la magnitud de amortiguamiento. El término x_d puede ser calculado por: [3]

$$x_d = x_o - 2\pi Fr^2 \quad (70)$$

La discretización de la Eq (69) es hecha también utilizando el método de volumen finito. Debido a que la altura de la ola es definida en los vértices de los bordes sobre una superficie libre, un volumen de control para un vértice j es el área desde $x_{j-1/2} = \frac{(x_{j-1} + x_j)}{2}$ hasta $x_{j+1/2} = \frac{(x_j + x_{j+1})}{2}$ como es mostrado en Fig. 4. Integrando Eq (69) sobre este volumen de control se tiene

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v + D(x) \right) dx = 0 \quad (71)$$

Esta ecuación puede ser aproximada por:

$$\Delta x_j \frac{\partial h_j}{\partial t} + u_j (h_{j+1/2} - h_{j-1/2}) - (v_j - D(x)h) = 0 \quad (72)$$

Donde $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$. Esta Eq. Es resuelta de forma similar como las Ecuaciones N-S y la integración en tiempo con el esquema explícito con paso de tiempo local.

2.7. MOVIMIENTO DE LA MALLA

Luego de haber actualizado la forma de la superficie usando la condición cinemática, una nueva malla ajustada a la nueva superficie libre es generada. Esto es hecho by trasladar verticalmente los nodos de la malla bajo la superficie libre [3] y [4].

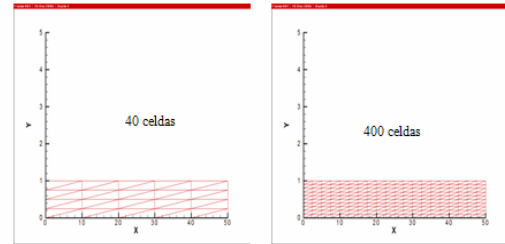
$$x_j^{n+1} = x_j^n$$

$$y_j^{n+1} = \begin{cases} y_u + A \frac{h^{n+1}(x_j) - y_u}{h^n(x_j) - y_u} (y_j^n - y_u) & \text{if } y_j^n > y_u \\ y_j^n & \text{otherwise} \end{cases} \quad (73)$$

3. RESULTADOS

3.1. Ingreso a un tubo

En este problema, primero se intentó establecer la influencia del refinamiento de la malla en la calidad de la respuesta obtenida, para lo cual se comparó solamente la variación de la presión en la dirección x . Se consideraron dos casos en su forma no dimensional, el primero divide al dominio en 40 celdas, y el segundo en 400, como se muestra en la figura 21:



a) Caso I b) Caso II
 Figura 21
 Alternativas empleadas en la discretización del dominio físico

El número CFL utilizado en ambos casos fue de 1.0 y el número, ε , utilizado en el término de disipación, definido en la ecuación (60) del capítulo anterior, fue de 0.1. Como se ve en la figura 22, el caso I utiliza 34 iteraciones y el caso II solo 20, esto se debe al mayor número de celdas utilizadas, aunque el tiempo computacional utilizado en el primer caso fue de 9 minutos 35 segundos y del caso II fue de 53 minutos y 53 segundos, es decir el caso II converge en aproximadamente 6 veces más tiempo.

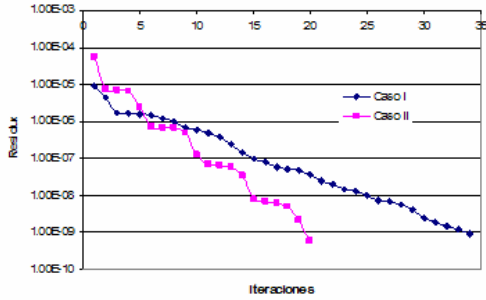


Figura 22
Historia de Convergencia de ambos casos

En la figura 29 se presentan los contornos de velocidad para diferentes números de Reynolds. De acuerdo con Langhaar, la longitud de transición depende del número de Reynolds, y es en este tramo del ducto donde se producen fuertes variaciones en el perfil de velocidad. Esto fue confirmado por las figuras 29 (a) – (f), ya que al aumentar el número de Reynolds aumenta la longitud de la zona con fuertes variaciones en la velocidad. En la figura 29 e), se muestran los perfiles de velocidad en cinco secciones, en la primera el perfil es casi uniforme, y a medida que se va moviendo a la derecha la distribución de velocidades tiende a estabilizarse.

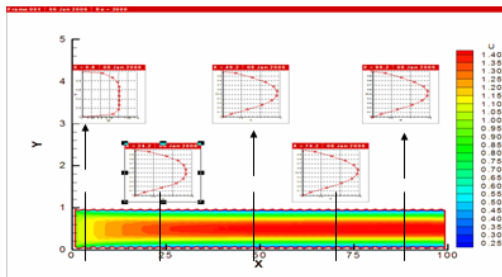
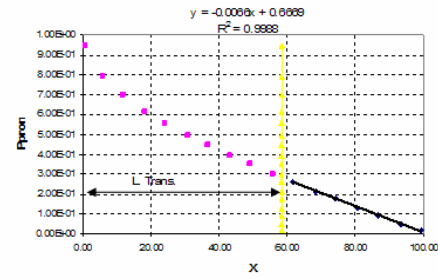


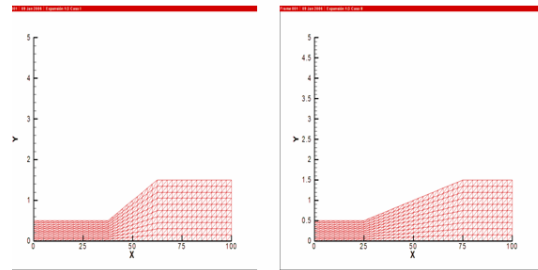
Figura 29 e) Re = 2000

Como se muestra en la figura 32, la variación de la presión en la dirección x es lineal después de la longitud de transición. Por ejemplo, en la figura 32 a) se muestran las presiones obtenidas promediadas en la sección con un número de Reynolds de 100. En este caso la línea de tendencia coincide exactamente con los puntos calculados. La máxima diferencia ocurre con un número de Reynolds de 2000, en este caso el valor del factor de correlación, R^2 , que se obtuvo fue de 0.9988, véase la figura 32 e), este valor confirma la linealidad de la presión en la aproximación numérica obtenida.



3.2. Tubo con razón de expansión 1:3

Según Fox, [6], el coeficiente de pérdida real y el aumento de presión en la dirección del flujo dependen principalmente de la relación de diámetros, del ángulo de la expansión, y, del número de Reynolds. A pesar de ello en este problema se escogió de entre los dos casos presentados por Gibson el de mayor expansión, siendo esta de 1:3. Para comprobar la influencia del ángulo de la expansión se utilizaron dos mallas con diferentes ángulos, el primer caso tiene una pendiente de 0.04 y el segundo de 0.02, como se muestra en la figura 34:



a) Expansión I
b) Expansión II
Figura 34
Alternativas empleadas en el análisis de una expansión 1:3

En la figura 38 se presentan los contornos de velocidad para diferentes números de Reynolds de la expansión II, el cual tiene una menor pendiente que la expansión I. Se confirma la influencia de la expansión, y, del número de Reynolds sobre el campo de velocidades. En esta ocasión, al pasar de un número de Reynolds de 100, figura 38 a, a uno de 500, la variación en el campo de velocidades no es tan marcada como en la expansión I, esto se debe posiblemente a la menor pendiente de este caso. Nuevamente, la influencia disminuye a medida que el número de Reynolds se acerca al límite señalado por Fox, [6]. En la figura 38 e), se muestran los perfiles de

velocidad en cinco secciones, en la zona de expansión se obtienen valores negativos cercanos a la pared.

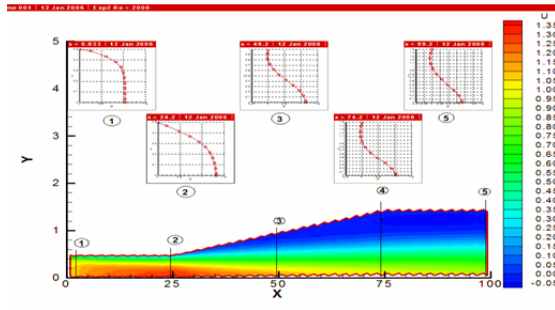


Figura 38 e) Re = 2000

Figura 38
Contorno de velocidades de la expansión II con diferente número de Reynolds

En la figura 43 se presenta la variación de la presión en la dirección x de la expansión II. Presenta un comportamiento similar al mostrado en la figura anterior, que corresponde al caso de las placas infinitas hasta antes de la expansión. Después de este punto en todos los casos se observa un aumento en la presión, tal como en el caso anterior. Debido a que este caso posee una pendiente de expansión menor, la caída de presión total, desde la entrada hasta 100 veces el diámetro, es menor que en el caso anterior. La diferencia de presión entre los extremos izquierdo y derecho constituyen el coeficiente de pérdidas adimensionales, h_{menor} laminar, véase la figura 43 e.

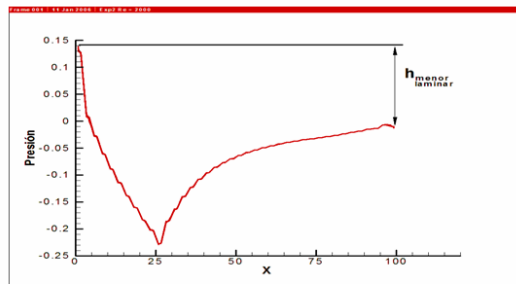


Figura 43 e) Re = 2000

Figura 43
Distribución de presión en la expansión II con diferentes números de Reynolds

3.3. Flujo con influencia de Superficie Libre con un cuerpo senoidal en el fondo

En las figuras 48 y 49 se presentan los dos dominios utilizados para la realización de la aproximación numérica. Según lo recomendado por Rausch, [17], se utilizó una longitud de 40 veces la profundidad, y se colocó un cuerpo senoidal en el fondo de 8 unidades de longitud, teniendo el primero (figura 48) una altura de 0.1 y el segundo (figura 49) una altura de 0.2.

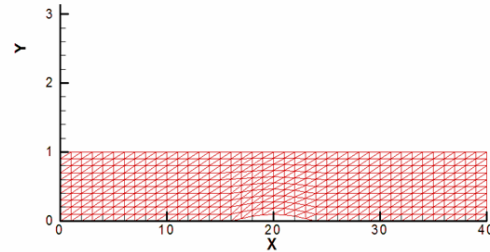


Figura 48
Malla utilizada para analizar el flujo sobre un cuerpo sumergido de 0.1 de altura

En las figuras 50 y 51, se presenta la variación de presiones en el dominio analizado inicialmente para cada caso, con la superficie libre asumida como horizontal. En ambas figuras se pueden distinguir dos zonas donde se concentran los mayores presiones, que corresponden a los puntos de estancamiento, en los que la velocidad es cero. Además, se distingue una zona de baja presión sobre el cuerpo senoidal, esto es debido al incremento en la velocidad.

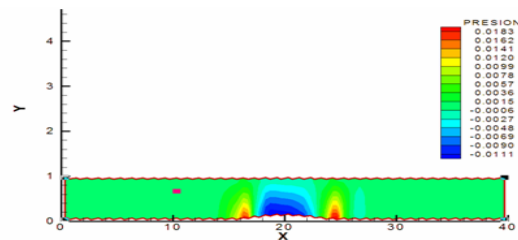


Figura 50
Contorno de Presiones para el cuerpo de 0.1 de altura luego de la primera iteración

En la figura 54 se presenta la evolución de la superficie libre en varias iteraciones del caso con el cuerpo sumergido de 0.1 de altura. Debido al comportamiento hiperbólico de la ecuación (96), utilizada para la actualización de la superficie libre, existe un límite de estabilidad para esta ecuación, por lo que no es posible utilizar pasos de tiempo relativamente grandes. Es por esto, que se utilizó un paso de tiempo de 10^{-4} . A pesar de ello, se puede distinguir una variación en la posición de la superficie libre en la zona por encima del cuerpo sumergido.

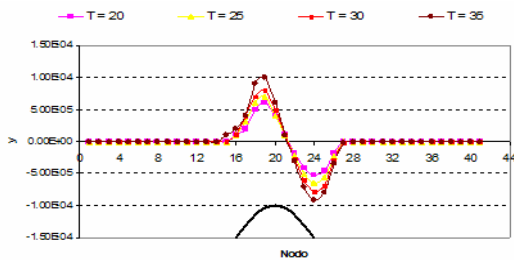


Figura 54 b)

Figura 54
Evolución de la Superficie Libre en varias iteraciones en el caso del cuerpo con una altura de 0.1

En la figura 58 se presenta la variación de presión sobre la línea de simetría, en función de su ubicación en la dirección x, para ambos casos. Los valores presentados fueron tomados de las celdas que comparten uno de sus lados con la frontera que representa al fondo. Ambos casos presentan la misma tendencia, una elevación de presión cerca de los puntos de estancamiento y una disminución de la misma entre estos puntos. Se puede confirmar además que el cuerpo más alto tiene mayor influencia.

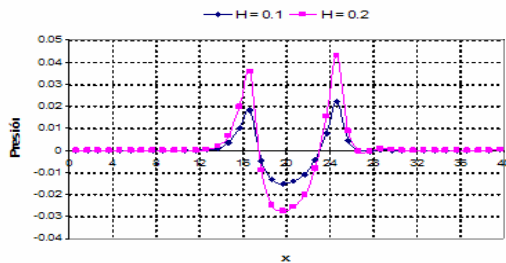


Figura 58

Variación de presión sobre el fondo en la dirección x

BIBLIOGRAFIA

1. Anderson W. Kyle, et al, IMPLICIT/MULTIGRID ALGORITHMS FOR INCOMPRESSIBLE TURBULENT FLOWS ON UNSTRUCTURED GRIDS, AIAA Paper 95-1740, USA, 1995.
2. Chorin Alexandre, A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING INCOMPRESIBLE VISCOUS FLOW PROBLEMS, Journal of Computational Physics Volume 2 Number 1, pages 12-26, August 1967.
3. Hino Takanori, et al, A FINITE METHOD WITH UNSTRUCTURED GRID FOR FREE SURFACE FLOW SIMULATIONS, Proceedings of the Sixth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Pages 173-193, 1994.
4. Hino Takanori, AN UNSTRUCTURED GRID METHOD FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOWS WITH A FREE SURFACE, AIAA Paper 97-0862, USA, 1997
5. Maciel Edison, SOLUTION OF AEROSPACE PROBLEMS USING STRUCTURED AND UNSTRUCTURED STRATEGIES, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences Volume 23 No. 2 page 155-178, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.
6. Rausch Russ D., SPATIAL ADAPTATION OF UNSTRUCTURED MESHES FOR UNSTEADY AERODYNAMIC FLOW COMPUTATIONS, AIAA Journal Volume 30 N 5 pages 1243-1251, USA, May 1992.