

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y**

**Ciencias de la Producción**

“Uso de herramientas de optimización termodinámica para fluidos de transferencia de calor basados en nanotubos y material micro encapsulado de cambio de fase”

**TRABAJO FINAL DE GRADUACIÓN**

Proyecto de Graduación

Previo la obtención del Título de:

**INGENIEROS MECÁNICOS**

Presentado por:

Frank Vicente Porras Carrión

Pablo Andrés Guevara Álvarez

Gabriel Isaac Bravo Barahona

GUAYAQUIL – ECUADOR

Año: 2014

## AGRADECIMIENTO

A la ESPOL como institución educativa que ha marcado una importante etapa de formación académica en nuestras vidas

Un especial agradecimiento al Dr. Guillermo Soriano, a quien debemos muchos logros universitarios.

Pablo, Frank y Gabriel

## DEDICATORIA

A Dios, que es nuestra luz y fortaleza.

A nuestros padres, que han sido nuestros guías, apoyo y ejemplo incondicional.

A nuestros hermanos y familiares, que realzan nuestros logros.

A los maestros, que brindaron su conocimiento, experiencia y contribuyeron en nuestra formación.

A los compañeros que vivieron la universidad a nuestro lado.

Pablo, Frank y Gabriel

## TRIBUNAL DE SUSTENTACIÓN

---

M.Sc. Jorge Duque R.  
DECANO DE LA FIMCP  
PRESIDENTE

---

Ph.D. Guillermo Soriano I.  
DIRECTOR DEL TFG

---

M.Sc. Eduardo Rivadeneira P.  
VOCAL

## DECLARACIÓN EXPRESA

“La responsabilidad del contenido de este Proyecto de Graduación, nos corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual del mismo a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”

(Reglamento de Graduación de la ESPOL).

---

Pablo Andrés Guevara Álvarez

---

Gabriel Isaac Bravo Barahona

---

Frank Vicente Porras Carrión

## RESUMEN

Se presenta el desarrollo de una metodología para optimizar combinaciones de fluidos de transferencia de calor basados en nanotubos de carbono multipared (MWCNT) y microcápsulas de material que cambia de fase (MPCM) para procesos usuales en transferencia de calor tales como flujo de calor constante y temperatura de pared constante.

Las mezclas de estos fluidos presentan propiedades termofísicas atractivas como incremento de conductividad térmica y calor específico, sin embargo también se incrementa la viscosidad, existiendo así un compromiso entre propiedades, que depende de las concentraciones de MWCNT y MPCM en agua. De esta forma es posible incrementar la disipación de calor y reducir las irreversibilidades del proceso.

Los efectos en la densidad, calor específico, conductividad térmica y viscosidad en función de las concentraciones volumétricas de los componentes de la mezcla, fueron considerados usando modelos experimentales y teóricos disponibles en la literatura. Se considera un rango de concentraciones volumétricas de cero a 12% para MPCM y de 0 a 1% para MWCNT, y una proporción óptima es presentada para cada proceso de transferencia de calor analizado.

La optimización termodinámica realizada en este proyecto se basa en el método de minimización de generación de entropía (EGM), para ello se emplearon técnicas de optimización de funciones no lineales con restricciones de desigualdad y gráficas de generación de entropía elaboradas en MATLAB®.

Según determinados parámetros, se obtuvo mínima generación de entropía para las mezclas óptimas, entre los resultados para flujo de calor constante, régimen laminar, carga térmica de  $1000 \text{ W/m}^2$  y diámetro de tubería de  $5 \text{ mm}$ , la concentración máxima de MPCM y MWCNT es recomendada para maximizar el desempeño.

## INDICE GENERAL

	Pág.
<b>RESUMEN.....</b>	<b>ii</b>
<b>INDICE GENERAL .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABREVIATURAS .....</b>	<b>vi</b>
<b>SIMBOLOGÍA .....</b>	<b>vii</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>ix</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS .....</b>	<b>xii</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
 <b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>1. REVISIÓN LITERARIA .....</b>	<b>6</b>
1.1. Material Micro encapsulado de Cambio de Fase (MPCM).....	7
1.2. Nanotubos de Carbono Multi-pared (MWCNT).....	12
1.3. Mezclas entre MPCM y MWCNT.....	17
 <b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>2. PROPIEDADES TERMO FÍSICAS.....</b>	<b>20</b>
2.1. Densidad.....	22
2.2. Conductividad Térmica .....	22
2.3. Calor Específico .....	26
2.4. Viscosidad Dinámica.....	26



**CAPÍTULO 3**

<b>3. HERRAMIENTAS DE OPTIMIZACIÓN TERMODINÁMICA.....</b>	<b>30</b>
3.1. Método de Exergía.....	32
3.2. Método de Minimización de Generación Entropía .....	37
3.3. Herramientas De Optimización.....	47

**CAPÍTULO 4**

<b>4. PROCESO CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE.....</b>	<b>54</b>
4.1. Modelado del Proceso .....	55
4.2. Modelo de Generación de Entropía.....	57
4.3. Resultados .....	60
4.4. Análisis de Resultados.....	68

**CAPÍTULO 5**

<b>5. PROCESO CON TEMPERATURA DE PARED CONSTANTE .....</b>	<b>71</b>
5.1. Modelado del Proceso.....	72
5.2. Modelo de Generación de Entropía .....	75
5.3. Resultados .....	76
5.4. Análisis de Resultados .....	82

**CAPÍTULO 6**

<b>6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>85</b>
--	-----------

**APÉNDICES****BIBLIOGRAFÍA**

## ABREVIATURAS

<b>NP</b>	Nano Partículas
<b>NF</b>	Nano Fluido
<b>MPCM</b>	Material micro-encapsulado de cambio de fase
<b>MWCNT</b>	Nanotubos de Carbono Multi-pared
<b>EGM</b>	Método de Minimización de Entropía
<b>PCM</b>	Material de Cambio de Fase
<b>KKT</b>	Karush-Khun-Tucker

## SIMBOLOGÍA

D	Diámetro
f	Factor de Fricción
$C_p$	Calor específico
H	Calor latente
T	Temperatura
Re	Número de Reynolds $[4\dot{m}_{eff}/(\pi\mu_{eff}d)]$
Pr	Número de Prandtl $[C_{p,eff}\mu_{eff}/K_{eff}]$
Nu	Numero de Nusselt $[\bar{h}d/K_{eff}]$
St	Número de Stanton $[\bar{h}/(\rho_{eff}\bar{U}C_{p,eff})]$
Ec	Número de Eckert $[\bar{U}^2/(C_{p,eff}T_w)]$
$\dot{Q}$	Carga de refrigeración
$\dot{S}_{gen}$	Tasa de generación de entropía
$\dot{m}$	Flujo másico
L	Longitud
$P_f$	Perdidas de Fricción
$\Delta T$	Gradiente de Temperatura
k	Conductividad Térmica
x	Fracción Másico
S	Factor Corrección
$\rho$	Densidad
$\varphi$	fracción Volumétrica
$\varepsilon$	fracción de cambio de fase
$\mu$	viscosidad Dinámica
$\tau$	Temperatura adimensional, $[(T_{in} - T_w)/T_w]$ .
$\lambda$	Longitud adimensional, $[L/d]$ .

$\nu$	Viscosidad Cinemática
$\epsilon$	Fracción de cambio de fase
eff	Efectivo
MPCM	Material micro encapsulado de cambio de fase
nf	Nano fluido
bf	Fluid Base
in	entrada
p	Pared
eff	Efectivo
max	Máximo
np	Nano-partículas

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>FIGURA 3.1.</b>	DUCTO EN RAMIFICACIÓN, CASO DE BIFURCACIÓN .....	42
<b>FIGURA 3.2.</b>	OPTIMIZACIÓN DE FLUJO INTERNO.....	43
<b>FIGURA 3.3.</b>	RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA VS RAZÓN DE REYNOLDS ÓPTIMO, “ADVANCED ENGINEERING THERMODYNAMICS” A. BEJAN PAG. 586, FIG. 11.1 (59).....	46
<b>FIGURA. 4.2.</b>	FLUJO DE CALOR CONSTANTE. $D, Q''$ , FIJOS.....	56
<b>FIGURA. 4.3.</b>	MODELO DE FLUJO DE CALOR CONSTANTE, PROPIEDADES $Q'', m$ FIJOS .....	57
<b>FIGURA 4.4.</b>	RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 1000 $W/m^2$ , DIÁMETRO 1MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA. ....	61
<b>FIGURA 4.5.</b>	RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 1000 $W/m^2$ , DIÁMETRO 5MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA. ....	62
<b>FIGURA 4.6.</b>	RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 1000 $W/m^2$ , DIÁMETRO 10MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA. ....	63

- FIGURA 4.7.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 10000  $W/m^2$ , DIÁMETRO 1MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA. ....64
- FIGURA 4.8.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 10000  $W/m^2$ , DIÁMETRO 5MM, A) RÉGIMEN LAMINAR, B) TURBULENTO. ....65
- FIGURA 4.9.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 10000  $W/m^2$ , DIÁMETRO 10MM, A) RÉGIMEN LAMINAR B) TURBULENTO. ....65
- FIGURA 4.10.** GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO DE: CALOR 1000  $W/m^2$ , MÁSSICO DE AGUA 10 G/S, A) ENTROPÍA GENERA POR FRICCIÓN IZQUIERDA, B) ENTROPÍA GENERADA POR TRANSFERENCIA DE CALOR .....66
- FIGURA 4.11.** GENERACIÓN DE ENTROPÍA PARA CASO #2, DIÁMETRO OPT, RÉGIMEN LAMINAR, FLUJO DE CALOR 1000  $W/m^2$ , FLUJO MÁSSICO AGUA 10 G/S .....67
- FIGURA 5.1.** VARIACIÓN DE TEMPERATURA EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD DE UN DUCTO PARA TEMPERATURA DE PARED CONSTANTE. ....72
- FIGURA 5.2.** ENTROPÍA GENERADA, CARGA DE REFRIGERACIÓN 35 KW, DIÁMETRO INTERIOR DE TUBERÍA 50.8MM,

	VARIACIÓN DE TEMPERATURA ENTRE LA ENTRADA Y SALIDA 5 °C.....	77
<b>FIGURA 5.3.</b>	ENTROPÍA GENERADA, CARGA DE REFRIGERACIÓN 176 KW, DIÁMETRO INTERIOR DE TUBERÍA 50.8MM, VARIACIÓN DE TEMPERATURA DE ENTRADA Y SALIDA 5 °C.....	78
<b>FIGURA 5.4.</b>	PERDIDAS POR FRICCIÓN PARA LECHADAS DE MPCM, DIFERENTES CARGAS DE REFRIGERACIÓN Y VARIACIONES DE TEMPERATURA, DIÁMETRO INTERIOR 50.8MM.....	79
<b>FIGURA 5.5.</b>	FRACCIÓN DE PÉRDIDAS POR FRICCIÓN, CARGAS DE REFRIGERACIÓN DE 35 KW Y 176 KW, DIFERENTES VARIACIONES DE TEMPERATURA, DIÁMETRO INTERIOR DE TUBERÍA 50.8MM. ....	79
<b>FIGURA 5.6.</b>	(A) GENERACIÓN DE ENTROPÍA POR TRANSFERENCIA DE CALOR (B) GENERACIÓN DE ENTROPÍA POR FRICCIÓN.....	80
<b>FIGURA 5.7.</b>	GENERACIÓN DE ENTROPÍA ADIMENSIONAL. ....	81
<b>FIGURA 5.8.</b>	VARIACIÓN DE TEMPERATURA ENTRE LA ENTRA Y SALIDA DE LA TUBERÍA. ....	81

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1</b>	Resumen de materiales de cambio de fase (PCM)	8
<b>Tabla 2</b>	Propiedades termofísicas de los componentes, 25°C	29



# INTRODUCCIÓN

Este proyecto de graduación muestra el trabajo de investigación en el cual se desarrolla una metodología para optimizar combinaciones de núcleos fluidos de transferencia de calor en aplicaciones ingenieriles. Estos fluidos de transferencia de calor muestran diferentes propiedades termo-físicas a su fluido base, mediante el uso de nanotubos de carbono multi-pared (MWCNT) se aumenta la conductividad térmica y con micro-capsulas de material que cambia de fase (MPCM) se aumenta la capacidad térmica; sin embargo, en ambos casos se aumenta la viscosidad de la mezcla. El desarrollo de estos fluidos constituye un área de investigación reciente. Existe información limitada en la literatura sobre la mezcla de estos componentes en áreas como: simulación de sistemas físicos, métodos de optimización de las mezclas y generación de entropía asociada a estos fluidos en procesos de transferencia de calor. Este proyecto propone el uso del procedimiento de minimización de generación de entropía como método para la obtención de combinaciones óptimas de estos fluidos.

La transferencia de calor forma parte vital en sistemas industriales, biológicos y naturales. Tiene una aplicación en: industrias de procesamiento y de energía, refrigeración, climatización, refrigeración en microelectrónica. El reto de las aplicaciones anteriores es maximizar la transferencia de calor con

mínimo suministro de energía y tamaño de equipos, ya que estos contribuyen al costo de operación y al capital inicial. El fluido y el diseño del sistema son los principales factores que afectan este desempeño.

El Incremento de la conductividad térmica puede lograrse mediante nano suspensiones de partículas sólidas de metales u otros materiales altamente conductores térmicos (1). Con estas suspensiones se espera mejorar la conductividad del fluido base. En investigaciones con concentraciones desde 0,3 a 5% en volumen de NP la mejora en la conductividad ha sido de 10% a 100%. Muchos parámetros deben tenerse en cuenta al comparar resultados. El tipo y tamaño de NP, el fluido base, los dispersantes usados, técnicas de procesamiento (ultrasonidos), tiempo de ultrasonidos, y el método para medir conductividad, son factores que influyen en el valor experimental de la conductividad (2).

La capacidad térmica de un fluido depende de su densidad y calor específico. Si mayor es esta, mayor es la cantidad de calor transportable en igual rango de temperatura. Se puede mejorar esta propiedad al añadir una sustancia que cambie de fase durante la transferencia de calor, durante este proceso no aumenta la temperatura y el líquido absorbe calor equivalente al calor latente, mejorando así la capacidad térmica. La temperatura de cambio de fase de estos materiales puede elegirse para que coincidan con el rango de temperaturas de algún proceso.

Recientemente el método de minimización de generación de entropía (EGM) ha ganado popularidad como método de optimización en diseños de sistemas térmicos. Los primeros desarrollos fueron reunidos y presentados en 1982 por A. Bejan (3), donde el EGM fue descrito como un método de modelado y optimización y como un curso especial en ingeniería.

Entre los objetivos generales de este proyecto se pretende desarrollar herramientas de optimización aplicadas a fluidos de transferencia de calor y además evaluar y analizar el uso de fluidos de transferencia de calor en aplicaciones ingenieriles relevantes.

Para alcanzar los anteriores objetivos, se debe evaluar y desarrollar modelos teóricos de propiedades termo-físicas de fluidos que contienen MWCNT y MPCM, se debe desarrollar modelos matemáticos de generación de entropía para procesos de flujo de calor constante y temperatura de pared constante y encontrar la proporción óptima de MWCNT y MPCM en la mezcla que minimice la entropía generada para un proceso de flujo y transferencia de calor en condiciones determinadas.

El *primer capítulo* es una revisión literaria asociada con: mezclas entre agua y MPCM, nano-fluidos a base de MWCNT y mezclas entre agua MWCNT y MPCM. En estas se presentan los resultados más importantes que exponen

las características, utilidades y lo que se espera en futuros desarrollos de estos fluidos.

En el *segundo capítulo* se plantean las ecuaciones que modelan las propiedades termo físicas de las mezclas de agua, MPCM y MWCNT, estas son: densidad, calor específico, conductividad térmica y viscosidad. Estos modelos han sido previamente utilizados por otros investigadores y muchas ecuaciones se siguen desarrollando para mejorar el modelado de estas propiedades. Este proyecto propone algunos modelos basados en resultados experimentales de investigadores.

En el *capítulo 3* presenta métodos y herramientas de optimización termodinámica. En la primera sección se presenta el método de exergía. En la segunda parte se introduce al método de generación de mínima entropía (EGM), también se muestran ejemplos de aplicación del método EGM. Finalmente se introducen algunos métodos matemáticos de optimización usados en problemas de funciones no lineales con restricciones dada su utilidad para optimizar funciones que se presentan comúnmente en termodinámica.

En el *capítulo 4 y 5* se evalúa el desempeño de la mezcla en procesos de transferencia de calor para flujo interno con condiciones de flujo de calor constante y temperatura de pared constante, para ello se utilizan

herramientas de optimización termodinámica basadas en el método de minimización de generación de entropía (EGM). Finalmente, se presentan gráficas de resultados de proporciones óptimas de MWCNT y MPCM en la mezcla bajo condiciones establecidas como flujo laminar/turbulento, carga térmica, dimensiones, entre otros, también se muestran aplicaciones ingenieriles donde el uso de estos fluidos tiene el potencial de aumentar el desempeño de estos procesos.

Finalmente el *capítulo 6* presenta las conclusiones en base a los resultados obtenidos, recomendaciones en cuanto a metodologías y modelos para perfeccionar este o futuros proyectos. Se mencionan algunos trabajos futuros y áreas relacionadas aún quedan por desarrollar.

# CAPÍTULO 1

## 1. REVISIÓN LITERARIA

En los últimos 20 años se ha investigado acerca del potencial uso de MPCM y NP en fluidos base (Ej. Agua, glicerina, aceites, fluidos dieléctricos) para mejorar procesos de transferencia de calor (1, 4-6). Los MPCM aumentan el calor específico del fluido base debido a que el material contenido en las microcápsulas posee un elevado calor latente. Las Nanopartículas aumentan la conductividad térmica ya que es mucho mayor a la del fluido base (7). Existe limitada información disponible en la literatura sobre mezclas de agua, MPCM y MWCNT, como fluido de transferencia de calor, entre estos Kallapana et Al (65) efectúan un trabajo experimental donde se miden las propiedades y el desempeño de estos nuevos fluidos.

Esta revisión literaria sobre novedosos fluidos de transferencia de calor se divide en 3 secciones:

- 1) Suspensiones de material microencapsulado de cambio de fase.
- 2) Nano fluidos basados en nanotubos de carbono.
- 3) Mezcla entre agua, MPCM y CNT.

Los principales aspectos cubiertos relacionados con MPCM son: desempeño en procesos de transferencia de calor, caída de presión asociada con el aumento de viscosidad, fenómenos asociados al cambio de fase y durabilidad de las microcápsulas. Los principales aspectos cubiertos relacionados con NF basados en CNT son: desempeño en procesos de transferencia de calor, caída de presión asociada con el aumento de viscosidad y comportamiento no newtoniano. En la tercera parte se expone un resumen del contenido de las publicaciones revisadas acerca de las mezclas de MPCM y CNT.

### **1.1. Material Micro encapsulado de Cambio de Fase (MPCM)**

Hay diferentes tipos de materiales de cambio de fase (PCM), orgánicos que incluyen parafinas y ácidos grasos, también existen inorgánicos como los hidratos de sal y eutécticos como las soluciones agua-sal (8). Su selección acorde a la aplicación depende del punto de fusión, calor

latente, cambio de volumen en el cambio de fase, estabilidad química, toxicidad, disponibilidad y bajo costo.

Los PCM se usaron hace tiempo con agua y aceites, pero problemas como: obstrucción y adherencia en tuberías e intercambiadores de calor restringieron su uso. Para superar estos problemas, se micro-encapsularon estos materiales con una envoltura de polímero que los mantiene separados del fluido base.

**TABLA 1**  
**RESUMEN DE MATERIALES DE CAMBIO DE FASE (PCM)**

	Ejemplos	Ventajas	Desventajas
Orgánicos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parafinas</li> <li>• Ácidos grasos</li> <li>• Poli glicoles</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Inertes</li> <li>• Gran entalpía</li> <li>• No reactivo</li> <li>• Microencapsuables</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Baja conductividad</li> <li>• Costosos</li> </ul>
Inorgánicos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sales hidratadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Baratos</li> <li>• amplio rango de fusión</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Perdida de efectividad</li> <li>• Gran cambio de volumen</li> <li>• mucho súper enfriamiento</li> <li>• corrosivos</li> <li>• no Microencapsuables</li> </ul>
Eutécticos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Soluciones de sales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Baratos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• poco rango térmico</li> <li>• No Microencapsuables</li> <li>• corrosivos</li> </ul>

Otro problema asociado con las PCM es que el punto de cambio de fase presenta una histéresis, este fenómeno se conoce como súper enfriamiento, además no existe un punto definido de cambio de fase sino un rango en el que el material comienza y termina el cambio de fase. Uno de los primeros estudios para prevenir este fenómeno lo condujo



Alvarado et al. (9) en el cual se añadió en el MPCM un agente que favorecen la nucleación cristalina en el PCM.

En cuanto a la durabilidad se ha observado que capsulas mayores a 100  $\mu\text{m}$  son susceptibles a rupturas en prolongados ciclos de bombeo (10). Debido a fuerzas de cuerpo como la gravedad los MPCM pueden precipitarse y segregarse de la corriente del fluido esto ocasiona un movimiento relativo entre el fluido base y las microcápsulas las cuales pueden romperse debido a esfuerzos normales y cortantes (11).

Las propiedades térmicas y reológicas de las suspensiones de MPCM en agua fueron estudiadas por G.H. Zhang y C.Y. Zhao (12), las proporciones en fracción másica de MPCM que utilizaron se encuentran entre 10 y 35% y dispersantes en 1 % en masa. La conductividad térmica y el calor específico se obtuvo con el método de *Disco Caliente*, para encontrar las temperaturas de cambio de fase se utilizó un calorímetro diferencial, para la viscosidad se utiliza un reómetro, para el tamaños de las MPCM un sistema de caracterización de partículas y espectroscopia infrarroja, con transformada de Fourier (FTIR) para la composición química. Se encontró que la conductividad térmica reduce y la viscosidad aumenta en la medida que aumenta la concentración de MPCM, la lechada puede considerarse newtoniana para concentraciones menores a 35%.

En un estudio realizado por Mulligan et al. (5), se usa agua y aceite como fluido base mezclado con MPCM a base de diversas parafinas (n-octadecano, n-eicosano, n-heptadecano y n-nonadecano). Los tamaños de MPCM estaban entre 10 y 30  $\mu\text{m}$ . Cada tipo de MPCM tenía su propio conjunto de condiciones óptimas de funcionamiento donde se observó cambio de fase máximo. Estas condiciones dependen del punto fusión de los MPCM, la tasa calentamiento y del flujo másico. Coeficientes de transferencia de calor mejoraron al aumentar la concentración de MPCM en ciertas condiciones de operación.

Se han efectuado experimentos donde se estudia el rendimiento de los MPCM en un proceso con flujo de calor constante a través de una tubería circular, Alvarado et al. (10) obtuvo datos de la transferencia de calor por convección y de pérdida de presión los cuales se midieron usando un sistema cerrado que funciona a diferentes velocidades de flujo y valores de flujo de calor. Se observó que el cambio de fase y fracción másica de los MPCM afectan el proceso de transferencia de calor, en general coeficiente global de transferencia resulta menor que el del agua, el coeficiente de transferencia local es mucho mayor que el del agua durante el proceso de cambio de fase y que un incremento en el flujo másico tiene un impacto más significativo que un incremento en el flujo de calor sobre el porcentaje de cambio de fase de los MPCM.

En algunos casos donde altas tasas de refrigeración y disipación de calor localizado son críticos, técnicas de impacto de chorro y enfriamiento de spray son preferidas. El método ideal de enfriamiento requiere un incremento en la tasa de transferencia de calor y que se mantengan los componentes dentro de un corto rango de temperaturas de operación, L.C. Chow et al. (11) lograron un incremento en el desempeño de estas técnicas con la adición de nanocápsulas de PCM (100 nm), se observó un incremento en el coeficiente de transferencia de calor de entre el 50 y 70% con respecto al fluido base empleado (agua) con una concentración de volumétrica de 28% de nanocápsulas.

Las principales aplicaciones de los MPCM son:

- Telas de alto rendimiento las cuales proporcionan una regulación térmica en ropa deportiva.
- En electrónica para enfriar componentes eléctricos, aumentando los ciclos de trabajo en los láseres, y ayudando a mantener las temperaturas constantes para equipos científicos de instrumentación.
- En algunos materiales de construcción para aumentar la eficiencia energética, estos son utilizados en combinación con calor radiante y energía solar para extender el calentamiento y enfriamiento de la eficiencia de algunos sistemas. Los MPCM también se incorporan en

algunos yesos, tableros de fibras, azulejos, y paneles de aislamiento.

- En almacenamiento, para proteger alimentos, bebidas, productos médicos, productos químicos sensibles a la temperatura.

En general los estudios muestran que se incrementa la capacidad térmica de la mezcla, además se observan altos coeficientes de transferencia de calor locales durante el proceso de cambio de fase. El coeficiente global de transferencia de calor puede ser mayor o menor según las condiciones de operación, esto ocurre por el aumento en viscosidad y disminución de la conducción. Inconvenientes como súper-enfriamiento y aglomeración deben ser tratados aplicando correctamente aditivos o dispersantes. La durabilidad de los MPCM es adecuada para capsulas menores a 100 micras. Se espera mayor desarrollos en la fabricación de MPCM, las nano-capsulas resultan ser aún más prometedoras.

## **1.2. Nanotubos de Carbono Multi-pared (MWCNT)**

Existen trabajos que datan desde hace un siglo donde se hace referencia al uso de partículas con alta conductividad térmica en fluidos para incrementar el coeficiente de transferencia en procesos. El principal problema encontrado al emplear partículas de tamaño micrométrico fue

la obstrucción, erosión, asentamiento de las partículas y aumento en la caída de presión (13).

En la década de los 90 en el laboratorio nacional de Argonne-Estados Unidos, Choi et Al. (1) desarrolló el concepto de nano fluidos. Estos NF se formaron al dispersar partículas de tamaño nanométrico entre 1 y 100nm en fluidos de transferencia de calor convencionales, problemas de obstrucción/erosión fueron minimizados. Estabilidad y baja caída de presión fueron mejoras adicionales en los NF que desde entonces han recibido mucha atención.

Muchos NF se han desarrollado utilizando diferentes NP, líquidos base y métodos de preparación. Los fluidos base probados han sido agua, etilenglicol, epoxi, aceite de motor/transformador y tolueno (13). Se han probado NP cerámicas como: Alúmina ( $Al_2O_3$ ), óxido de cobre ( $CuO$ ), magnetita ( $Fe_3O_4$ ), óxido de zinc ( $ZnO$ ) y cerio ( $CeO_2$ ); cerámicas de nitruro/carburo como: Nitruro de aluminio ( $AlN$ ) y carburo de silicio ( $SiC$ ) metálicas como: Cobre ( $Cu$ ), hierro ( $Fe$ ), oro ( $Au$ ) y plata ( $Ag$ ); aleaciones metálicas como: Aluminio cobre ( $Al_2Cu$ ) y plata aluminio ( $Ag_2Al$ ); nanotubos de carbono mono y multipared (SWCNT, MWCNT) y nanoláminas de grafeno y óxido de grafeno. (7,14).

La forma en que las NP se encuentran dispersas en el NF depende del método de preparación, del tipo de NP utilizadas y del fluido base. En la preparación de nanofluidos basados en nanotubos de carbono la dispersión es crítica, esto se debe su naturaleza hidrofóbica que tiende a formar agregados y cúmulos no homogéneos e inestables en el NF (15).

La dispersión de los nanotubos de carbono (CNT) en el fluido base se realiza mediante medios mecánicos y químicos. Al transmitir ondas de ultrasonido en un proceso de ultrasonificación (16) se dispersan los CNT mediante vibración. Métodos químicos incluyen: aplicar surfactantes como la goma arábica para evitar a la adhesión entre CNT (15).

La diferencias entre nanotubos de pared simple y pared múltiple está en su estructura, el primero posee una capa de grafeno, el MWCNT posee varias capas de grafeno anidadas. Los MWCNT se han demostrado en tener adecuadas características mecánicas y propiedades térmicas para almacenamiento de energía y transferencia de calor (16-17).

Estudios muestran que el aumento en la cantidad de tiempo de dispersión por ultrasonido reduce la mejora en la conductividad térmica de los NF basados en MWCNT, Assael et al. (18) observó que mucho tiempo de ultrasonidos rompe la longitud de los MWCNT y por tanto la

relación entre longitud y diámetro conocido como razón de aspecto es un parámetro importante que afecta el resultado de la mezcla.

El comportamiento de la conductividad térmica con la temperatura es estudiado por Wen y Ding (19). Se observó que la conductividad térmica de dispersiones acuosas de nanotubos de carbono aumenta de forma no lineal con la concentración de partículas y con la temperatura. A temperaturas menores que 30°C el nanofluido exhibía un comportamiento casi lineal con la temperatura.

Como se mencionó anteriormente se han empleado distintos fluidos base para las nanopartículas, Xie et al. (20) midieron la conductividad térmica del NF basado en MWCNT con diferentes fluidos base, estos fueron agua, glicol de etileno y deceno. Para NF a base de agua la mejora en la conductividad térmica fue de 7 % con 1% de MWCNT en volumen. La mejora de la conductividad térmica es mayor si el fluido base tiene baja conductividad térmica.

P. Garg et al. (16) midieron la conductividad térmica, la viscosidad y el coeficiente de transferencia de calor de agua y MWCNT bajo condiciones de flujo laminar. Se observó un comportamiento no Newtoniano muy pronunciado a concentraciones de MWCNT mayores a 1%, las concentraciones estudiadas se encuentran entre 0 a 1% en fracción

másica. El NF muestra tendencias newtoniana cuando los esfuerzos de corte en el fluido son mayores (equivalente a mayor velocidad de flujo). Se obtuvo un máximo de 20% de aumento en la conductividad térmica a 35°C.

Se han elaborado estudios teóricos sobre transferencia de calor de NF en un flujo laminar a través de una tubería circular, Massimo C. et al. (21) asumieron que los NF se comportan como fluidos de una sola fase, como resultado encontraron la existencia de una concentración óptima de NP para un flujo másico y temperatura dados.

Se realizó un Benchmark Internacional sobre propiedades de nanofluidos que contó con la participación de 34 organizaciones del mundo y en donde se realizó la medición de la conductividad térmica de muestras idénticas de dispersiones coloidalmente estables de NP. Este Benchmark fue conducido por Buongiorno J. et al. (22) en el MIT. Los NF probados fueron fluidos acuosos con NP de metal y óxidos, con formas esféricas y alargadas en concentraciones bajas y altas. Las técnicas de medición se agruparon en cuatro categorías: KD2 analizador de propiedades térmicas, alambre caliente trasciende THW, placa paralela de estado estacionario y disco caliente. Para todas las muestras con agua como fluido base, los datos de las organizaciones se desviaron de la media en +/- 5%, y para las muestras con PAO (poli alfa olefinas) como



fluido base la desviación fue +/- 10%. Los datos experimentales de conductividad térmica no presentan incrementos anómalos con respecto a la teoría clásica del medio efectivo de partículas dispersas.

En general los estudios muestran que se obtienen mejoras de la conductividad al agregar MWCNT al agua, la mejora no suele compensar el aumento de la viscosidad excepto para ciertas condiciones óptimas de operación. La viscosidad aumenta abruptamente después de un 1% de MWCNT en agua donde además se intensifica el comportamiento no newtoniano, que se presenta a muy bajas concentraciones, se sugiere el uso de NP en flujo laminar donde la conductividad es más importante que la mezcla por advección. Las posibles aplicaciones de las NP aún está en desarrollo pero muchos investigadores lo sugieren para enfriamiento electrónico.

### **1.3. Mezclas entre MPCM y MWCNT.**

G.H. Zhang y C.Y. Zhao (23) experimentalmente caracterizan las propiedades de la mezcla de MPCM, MWCNT y agua. Las propiedades térmicas y reológicas de la muestra se obtuvieron con: un calorímetro diferencial de barrido (DSC), análisis termogravimétrico (TGA), medidor de conductividad térmica y reómetro. Se encontró que esta mezcla mejora la conductividad térmica y calor específico, y que una mezcla de

10% en peso de MPCM y 1% de MWCNTs logra un buen rendimiento y estabilidad.

Al igual como se pretende en este trabajo Taherian y Alvarado (24) modelaron propiedades finales de una mezcla de MPCM, MWCNT y agua y luego desarrollaron un código computacional que con la simulación buscaba una composición óptima de esta mezcla para un proceso en un intercambiador de calor de tubo concéntrico, entre los parámetros de desempeño se analizaron el coeficiente global de transferencia de calor, pérdidas por bombeo, etc.

En otra publicación Alvarado et Al (25) propusieron caracterizar las propiedades termo físicas de mezclas de MPCM y MWCNT, en este caso las MWCNT se encuentran incrustadas tanto en el núcleo y en las cápsula de los MPCM. Se obtuvo que no había una diferencia significativa con los MPCM sin la adición de MWCNT en el núcleo. Se lograron también obtener cápsulas durables cuando se efectuaron los ciclos de bombeo.

Siendo las mezclas de entre Agua MPCM y MWCNT un área de estudio relativamente nueva, mayor investigación experimental se requiere para obtener las propiedades termo-físicas de estas mezclas a diversas concentraciones. Aunque los beneficios combinados de los MPCM y

MWCNT en agua son prometedores, problemas asociados con viscosidad y comportamiento no-newtoniano aún quedan por resolver.

# CAPÍTULO 2

## 2. PROPIEDADES TERMO FÍSICAS

Las propiedades de la materia determinan su comportamiento ante la presencia de estímulos, por ende para el análisis de un sistema ingenieril se requieren propiedades termo-físicas y mecánicas bien definidas. Las ciencias térmicas en ingeniería emplean el termino termo-físicas para referirse a las propiedades termodinámicas y de transporte, dentro de la primera categoría tenemos a la densidad y al calor específico las cuales pertenecen al estado de equilibrio del sistema, dentro de la segunda categoría tenemos a la conductividad térmica que establece características de la materia ante la transferencia de calor y la viscosidad dinámica que establece características de transferencia de momento (Incropera De Witt (62) pp. 67).

Es necesario caracterizar las propiedades termo-físicas de los compuestos de agua, MWCNT y MPCM en función de las concentraciones de sus componentes. Estas concentraciones pueden estar expresadas en fracciones volumétricas, másicas o molares.

La forma en la que se expresa la concentración depende del modelo teórico a utilizar. Por ejemplo al trabajar con fracciones volumétricas es fácil obtener la densidad final usando la teoría de mezclas simples, la conductividad final y la viscosidad también pueden obtenerse con ecuaciones preestablecidas o con ecuaciones provenientes de gráficas experimentales que se encuentran en la literatura. Sin embargo, trabajar con fracciones másicas facilita la obtención de otras propiedades como el calor específico.

Un límite práctico para la fracción volumétrica de MPCM corresponde a un 20%, por encima de este valor la mezcla comienza a presentar un comportamiento no Newtoniano cada vez más pronunciado (26). EL límite para la fracción volumétrica de MWCNT es 1-2% se ha encontrado que por encima de estos valores el NF presenta una viscosidad muy alta e impráctica además de un fuerte comportamiento no-newtoniano (27).

## 2.1. Densidad

Para caracterizar la densidad de la mezcla se ha empleado la ley de conservación de masa en la cual se basa en la teoría de mezclas simples. Se asume que la mezcla tiene dos componentes: NP y MPCM en el fluido base se emplea la Ecuación (2.1) (24).

$$\rho_{eff} = \rho_{np}\varphi_{np} + \rho_{MPCM}\varphi_{MPCM} + \rho_{bf}(1 - \varphi_{np} - \varphi_{MPCM}) \quad (2.1)$$

Si se considera que la mezcla se realiza con una suspensión de MPCM y un NF con concentraciones fijas de MPCM y MWCNT respectivamente, se utiliza una ecuación similar a la (2.1) pero se toma en cuenta las densidades de la suspensión de MPCM y el NF de MWCNT. El uso de este método para modelar la densidad es justificado por Vajjha et al. (26) quienes mostraron que para un NF, la teoría de mezclas simple puede ser usada con una mínima desviación de los datos experimentales. Se asume que la densidad de las suspensiones de MPCM, puede ser expresada mediante la teoría de mezclas simples.

## 2.2. Conductividad Térmica

La conductividad térmica es una propiedad compleja de caracterizar ya que muchos factores afectan su valor. La conductividad térmica de un fluido puede ser mejorada con el uso de suspensiones metálicas o de otro material altamente conductor como los nanos tubos de carbono.

### 2.2.1. Conductividad térmica de la suspensión de MPCM

La conductividad térmica de la suspensión de MPCM es calculada mediante la relación de Maxwell (28) Ecuación (2.2) y está basada en la teoría del medio efectivo (30).

$$k_{slurry} = k_{bf} \frac{2k_{bf} + k_{MPCM} + 2\varphi(k_{MPCM} - k_{bf})}{2k_{bf} + k_{MPCM} - \varphi(k_{MPCM} - k_{bf})} \quad (2.2)$$

Debido a que las características más importantes de una suspensión de MPCM son el calor específico y la viscosidad dinámica no se ha estudiado ampliamente su conductividad térmica.

### 2.2.2. Conductividad térmica de nano-fluidos de MWCNT

La conductividad térmica de los nano-fluidos depende de varios factores como concentración volumétrica, temperatura, forma/ratio de aspecto, fluido base, cantidad y tipo de dispersantes, tipo de nano partícula, método de dispersión, potencial de hidrógeno (pH) y efectos de agregación (29).

Para los nano-fluidos basados en MWCNT existen algunas discrepancias en el comportamiento de la conductividad térmica en función de la fracción volumétrica de los nanotubos, a pesar de ello todos

los estudios muestran una conductividad térmica mayor a la predicha mediante la relación de Hamilton-Crosser (H-C) Ecuación (2.3), la cual también se basa en la t ETM [30].

$$K_{nf} = K_{bf} \left[ \frac{K_{np} + (n-1)K_{bf} - (n-1)\varphi_{np}(K_{bf} - K_{np})}{K_{np} + (n-1)K_{bf} + \varphi_{np}(K_{bf} - K_{np})} \right] \quad (2.3)$$

El factor de forma empírico  $n$  es definido mediante la Ecuación (2.4)

$$n = 3/\xi \quad (2.4)$$

Donde la esfericidad  $E$  es definida como el ratio entre el área superficial de una esfera con el volumen igual al de la partícula y el área de la partícula.

La relación H-C no considera mecanismos de incremento en la conductividad térmica como estratificación líquida alrededor de la superficie de la NP, transporte de fonones balístico, movimiento Browniano (El cual induce micro convección) y agregación de nano partículas los cuales probablemente expliquen la desviación con respecto a la relación de H-C (31).

Algunos estudios muestran un incremento lineal de la conductividad térmica a pequeñas concentraciones volumétricas de MWCNT (32). Dada la complejidad de considerar todos los factores antes



mencionados, se emplea el modelo empírico de la ecuación (2.5), que es obtenido con una regresión lineal con ajuste de curva, donde utilizaron los datos experimentales obtenidos por P. Garg et Al (16) y Kallpana et al [65].

$$\frac{k_{nf}}{k_{bf}} = 1 + c_k \varphi \quad (2.5)$$

El coeficiente  $C_k$  de conductividad térmica permite ajustar los datos experimentales presentes en la literatura a un comportamiento lineal.

Al preparar un NF, se aplican métodos de dispersión mecánicos y químicos para evitar conglomerados y asegurar la homogeneidad de la mezcla. P. Garg et al. (16) estudian el efecto que tiene el tiempo de dispersión en NF basados en MWCNT, al incrementar el tiempo de dispersión existe fragmentación de los CNT a través de su longitud, y se observa una disminución en la conductividad. Se observan mayores aumentos de conductividad cuando se incrementa la temperatura del fluido base. Si no se añaden dispersantes aparecen conglomerados que reducen la conductividad térmica.

### **2.2.3. Conductividad térmica de la mezcla**

La conductividad térmica de mezclas que contienen nano partículas y MPCM es modelada usando “regla de mezcla lineal” para dos

componentes como se muestra en la ecuación (2.6). Otros modelos más complicados (33) tienen una desviación de menos del 10% comparada con la “regla de mezcla lineal” (18).

$$k_{eff} \cong x_{nf} k_{nf} + (1 - x_{nf}) k_{Slurry} \quad (2.6)$$

### 2.3. Calor Específico

El calor específico de la mezcla es calculado mediante la Ecuación (2.7) la cual es deducida mediante un balance de energía en un sistema cerrado en estado estable en la que se añade calor y considera los efectos del porcentaje de cambio de fase  $\varepsilon$  (5,24).

$$C_{p,eff} = \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_{np} \varphi_{np} C_{p,np} + \rho_{MPCM} \varphi_{MPCM} C_{p,MPCM} + \rho_{bf} (1 - \varphi_{nf} - \varphi_{MPCM}) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_{MPCM} \varphi_{MPCM} \frac{H}{\Delta T} \right) \quad (2.7)$$

### 2.4. Viscosidad Dinámica

Una multitud de factores afectan el valor de la viscosidad dinámica de la mezcla, entre ellos la temperatura, dispersantes usados, tipo de aditivos, formas de preparación (16). También es importante mencionar que este es el factor limitante en las mezclas de agua MPCM y MWCNT ya que los efectos adversos de la viscosidad y el comportamiento no-Newtoniano, dificultan el modelado y vuelven impráctico seguir aumentando las concentraciones. Para MPCM un concentración máxima

adecuado es de 20% y para los MWCNT es entre 1-2% (35,36).

#### 2.4.1. Viscosidad de la suspensión de MPCM

La viscosidad de la suspensión de MPCM es modelada mediante una modificación a la ecuación de Einstein para partículas esféricas grandes (diámetro >5um) en dispersiones concentradas, la Ecuación (2.8) es propuesta por Toda et al. (34). la cual aproxima el comportamiento de la viscosidad de suspensiones esféricas en agua. El factor de corrección  $s$  que depende del diámetro y la concentración de partículas permiten ajustar con mayor precisión el modelo a los datos experimentales.

$$\mu_{slurry} = \left[ \frac{1 - s0.5\varphi_{MPCM} - \varphi_{MPCM}}{(1 - s\varphi_{MPCM})^2(1 - \varphi_{MPCM})} \right] \mu_{bf} \quad (2.8)$$

#### 2.4.2. Viscosidad de nano-fluidos basados en MWCNT

La viscosidad de suspensiones fibrosas y nano-fluidos basados en MWCNT puede ser predicha mediante la ecuación modificada de Maron-Pierce Ecuación (2.9) (25), para concentración máscas menores al 1%.

$$\mu_{nf} = \left( 1 - \frac{\varphi_a}{\varphi_m} \right)^{-2} \mu_{bf} \quad (2.9)$$

Donde  $\varphi_m$  se define como la máxima fracción volumétrica a la cual la viscosidad de la suspensión alcanza un valor infinito, esto depende de ratio de aspecto medio de los MWCNT (35).  $\varphi_a$  Es la fracción volumétrica efectiva de NP la cual considera la presencia de aglomeraciones, esta variable depende de la geometría, surfactantes o dispersantes (36).

### 2.4.3. Viscosidad de la mezcla

La viscosidad cinemática efectiva de la mezcla es estimada mediante la aproximación sugerida por Taherian et al. (24), la cual se basa en el método Refutas (37). Para cada componente se calcula el índice de viscosidad (VBI por sus siglas en inglés) mediante la Ecuación (2.10), luego se calcula el VBI de la mezcla usando la regla de mezcla simple Ecuación (1.11) y por último la viscosidad cinemática efectiva mediante la Ecuación (2.11).

$$VBI = 14.534 \ln[\ln(v + 0.8)] + 10.975 \quad (2.10)$$

$$VBI_{Blend} = x_{Slurry} VBI_{Slurry} + x_{nf} VBI_{nf} \quad (2.11)$$

$$v = \exp\left(\exp\left(\frac{VBI_{Blend} - 10.975}{14.534}\right)\right) - 0.8 \quad (2.12)$$

### Resumen de propiedades

La siguiente tabla fue creada consultando hojas técnicas de los fabricantes, y de publicaciones donde se efectuaron ensayos experimentales.

**TABLA 2**  
**PROPIEDADES TERMOFÍSICAS DE LOS COMPONENTES, 25°C**

PARÁMETRO	SIMBOLO	VALOR
Densidad del fluido base (FB)	$\rho_{bf}$	1000 $Kg/m^3$
Densidad de las NP	$\rho_{np}$	2100 $Kg/m^3$
Densidad del MPCM	$\rho_{MPCM}$	0856 $Kg/m^3$
Calor específico del FB	$C_{p,bf}$	4.179 $KJ/(Kg K)$
Calor específico de las NP	$C_{p,np}$	0.485 $KJ/(Kg K)$
Calor específico del MPCM	$C_{p,MPCM}$	2.180 $KJ/(Kg K)$
Calor latente de las MPCM	$\lambda$	244.0 $KJ/(Kg K)$
Conductividad del fluido base	$K_{bf}$	0.616 $W/(m K)$
Conductividad de las NP	$K_{np}$	80 $W/(m K)$
Conductividad del MPCM	$K_{MPCM}$	0.152 $W/(m K)$
Coeficiente de Conductividad NP	$CK_{np}$	11
Coeficiente de Conductividad PCM	$CK_{mpcm}$	0.152
Viscosidad de fluido base 25°C	$\mu_{bf}$	0.89E-3 $Pa/s$
Coeficiente de Viscosidad de NP	$C\mu_{np}$	120
Coeficiente de Viscosidad del MPCM	$C\mu_{mpcm}$	15

# **CAPÍTULO 3**

## **3. HERRAMIENTAS DE OPTIMIZACIÓN TERMODINÁMICA**

El desarrollo de la termodinámica en los últimos siglos permitió entender fenómenos naturales relacionados con la transferencia y transformación de la energía en todas las disciplinas. En la ingeniería esto llevo al mayor desempeño de las máquinas y procesos.

Este desarrollo permitió elaborar técnicas de optimización que identificaban las fuentes de degradación de la energía en los procesos, encontrar el máximo rendimiento teórico de los mismos (39) y a principios de la década de los sesentas fueron establecidos los fundamentos del análisis de Exergía (40,41), como un desarrollo

integrado de los principios de la termodinámica aplicado a sistemas y procesos industriales. En las últimas décadas se ha desarrollado el método de minimización de generación de entropía (EGM) (58-59) que combina también los fenómenos de mecánica de fluidos y transferencia de calor, con ellos se modelan las limitaciones físicas propias de un proceso, esto lleva a la optimización termodinámica a un nuevo nivel.

En la sección 3.1 presenta un resumen del método de análisis de exergía, el cual indica el desempeño ideal de los sistemas a través del máximo trabajo disponible que se puede obtener de algún proceso.

En la sección 3.2 se explica el método de minimización de generación de entropía, esta obtiene una expresión matemática para la generación de entropía (medida de irreversibilidades) de un proceso en particular para luego minimizarla en función de las variables que intervienen en la ecuación tales como: geometría, propiedades termofísicas del fluido de trabajo y condiciones de operación. También se presenta ejemplos donde se ha aplicado el método de minimización de generación entropía (EGM).

Finalmente en la sección 3.3 se explican algunas herramientas matemáticas de optimización de funciones, dada su utilidad en la optimización termodinámica, especialmente en el método EGM.

### **3.1. Método de Exergía**

#### **3.2.1. Introducción**

A lo largo de la historia el concepto de exergía tuvo diferentes nombres. En 1875 Gibbs publica un trabajo en donde le llama "Energía disponible del cuerpo y del medio" y donde explica los fundamentos teóricos del concepto de exergía (39). Más adelante se proponen diferentes nombres que terminan por convención nombrándola exergía, Z. Rant (41).

El método de exergía combina la 1ra y 2da ley de la termodinámica para encontrar el rendimiento máximo teórico de un proceso en particular, encuentra y mide las causas de irreversibilidad al medir cuanto trabajo se perdió o pudo ser extraído (50). Un análisis de exergía permite valorar el recurso energético en cada proceso y de un sistema completo, indicando como se está aprovechando la energía a través del sistema y donde están ocurriendo las pérdidas de mayor valoración T. J. Kotas (54).

#### **Objetivos del análisis exergético**

- Determinar la posibilidad de diseñar un proceso diferente, que minimice la destrucción de exergía, e incremente el desempeño.



- Evaluar el desempeño actual de un sistema bajo una base comparativa de desempeño ideal.
- Encontrar los defectos de mayor importancia en los procesos y priorizar el esfuerzo económico en resolver dicho problema.

### 3.2.2. Conceptos importantes en el método de exergía

#### Exergía

La exergía se define como el potencial trabajo mecánico que puede aprovecharse (o extraerse) de un sistema con diferentes formas de energía en relación a un ambiente específico (50). El resto de la energía es finalmente descartada como energía de desecho y no se la considera.

#### Eficiencia exergética

Con el fin de medir el grado de perfección o idealidad con la que un proceso cumple su función, se desarrolla la eficiencia exergética. Esto es desempeño real sobre el desempeño ideal, Ecuación (3.1)

$$\eta = \frac{\text{Desempeño ideal máximo} - \text{Irreversibilidad}}{\text{Desempeño ideal máximo}} = \frac{\text{Desempeño real}}{\text{Desempeño ideal}} \quad (3.1)$$

#### Principio de disminución de exergía y destrucción de exergía

La exergía de un sistema aislado siempre disminuye, en el caso de un proceso reversible, permanece constante. La exergía nunca aumenta y

es destruida en procesos reales. Esto es el principio de disminución de exergía, en sistemas aislados esta disminución es igual a la exergía destruida.

La generación de entropía siempre destruye la exergía, la exergía destruida es positiva para cualquier proceso real y es cero para uno reversible (Ideal). El trabajo perdido es la exergía destruida.

### **3.2.3. Análisis de Exergía**

Para obtener el máximo trabajo que se puede obtener de un sistema, se debe idealizar un proceso que conduzca desde un estado inicial al estado muerto de una manera reversible.

Se pueden modelar ciclos térmicos ideales como el de Carnot para extraer trabajo del gradiente de temperatura; para extraer trabajo de los gradientes de presión se idealiza una expansión reversible, modelado similar se aplica al potencial químico. Esto se efectúa para encontrar el máximo trabajo de un sistema cerrado, y es equivalente a encontrar la exergía del sistema (50).

Lo común para obtener la exergía (Trabajo disponible) de un sistema es a través de sus propiedades antes del proceso y en el estado muerto, con la siguiente fórmula.

$$\text{Exergía} = \chi = (h - h_o) - T_o(s - s_o) \quad (3.2)$$

El subíndice “o” hace referencia a la propiedad en el estado muerto, “h” es la entalpía y “s” es la entropía.

Si la temperatura o la presión del sistema en el estado final son mayores que la temperatura o presión del ambiente, será posible producir trabajo adicional hasta alcanzar condiciones ambientales.

La exergía es una propiedad que depende del ambiente y del sistema, del estado inicial y del estado muerto del mismo. El balance de exergía de un sistema abierto que experimenta procesos químicos, físicos y térmicos puede ser descrito con la siguiente fórmula.

$$(\sum_{\text{entrada}} \dot{\chi}_j) - (\sum_{\text{salida}} \dot{\chi}_k) \pm \dot{\chi}_Q \pm \dot{W} - I = \Delta \dot{\chi} \quad (3.3)$$

Donde “ $\dot{\chi}_j$ ”, y “ $\dot{\chi}_k$ ”, son la transferencia de exergía por el flujo másico que entra y sale del volumen de control, “ $\dot{\chi}_Q$ ” es la exergía debida al flujo de calor,  $\dot{W}$  es la transferencia de exergía debida al trabajo, “I” es la irreversibilidad o tasa de trabajo destruido, y “ $\Delta \dot{\chi}$ ” es el cambio de exergía en el volumen de control.

Aplicar las Ecuaciones 3.1 – 3.3 a los procesos y sistemas permiten medir el desempeño real comparado con el desempeño ideal termodinámico, de esta forma se tiene una base comparativa para efectuar un diseño.

#### **3.2.4. Metodología**

Hay diferentes enfoques para aplicar el análisis exergético a problemas reales en la industria (51). Uno de estos consiste en valorar las pérdidas y la eficiencia exergética de cada componente del sistema, de esta manera valorar objetivamente cada transformación de energía en el sistema.

De esta forma se puede modificar el diagrama de flujo de un sistema para mejorar su desempeño, cambiar o calibrar máquinas, añadir o quitar procesos, con el fin de acercar al sistema a su desempeño ideal (54).

De aquí se desprende un análisis económico del abanico de soluciones presentadas. La inversión adicional lleva a reducir costos, maximizar producción y recuperar inversión según el caso de la solución optada (53).

## **3.2. Método de Minimización de Generación Entropía**

### **3.2.1. Introducción**

El EGM es un método de modelado y optimización de dispositivos, equipos y sistemas térmicos que deben su imperfección teórica a los fenómenos y procesos físicos que los gobiernan (55-57). Este método (EGM) combina conceptos de termodinámica, transferencia de calor y mecánica de fluidos para formular una función de generación de entropía de un proceso en particular. Esta función depende de condiciones geométricas (longitud y diámetro), condiciones de trabajo (Temperatura, presión, flujo) y propiedades del fluido, los cuales hacen de parámetros fijos y variables en la función. Luego se minimiza esta función, usando un método matemático de optimización de funciones. Lo cual determina el valor óptimo del parámetro variable.

La finalidad del método EGM es diferente en cada caso de estudio, por ejemplo: maximizar transferencia térmica en intercambiadores de calor, maximizar la salida de energía en plantas de poder (61), minimizar energía requerida para refrigeración entre otros. El EGM adapta los parámetros a optimizar como por ejemplo características geométricas de un intercambiador, condiciones de operación y propiedades térmicas del fluido de trabajo a cada proceso o sistema en particular.

### 3.2.2. Conceptos relacionados al método EGM

Los conceptos en termodinámica (52) señalan que un proceso ideal (aquel de máximo desempeño) es uno que puede ser reversible, es decir que puede volver a su estado inicial invirtiendo los flujos de energía y masa (Normalmente Calor y trabajo), esto es aplicable a fenómenos químicos, eléctricos, de difusión etc.

Cuando en un proceso existen imperfecciones (llamadas irreversibilidades), este tiende a llegar un estado inalterable o muerto. La entropía generada durante un proceso es una medida de la cantidad de irreversibilidad que ocurrió durante tal proceso, esto quiere decir que existe oportunidad de incrementar el desempeño al identificar y minimizar las irreversibilidades relevantes, esto se logra al minimizar una expresión matemática de entropía generada. (55)

Las irreversibilidades comunes son: toda clase de fricción (roce molecular), transferencia de calor con gradiente de temperatura, reacciones químicas no controladas, mezclas en general; e incluyen fenómenos de difusión.

La fricción de un cuerpo en movimiento consume su energía cinética y la transforma en energía térmica (esto es irreversible), ya que para mover el cuerpo se requiere trabajo, no calor. Otro ejemplo son las reacciones

químicas, algunas reacciones controladas producen electricidad que es más útil que el calor generado por la misma reacción no controlada, y muchas veces se puede revertir la reacción química más fácilmente con electricidad que con calor.

### **3.2.3. Utilidad del Método EGM**

En muchas ocasiones se debe intercambiar un problema con otro, lo mismo ocurre en procesos termodinámicos, existen mecanismos o características de diseño que conllevan a irreversibilidades que compiten unas con otras, por ejemplo: en los intercambiadores de calor, muchos ductos pequeños mejoran la transferencia de calor pero incrementa las pérdidas de presión, pocos ductos de mayor tamaño requiere menor presión para mover el flujo pero reduce intercambio térmico.

En este caso el desempeño está asociado a la cantidad de calor que se debe transferir con la presión necesaria para la circulación del flujo, el EGM nos guía a seleccionar el tamaño óptimo de ducto que maximice este desempeño (58-59).

La optimización basada en el EGM se realiza sujeta a restricciones físicas responsables del funcionamiento. Los modelos y la expresión de entropía generada permiten comprender la irreversibilidad del proceso, donde se encuentra y cómo afecta al rendimiento.

### **3.3.4. Ventajas del Método EGM**

El EGM se diferencia del análisis termodinámico convencional exergético (54,60), en que desarrolla y minimiza una expresión de generación de entropía, esto es para minimizar la irreversibilidad de un diseño. Para desarrollar la expresión para la entropía se requiere relaciones entre transferencia de calor y temperatura, diferencia de presión y caudales másicos, relacionar la idealidad del diseño con características referentes a dimensiones, formas, materiales, velocidades e intervalos de tiempo en la operación.

El método EGM permite mediante la variación de las características físicas del sistema (Dimensiones) medir el grado de irreversibilidad del diseño propuesto y de esa manera proponer el diseño más cercano a la operación ideal.

### **3.3.5. Ejemplos de Aplicación**

En los siguientes ejemplos se ha de poner en manifiesto la utilidad del método EGM. El primer ejemplo presenta la optimización del diámetro en el fenómeno de ramificación, que es simple, fácil de entender y fascinante al mismo tiempo. El segundo presenta la optimización del diámetro en un proceso de transferencia de calor para flujo interno, este tiene una aplicación inmediata en los intercambiadores de calor en general. El tercer ejemplo está más relacionado con los objetivos de este



trabajo y muestra la optimización de concentración de MWCNT en una mezcla para una aplicación dada.

### **A) Optimización del Diámetro de un flujo en ramificación**

La mayoría de ejemplos EGM están caracterizados por la generación de entropía debido a la transferencia de calor, para comenzar con un ejemplo simple donde la irreversibilidad es enteramente debida a fricción de fluidos. En este ejemplo, las redes de ramificaciones, son en realidad un diseño de la naturaleza, descubriremos estas características geométricas en lugares aparentemente no relacionados, los pasajes de aire en los pulmones, los vasos sanguíneos en el sistema circulatorio, las ramas del árbol, el sistema de raíces de plantas, la cuenca de un río, el delta de un río, las dendritas del sistema nervioso y la ramificación de un rayo, Existe una razón termodinámica por la que se parecen.

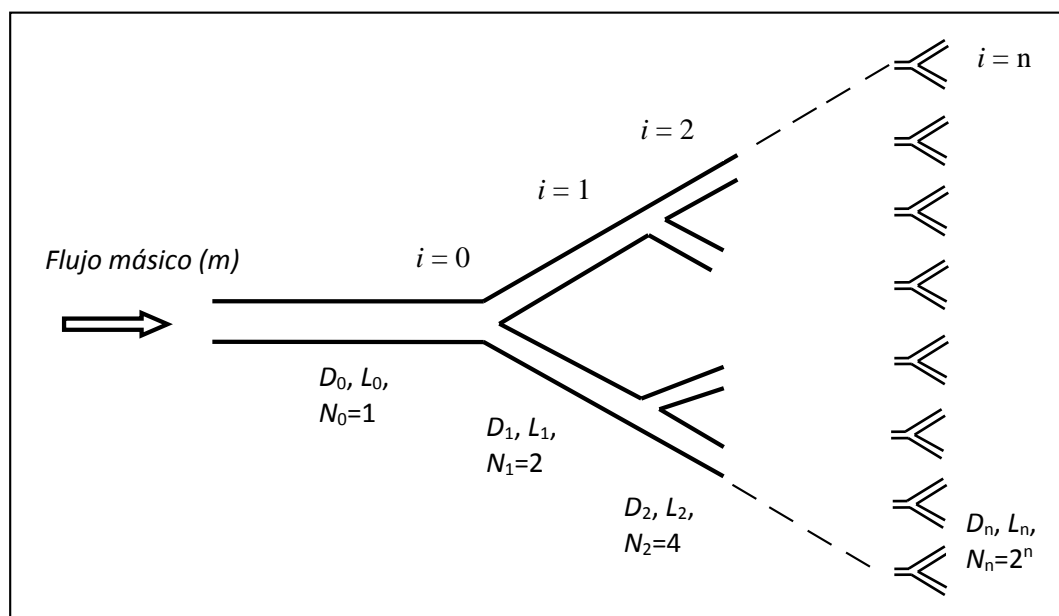
Supongamos que una red de conductos ramificados ocupa un volumen " $V$ " fijo. Cada ducto es redondo de longitud " $L_i$ " y de diámetro interno " $D_i$ ". Uno de los extremos de la red es un único ducto de longitud " $L_0$ " y diámetro " $D_0$ " que también es el más grande. La red es modelada como una secuencia de " $n$ " etapas de ramificación, el resultado de la  $i$ -ésima etapa de ramificación es el tamaño del tubo ( $L_i, D_i$ ). El número de tubos de tamaño ( $L_i, D_i$ ) es  $N_i$ , cada tubo somete a la bifurcación y se muestran en la *figura 3.1* cada etapa de ramificación.

Si se efectúa un análisis a través del EGM podemos obtener la siguiente fórmula, con las condiciones antes descritas.

$$\left(\frac{D_{i+1}}{D_i}\right)_{opt} = \frac{(2/\lambda)^{1/6} N_{i+1}^{1/3}}{(2/\lambda)^{1/6} N_i^{1/3}} = 2^{-1/3} \cong 0.8 \quad (3.4)$$

El valor de 0.8 es una constante universal usado ampliamente en muchas disciplinas, se observa en los sistemas respiratorio y sanguíneo de cada arteria, vena o bronquiolo, se dividen en 2 ductos de 0.8 veces el diámetro anterior.

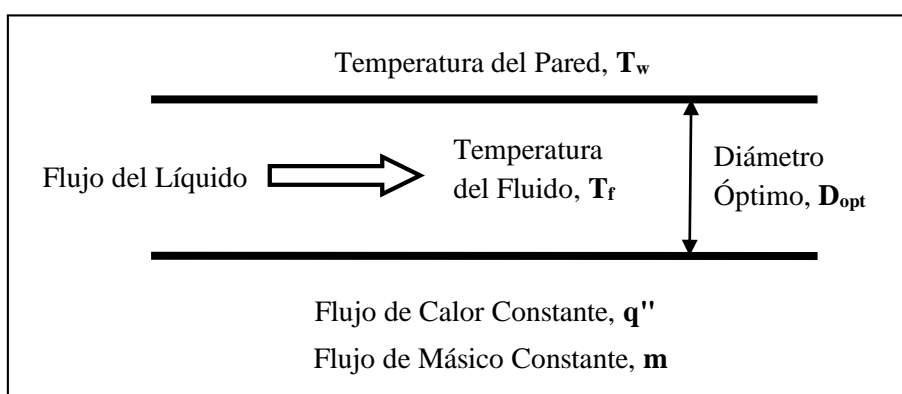
Se puede ver como la naturaleza busca mecanismos o geometrías que incrementen el desempeño de los procesos biológicos o naturales.



**FIGURA 3.1.** DUCTO EN RAMIFICACIÓN, CASO DE BIFURCACIÓN

## B) Optimización de Diámetro en el fenómeno de transferencia de calor para flujo interno.

Se considera un ducto intercambiador de calor, de sección transversal arbitraria  $A$  y perímetro húmedo  $p$ . La función ingenieril del pasaje se especifica en términos de transferencia de calor por unidad longitud  $q'$  que debe transmitirse al flujo másico  $\dot{m}$ . En estado estable, el calor  $q'$  cruza el gradiente de temperatura  $\Delta T$  entre la pared ( $T + \Delta T$ ) y el flujo ( $T$ ). La corriente fluye con fricción en  $x$ .



**FIGURA 3.2. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO INTERNO**

Tomando como un sistema termodinámico un trozo de ducto de longitud  $dx$ , la 1ra y 2da ley de establecen:

$$\dot{m}dh = q'dx \quad (3.5)$$

$$\dot{S}'_{gen} = \dot{m} \frac{ds}{dx} - \frac{q'}{T+\Delta T} \quad (3.6)$$

Donde  $\dot{S}'_{gen}$  es la tasa de generación de entropía por unidad de longitud. ([59] pag. 582) Al combinar esta ecuación con  $dh = Tds + vdP$ , la

ecuación (3.6) se vuelve:

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{q'\Delta T}{T^2(1+\Delta T/T)} + \frac{\dot{m}}{\rho T} \left(-\frac{dP}{dx}\right) \approx \frac{q'\Delta T}{T^2} + \frac{\dot{m}}{\rho T} \left(-\frac{dP}{dx}\right) \quad (3.7)$$

Cada término de la ecuación 3.7 representa la irreversibilidad asociada a un tipo mecanismo. El primer término de la ecuación representa la generación de entropía por transferencia de calor.

$$\dot{S}'_{gen} = \dot{S}'_{gen,\Delta T} + \dot{S}'_{gen,\Delta P} \quad (3.8)$$

Al añadir parámetros de transf. de calor y mecánica de fluidos a la ecuación (3.7) se convierte en:

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{(q'')^2 D_h}{4T^2 \dot{m} C_{pt}} + \frac{2\dot{m}^3 f}{\rho^2 T D_h A^2} \quad (3.9)$$

Como están fijos  $q'$  y  $\dot{m}$ , sabemos que el diseño tienen dos grados de libertad, la forma del ducto (representado por el perímetro húmedo  $\mathbf{p}$ ) y el área transversal  $\mathbf{A}$ , u otro par de parámetros independientes como (Re,  $D_h$ ).

La competencia entre la irreversibilidad por transferencia de calor y flujo está escondida por el factor de fricción y Stanton del lado derecho de la ecuación (3.9). Se sabe por transferencia de calor que el factor de fricción y Stanton aumentan simultáneamente al buscar un buen contacto térmico entre pared y fluido, por tanto lo que es bueno para

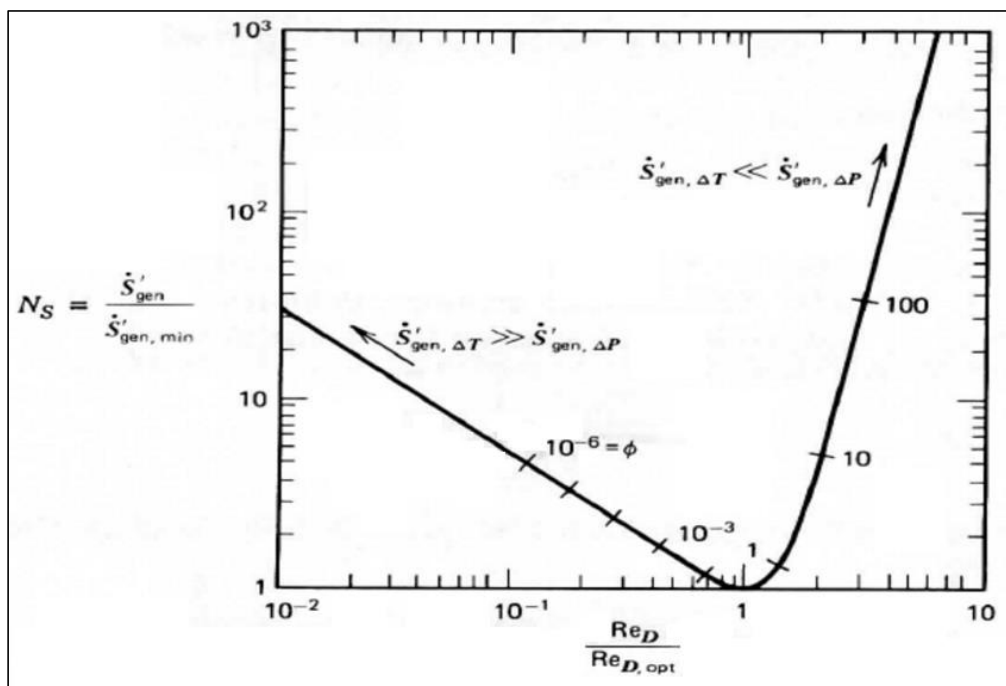
reducir la irreversibilidad de transferencia de calor es malo para la irreversibilidad por flujo y al revés.

Se ha de asumir que el ducto es de sección circular ( $A = \pi D^2/4$ ), entonces queda un grado de libertad, el cual puede ser el  $D$ ,  $Re$ , etc. Se puede simplificar la ecuación 3.9 con la correlación ( $Nu = St Re Pr$ ) y se especifica  $Re$  como variable a optimizar.

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{(q'')^2}{4T^2 k Nu} + \frac{32\dot{m}^3 f}{\pi^2 \rho^2 T D^5} \quad (3.10)$$

Con las correlaciones ( $Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$ ) y ( $f = 0.046 Re^{-0.2}$ ) se deja todo expresado en términos del  $Re$  y se efectúa la minimización  $d\dot{S}'_{gen}/(dRe) = 0$  y encontramos el valor óptimo para el Reynolds:

$$Re_{opt} = 2.023 Pr^{-0.071} \left( \dot{m} q' \frac{\rho}{\mu^{5/2} (k T)^2} \right)^{0.358} \quad (3.11)$$



**FIGURA 3.3.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA VS RAZÓN DE REYNOLDS ÓPTIMO, “ADVANCED ENGINEERING THERMODYNAMICS” A. BEJAN PAG. 586, FIG. 11.1 (59).

En la **Figura 3.3** se muestra la tasa de generación de entropía relativa a la mínima generable vs el Reynolds relativo al Re óptimo, se observa un aumento brusco a ambos lados de la condición óptima. La proporción de la distribución de irreversibilidad varía a lo largo de la curva en forma de V. A la derecha del óptimo dominada por la fricción y a la izquierda dominada por la transferencia de calor. En el punto óptimo, la razón entre las irreversibilidades es 0.168, significa que el equilibrio óptimo entre irreversibilidades no coincide cuando ambas son iguales.

### 3.3. Herramientas De Optimización

#### 3.3.1. Introducción

Se han presentado dos métodos para optimizar procesos de transferencia de calor, el *método de exergía* basado en maximizar el trabajo obtenible de un proceso y el Método de Minimización de Generación de Entropía (EGM) que encuentra el valor óptimo de una variable que minimiza la generación de entropía dadas ciertas condiciones en un proceso.

Estos métodos plantean problemas matemáticos de optimización, donde la *función objetivo* que se desea maximizar (Método de Exergía) o minimizar (EGM), es dependiente de las variables de optimización tales como: propiedades termofísicas, geometría y condiciones del proceso. Además la función objetivo está sujeta a restricciones que surgen debido a una variedad de limitaciones matemáticas o físicas.

Los problemas de optimización termodinámica que se encuentran vienen dados en la forma

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar o minimizar} & f_0(x) \\
 \text{sujeto a} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m
 \end{array} \tag{3.12}$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Donde  $x$  es el vector variable de optimización del problema,  $f_0$  es la función objetivo que deseamos maximizar o minimizar, las funciones  $f_i$  son las funciones de restricciones de desigualdad y los  $h_i$  son las funciones de restricciones de igualdad.

Los problemas de optimización se pueden clasificar por la forma de las funciones objetivo y de restricciones, una manera es dividirlos en dos grupos: los problemas de optimización lineal y no lineal. Se trata de un problema de optimización lineal si y solo si las funciones objetivos y de restricciones son lineales, es decir cumplen con la Ecuación (3.13).

$$f_i(\alpha x + \beta y) = \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) \quad (3.13)$$

Para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Si el problema no cumple con esto, entonces el problema es de optimización no lineal (42-43).

Al desarrollar el método EGM se plantea el problema de minimizar funciones tales como.

$$\dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b) = \frac{q''^2 \pi D^2}{4.36 k_{eff} T^2} + \frac{(8 * 10^6) \pi}{T} \left( \frac{C_{p,bf} \mu_{bf}}{C_{p,eff} \rho_{eff} D} \right)^2 \mu_{eff} \quad (f_0(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\text{sujeto a:} \quad -\varphi_{mwcnt} \leq 0 \quad (f_1(\varphi_a, \varphi_b))$$



$$\varphi_{mwcnt} - 0.02 \leq 0 \quad (f_2(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$-\varphi_{mpcm} \leq 0 \quad (f_3(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_{mpcm} - 0.12 \leq 0 \quad (f_4(\varphi_a, \varphi_b))$$

Método de donde  $C_{p,eff}, k_{eff}, \mu_{eff}$  y  $\rho_{eff}$  son funciones de  $(\varphi_{mwcnt}, \varphi_{mpcm})$ .

Esta función corresponde a la generación de entropía para un proceso de transferencia de calor con flujo de calor constante. Se tiene entonces un problema de optimización no lineal, con restricciones de desigualdad, donde el método más idóneo para resolver es el de *Condiciones de Karush-Khun-Tucker*, que puede ser encontrado en el apéndice A.

A continuación se enlistan y explican algunas herramientas de optimización matemática, estas son:

- los Multiplicadores de Lagrange
- Método de las condiciones de Karush-Khun-Tucker
- Métodos heurísticos
- Métodos Gráficos

### 3.3.2. Método de Multiplicadores de Lagrange

Los problemas no lineales los podemos analizar en dos casos: con restricciones de igualdad o con restricciones de desigualdad. El método para resolver los programas no lineales con restricciones de igualdad son los Multiplicadores de Lagrange. Este método crea una ecuación a optimizar introduciendo las restricciones de igualdad en la función objetivo por medio de los multiplicadores de Lagrange (44).

### 3.3.3. Método de las Condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Por otro lado si se tiene restricciones de desigualdad es necesario plantear las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para resolver el problema (45-46). Las condiciones KKT son el caso general del Método de Multiplicadores de Lagrange, y provee un sistema de ecuaciones generalmente implícitas, las cuales deberán ser resueltas por métodos numéricos como el de Newton Raphson.

Las condiciones de KKT encuentran el valor óptimo primario  $x^*$  de todas las variables de optimización, los multiplicadores de Lagrange para las restricciones de desigualdad e igualdad,  $\lambda^*$  y  $v^*$  respectivamente. Ya que  $x^*$  es el valor óptimo, entonces minimiza al Lagrangian  $\mathcal{L}(x, \lambda^*, v^*)$  a través de las variables de optimización  $x$ , por lo tanto el gradiente del Lagrangian debe ser cero, es decir,

$$\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, v^*) = \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^p v_i^* \nabla h_i(x^*) = 0, \quad (3.14)$$

además se tiene

$$\begin{aligned} f_i(x^*) &\leq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_i(x^*) &= 0, & i = 1, \dots, p \\ \lambda_i^* &\geq 0, & i = 1, \dots, m \\ \lambda_i^* f_i(x^*) &= 0, & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.15)$$

Todas estas condiciones (3.14) y (3.15) son llamadas las condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (42,45,46).

Se puede ordenar las condiciones KKT en 4 secciones

1. Factibilidad primaria

$$f_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, p$$

2. Factibilidad dual

$$\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$$

3. Ecuaciones de holgura complementaria

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$$

4. Lagrangian Estacionario

$$\nabla L(x^*, \lambda^*, v^*) = \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^p v_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

Se puede concluir que la solución del problema de optimización no lineal (valor óptimo) cumple con las condiciones de KKT. Pero además si el problema no lineal es convexo, y cualesquiera puntos  $x'$  y  $(\lambda', v')$  cumplen las condiciones KKT, entonces estos son puntos óptimos.

### 3.3.4. Métodos Heurísticos

Son métodos, técnicas o procedimientos informales para resolver los problemas. La mayoría de problemas de optimización suelen ser matemáticamente muy complejos, ellos deben ser resueltos por algoritmos dados en la literatura. Sin embargo existen una gran parte que no pueden ser resueltos usando estos algoritmos, debido a que sus características no se asemejan a los de la literatura, o porque el tiempo para obtener el resultado es demasiado extenso y costoso. Los métodos heurísticos han surgido como una alternativa para estos casos, estos métodos encuentran soluciones “buenas” (no necesariamente óptimas) en un tiempo corto.

Los métodos heurísticos se construyen para problemas particulares, debido a la naturaleza y variedad de ellos, por eso resulta complicado clasificarlos de manera general. Sin embargo se tiene que los métodos

heurísticos más conocidos son: descomposición, inductivos, reducción, constructivos y de búsqueda local (47-49).

### **3.3.5. Método Gráfico**

Otro método no formal para resolver los problemas de optimización, es evaluar las variables de optimización en todo el dominio de la función objetivo, sujeta o no a restricciones. De esta manera es posible visualizar el comportamiento de la función objetivo y localizar los máximos o mínimos. Esto es factible si se escribe un algoritmo computacional que permita evaluar a la función punto a punto de forma rápida, gracias al gran poder de cálculo de las computadoras actuales.

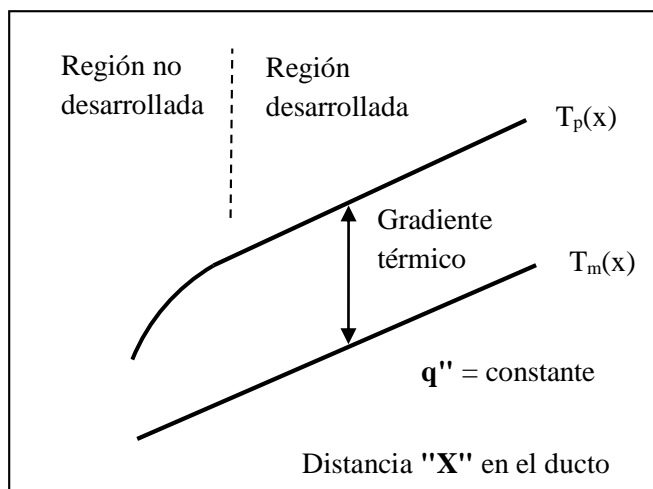
El método está limitado por el número de variables simultáneas que se pueden visualizar, es decir, gráficas de hasta tres dimensiones, la función objetivo y dos variables de optimización.

Este método se desarrolla en los capítulos 4 y 5, para optimizar ecuaciones de generación de entropía en función de las concentraciones volumétricas de MPCM y MWCNT en agua.

# CAPÍTULO 4

## 4. PROCESO CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE

Un flujo que recorre un ducto y experimenta un flujo de calor constante a través de sus paredes es un caso de estudio común en los textos introductorios de transferencia de calor, ((62) pp. 486). La figura 4.1 muestra el perfil térmico del fluido en el ducto.



**FIGURA. 4.1.** RELACIÓN TEMPERATURA VS DISTANCIA, EN UN PROCESO DE FLUJO INTERNO CON FLUJO CALOR CONSTANTE.

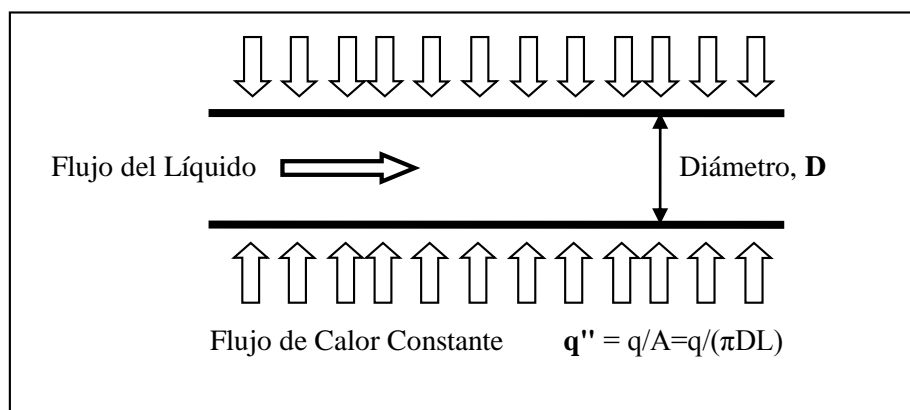
Este proceso se encuentra en aplicaciones donde se usan calentadores eléctricos (Ej. Instrumentación y/o medición), y donde se capta radiación (Ej. colectores solares).

Se busca encontrar una mezcla ideal de agua MPCM, MWCNT con el método de optimización EGM. El caso #1 establece condiciones de diámetro, Reynolds, flujo de calor, longitud, temperaturas fijas, propiedades definidas y se calcula entropía generada. El caso #2 se diferencia del 1er caso, en que se establecen propiedades, Reynolds, flujo de calor, luego se optimiza el diámetro de ducto y después se calcula la generación de entropía. Adelante se presentan los casos.

#### **4.1. Modelado del Proceso**

##### **Caso 1: Flujo de calor, Diámetro y Reynolds constante**

El fluido recorre un ducto circular bajo régimen laminar y régimen turbulento con condiciones de flujo de calor constante. Para el agua pura el régimen laminar tiene un Reynolds de 1000 y en turbulento de 10000. Se utilizan 3 diferentes diámetros 1, 5, 10 mm y dos flujos de calor 1000, 10000 W/m<sup>2</sup> (el primar valor equivale a la radiación solar, y el otro equivale a la radiación solar concentrada 10 veces), se asume que todo el MPCM cambia de fase, la temperatura de entrada es ambiental (27°C), y la capacidad térmica del flujo es constante ( $\dot{m}C_p = const$ ).



**FIGURA. 4.2.** FLUJO DE CALOR CONSTANTE.  $D$ ,  $Q''$ , FIJOS

Las 2 siguiente metodologías se aplicaron:

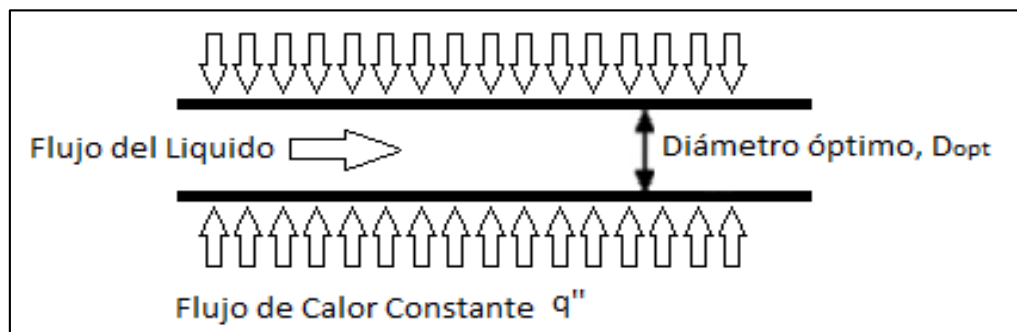
- Reemplazar en la expresión de entropía generada para cada conjunto de propiedades (de mezcla) y parámetros, y adquirir el mínimo entre todos los resultados. Esto se realiza usando un programa en MatLab® que grafique automáticamente para todo el dominio de propiedades.
- Aplicando una optimización analítica con el método KKT, cuyo procedimiento algebraico se encuentra descrito en el **Apéndice A**.

### **Caso 2: Diámetro Optimizado**

En este caso se calcula un diámetro óptimo que minimice la entropía generada estableciendo primero las propiedades y otros parámetros. Esto equivale a optimizar el diámetro de ducto y las concentraciones dados los siguientes parámetros: Flujo másico para el agua pura (10 g/s), flujos de calor de (1000 W/m<sup>2</sup>), temperatura de entrada 27°C, capacidad



térmica de flujo constante ( $\dot{m}C_p = const$ ), régimen laminar.



**FIGURA. 4.3.** MODELO DE FLUJO DE CALOR CONSTANTE, PROPIEDADES  $q''$ ,  $\dot{m}$  FIJOS

La siguiente metodología se utilizó:

- Se realiza una optimización con respecto al diámetro como función de la entropía generada (ecuación 4.5), El procedimiento algebraico se encuentra en el **Apéndice B**. Los resultados de la optimización se aplican para cada conjunto de propiedades y parámetros, se desarrolla un programa en MatLab que efectúa el procedimiento anterior, grafica la entropía y busca la menor.

## 4.2. Modelo de Generación de Entropía

El modelo de generación de entropía se aplica indistintamente para los casos #1 y #2. Este modelo utiliza ecuaciones desarrolladas por A. Bejan [58], Las cuales se aplican directamente al caso de estudio.

En el caso del *régimen laminar*, las siguientes correlaciones se utilizan para modelar el proceso de transferencia de calor:

$$Nu = \frac{hD}{K_{eff}} = 4.36 \quad (4.1)$$

$$f = 64/Re \quad (4.2)$$

Para *régimen turbulento*, se usa la ecuación de Dittus-Boelter para el número de Nusselt y la ecuación de Blasius para el factor de fricción.

$$Nu = \frac{hD}{K_{eff}} = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \quad (4.3)$$

$$f = 0.316Re^{-1/4} \quad 4000 < Re < 10^5 \quad (4.4)$$

La tasa de generación de entropía por unidad de longitud se puede calcular con la siguiente ecuación para flujo interno. A. Bejan (1996) ([59] Cap. 11, pp. 584-590).

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{q''^2 \pi D^2}{K T^2 Nu(Re, Pr)} + \frac{32 \dot{m}^3}{\pi^2 \rho^2 T D^5} f(Re) \quad (4.5)$$

El término que contiene el número de Nusselt corresponde a la generación de entropía por transferencia de calor que se debe al gradiente térmico entre la pared y la temperatura media del fluido, el término que contiene el número de Reynolds corresponde a la generación de entropía por fricción. Nótese que el diámetro es un parámetro importante en la generación de entropía por transferencia de calor y por fricción.

Es necesario asumir mezcla homogénea (sistema simple), flujo incompresible. La entropía por unidad de longitud, la velocidad y el flujo de calor son de una dimensión, no hay cambios en composición y la mezcla se comporta de forma newtoniana. T es la temperatura media de la superficie.

Para obtener el flujo másico del fluido de trabajo se equiparara la tasa de capacidad térmica del fluido de trabajo y del fluido base.

$$Cp_{eff}\dot{m}_{eff} = Cp_{bf}\dot{m}_{bf} \quad (4.6)$$

$$\dot{m}_{eff} < \dot{m}_{bf} \quad (4.7)$$

Al mismo tiempo el flujo másico del fluido base queda fijo al establecer un número de Reynolds inicial, 1000 para Laminar y 10000 para Turbulento.

$$Re = 4\dot{m}_{bf}/(\pi\mu_{bf}d) \quad (4.8)$$

Al remplazar el Nu y el Re (funciones del régimen) en la ecuación 4.5. Obtengo expresiones aplicables para cada régimen.

Para **flujo laminar**, la ecuación 5.10 se utiliza para calcular la entropía generada.

$$\dot{m}_{eff} = \frac{Cp_{bf}}{Cp_{eff}} \left( \frac{8Re_{lam}\pi D\mu_{bf}}{4} \right) \quad (4.9)$$

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{q''^2 \pi D^2}{4.36KT^2} + \frac{8Re_{lam}\pi}{T} \left( \frac{Cp_{bf}\mu_{bf}}{Cp_{eff}\rho D} \right)^2 \mu_{eff} \quad (4.10)$$

Para **flujo turbulento** se utiliza la ecuación 5.12.

$$\dot{m}_{eff} = \frac{Cp_{bf}}{Cp_{eff}} \left( \frac{Re_{turb}\pi D \mu_{bf}}{4} \right) \quad (4.11)$$

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{q''^2 \pi D^2 (Cp_{eff} \mu_{eff})^{0.4}}{36.45K^{0.6} T^2 (Cp_{bf} \mu_{bf})^{0.8}} + \frac{2.81 Re_{turb}}{\rho^2 D^2 T} \left( \frac{Cp_{bf}}{Cp_{eff}} \right)^{2.75} \mu_{bf}^{2.75} \mu_{eff}^{0.25} \quad (4.12)$$

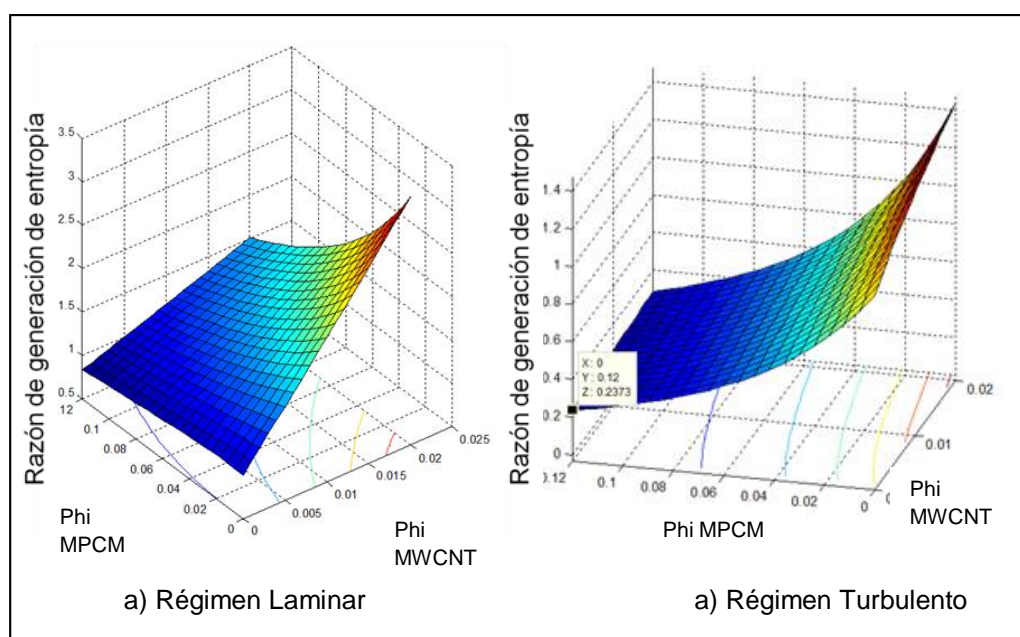
### 4.3. Resultados

Los resultados se muestran la razón ( $S_{gen \text{ fluido}}/S_{gen \text{ H}_2\text{O}}$ ) entre la generación de entropía del fluido base respecto a la del agua, en función de la concentración MPCM y MWNT en el fluido base. Las gráficas muestran condiciones de régimen laminar a la izquierda y condiciones turbulentas a la derecha.

#### Caso 1

La *figura 4.4a* muestra resultados de razón de generación de entropía en régimen laminar con flujo de calor de  $1000 \text{ W/m}^2$  y 1 mm de diámetro. Se muestran que la concentración máxima de MPCM es deseable debido a una tasa de flujo másico decreciente para transportar la misma cantidad de calor, esto reduce la entropía generada por fricción.

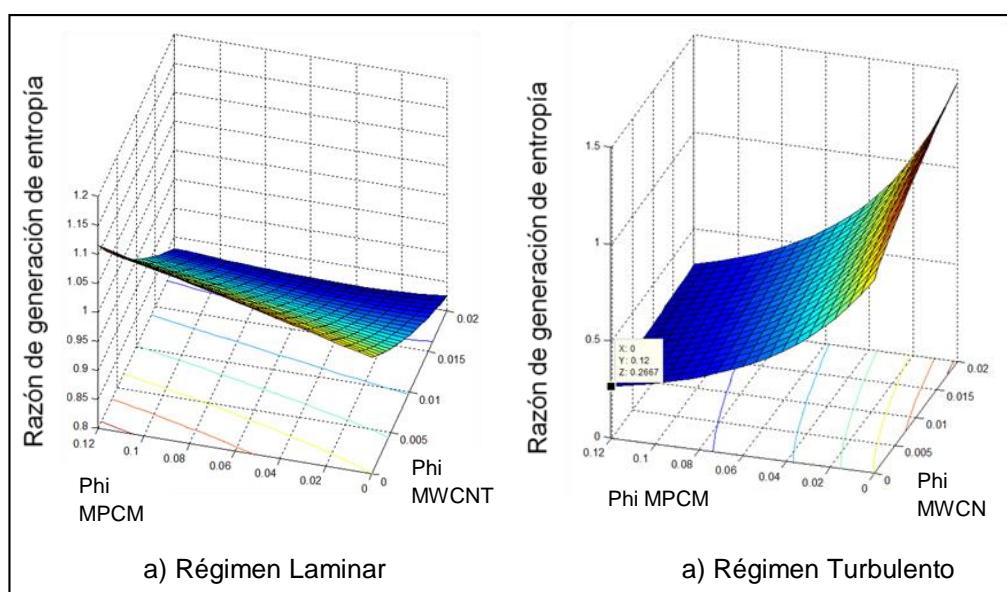
La *figura 4.4 b* presenta dichos resultados para flujo turbulento, en que un flujo másico reducido exhibe una reducción en la razón de generación de entropía aun mayor que en régimen laminar debido a la mayor relevancia de la fricción. Aumentar la conductividad con MWCNT no compensa la fricción adicional.



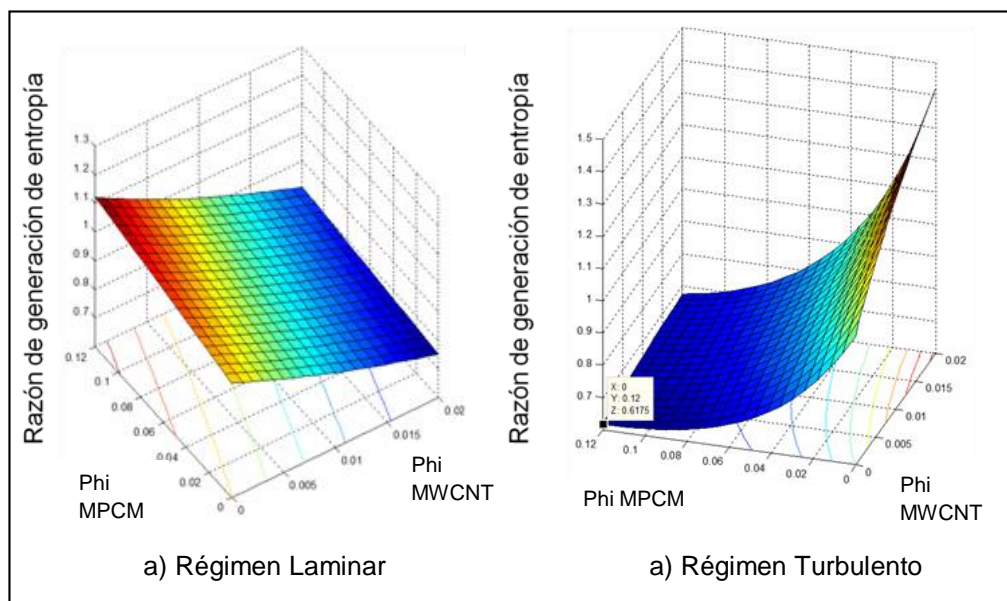
**FIGURA 4.4.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO  $1000 \text{ W/m}^2$ , DIÁMETRO 1MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA.

Para diámetros mayores (*Figura 4.5 y 4.6*) cambian las tendencias en el régimen laminar, el término de generación de entropía por transferencia calor parece volverse más significativo que el término de generación de entropía por fricción, en este caso incrementar la concentración de NP

para aumentar la conductividad térmica efectiva, disminuye la razón de generación de entropía. Esto implica que para diámetros grandes y régimen laminar usar NP disminuye la irreversibilidad. Para flujo turbulento las tendencias continúan invariables, sin embargo, para diámetros más grandes, el efecto de los MPCM es menos significativo.

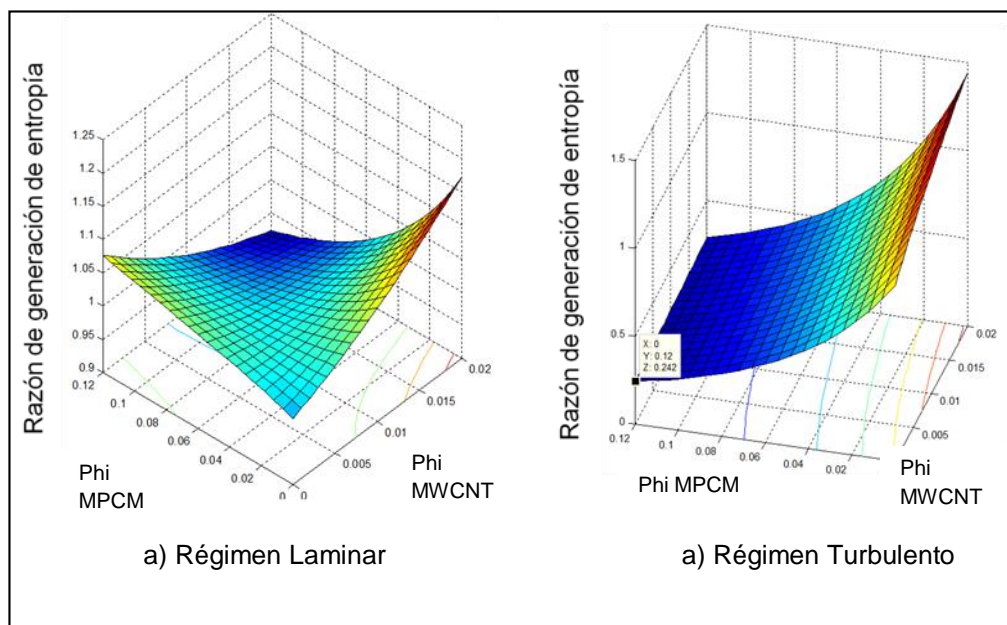


**FIGURA 4.5.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO  $1000 \text{ W/m}^2$ , DIÁMETRO 5MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA.



**FIGURA 4.6.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO  $1000 \text{ W/m}^2$ , DIÁMETRO 10MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA.

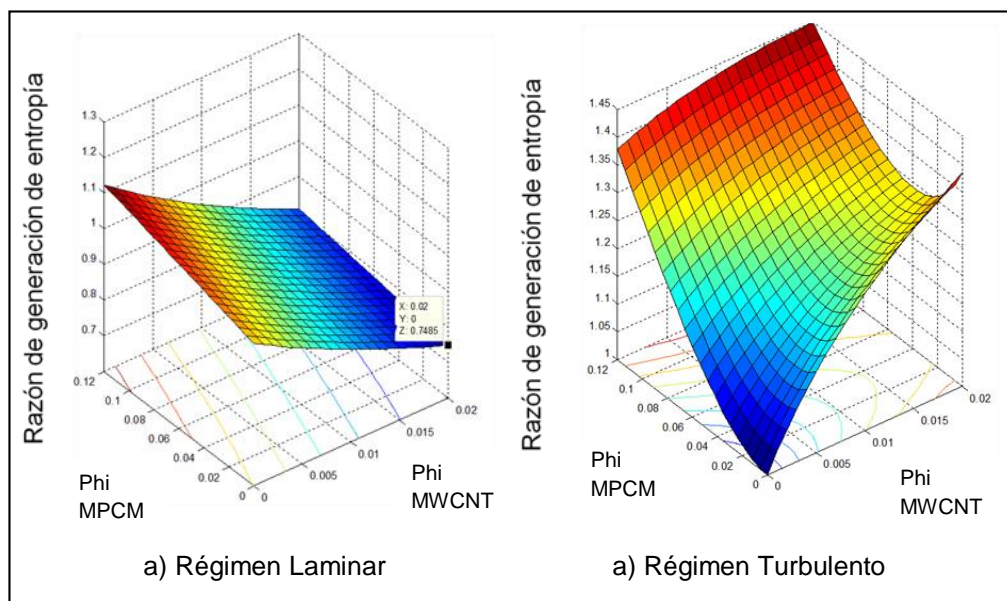
En el caso de flujos de calor de  $10000 \text{ W/m}^2$  y diámetros de 1 mm, el *figura 4.7*. En el régimen laminar parece que los términos de generación de entropía por transferencia de calor y fricción son comparables, en este modelo la acción combinada de MPCM y CNT cerca de 12% y 2%, respectivamente, reducen la razón de generación de entropía global (aunque poco), pero la aumentan cuando concentraciones individuales crecen. Para el caso de flujo turbulento no hay ningún cambio en las tendencias presentadas para flujos de calor de  $1000 \text{ W/m}^2$ .



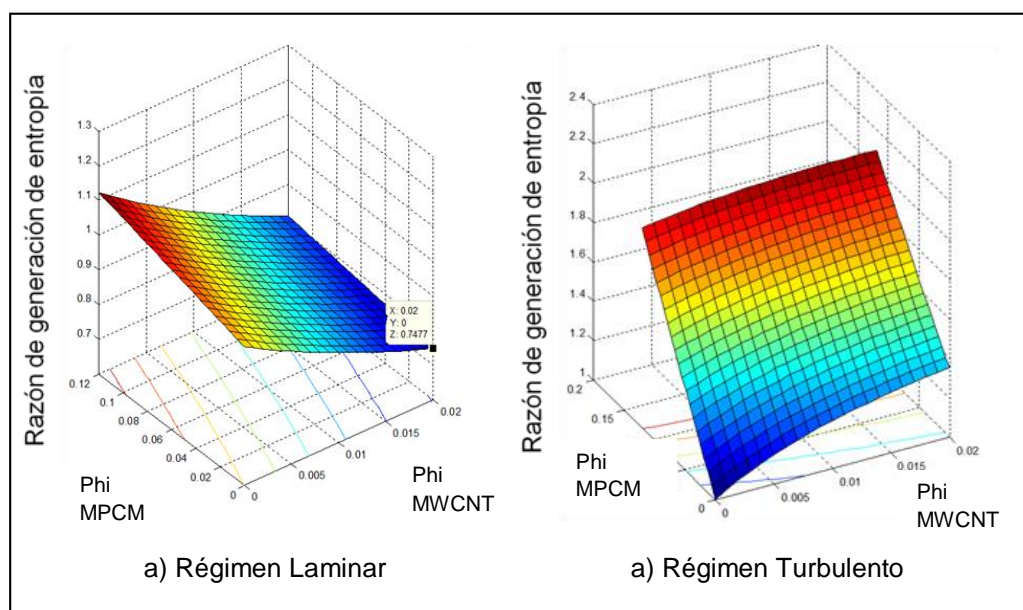
**FIGURA 4.7.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 10000  $W/m^2$ , DIÁMETRO 1MM, A) RÉGIMEN LAMINAR IZQUIERDA, B) RÉGIMEN TURBULENTO DERECHA.

Para mayores diámetros y altos flujos de calor (Figura 4.8 y 4.9) muestran que, independientemente de la composición de la mezcla, la razón de generación de entropía es siempre mayor que 1 en régimen turbulento. Para régimen laminar, incrementar la conductividad reduce la generación de entropía global, por lo que nuevamente la irreversibilidad por transferencia de calor es mayor que la de fricción, y los resultados son similares a los casos en régimen laminar:  $q'' = 1000 W/m^2$  y  $D = 5$  y  $10$  mm. (Fig. 4.5 y 4.6).





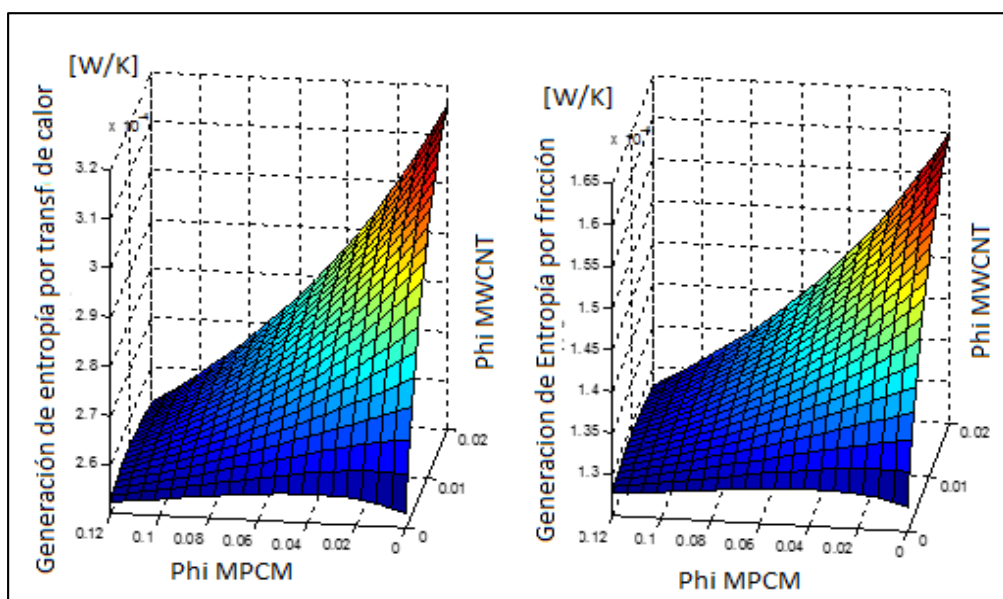
**FIGURA 4.8.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 10000  $W/m^2$ , DIÁMETRO 5MM, A) RÉGIMEN LAMINAR, B) TURBULENTO.



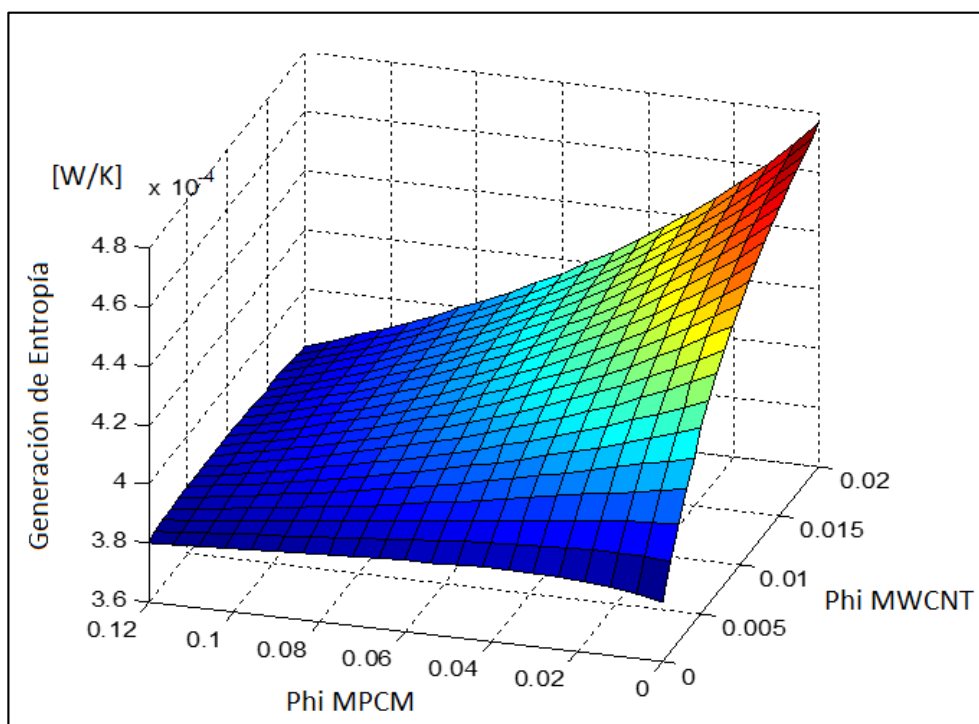
**FIGURA 4.9.** RAZÓN DE GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO 10000  $W/m^2$ , DIÁMETRO 10MM, A) RÉGIMEN LAMINAR B) TURBULENTO.

## Caso 2

Se recuerda las condiciones de este proceso, flujo de calor  $q''$  de  $1000 \text{ W/m}^2$  (Similar a la radiación solar), diámetro optimizado según las propiedades de la mezcla junto con parámetros de flujo y capacidad térmica de flujo constante, se establece un flujo másico de agua de  $10 \text{ g/s}$  y se lo adapta en la mezcla para satisfacer la condición de capacidad térmica constante. Cabe mencionar que estas condiciones generan unos diámetros óptimos en el orden de 4-8 milímetros.



**FIGURA 4.10.** GENERACIÓN DE ENTROPÍA, FLUJO DE: CALOR  $1000 \text{ W/m}^2$ , MÁSCO DE AGUA  $10 \text{ G/S}$ , A) ENTROPÍA GENERA POR FRICCIÓN IZQUIERDA, B) ENTROPÍA GENERADA POR TRANSFERENCIA DE CALOR



**FIGURA 4.11.** GENERACIÓN DE ENTROPÍA PARA CASO #2, DIÁMETRO OPT, RÉGIMEN LAMINAR, FLUJO DE CALOR  $1000 \text{ W/m}^2$ , FLUJO MÁSSICO AGUA  $10 \text{ G/S}$

Se observa que las gráficas de entropía generada por transferencia de calor y fricción *figura 4.10* tienen formas y tendencias similares, su suma la *figura 4.11* genera una gráfica con tendencias también similares. Se observa crecimiento en la generación entropía de fricción y de transferencia cuando se añaden MWCNT. No se observa crecimiento apreciable de generación de entropía al añadir MPCM. Existe un comportamiento mínimo cuando la mezcla es máxima en aditivos pasando de máxima generación cuando hay máxima cantidad de MWCNT a una mínima generación cuando hay máxima cantidad de

MWCNT y MPCM. Las concentraciones en las que hay mínima generación de entropía son: agua pura, máxima concentración de MPCM/MWCNT y máxima concentración de MPCM.

#### **4.4. Análisis de Resultados**

En el caso #1 se propone optimizar la mezcla de agua, MPCM y MWCNT, estableciendo parámetros fijos. Se grafica la razón de generación de entropía de la mezcla respecto al agua en función de los porcentajes de MPCM y MWCNT para observar el desempeño de la mezcla en respecto al agua pura.

En el caso #2 se optimiza el diámetro manteniendo fijas las propiedades del fluido y el resto de condiciones. Se obtiene resultados de generación de entropía que se grafican en función de los porcentajes de MPCM y MWCNT, los porcentajes de MPCM y MWCNT establecieron las propiedades iniciales de fluido base con los que se efectúa la optimización.

##### **Caso 1**

En flujo turbulento la transferencia de calor entre el fluido y su alrededor se debe principalmente a la advección y no a la conducción, menores viscosidades mejoran la advección por lo que el agua sola tiene ventaja,

pero incrementar la capacidad térmica reduce el flujo másico y con ello la fricción, el uso de MPCM tiene buenos resultados para reducir la entropía del proceso para flujos turbulentos si la entropía generada por fricción prevalece sobre la entropía por transferencia de calor.

En general los resultados muestran que para diámetros pequeños y bajos flujos de calor (para régimen laminar o turbulento) no se recomienda el uso de nano-partículas en su lugar se recomienda el uso de MPCM al haber aumento en la capacidad térmica, reducción del flujo másico y de la fricción. Para grandes diámetros y flujos de calor no se recomienda usar MPCM en su lugar se recomienda usar de NP especialmente para flujo laminar ya que es importante una mayor conductividad térmica a la falta de advección. En caso de un flujo turbulento, grandes diámetros y flujos de calor irreversibilidad de la mezcla será mayor que la del agua y no se recomienda ningún aditivo.

## **Caso 2**

La adición de cualquier aditivo incrementa la viscosidad de la mezcla, lo que disminuye la transferencia por advección e incrementa las fricciones internas, los MWCNT incrementan la conductividad pero parece ser poco relevante, la transferencia de calor parece que se debe principalmente a la advección, entonces colocar MWCNT incrementa la entropía generada tanto por transferencia de calor como por fricción.

En tanto colocar MPCM aunque incrementan la viscosidad, también disminuye el flujo másico al existir mayor calor específico para mantener constante la capacidad térmica de flujo, se mantiene constante las pérdidas por fricción, en cuanto a la transferencia de calor debería decrecer al haber menor conductividad y mayor de viscosidad pero existe una reducción del diámetro de ducto asociada al menor flujo másico y esto beneficia la transferencia de calor hacia el interior del ducto, el efecto global hace que se mantengan constantes la generación de entropía por transferencia de calor.

Finalmente existe una tendencia la cual se pasa de una máxima generación de entropía al haber mayor MWCNT a una generación similar al agua pura al añadirse una máxima cantidad de MPCM, los beneficios de reducción de flujo y aumento de conductividad combinados junto con la optimización del diámetro provocan esta sorprendente reducción de generación de entropía tal como se muestra en las figuras 4.10 y 4.11 para las máximas concentraciones de MPCM y MWCNT.

Se experimentó con diferentes flujos de calor y flujos másicos, y se obtuvieron tendencias iguales, que las gráficas mostradas en este caso de estudio, cambios en las tendencias fueron observadas **solo** al variar parámetros en las propiedades finales de la mezcla.

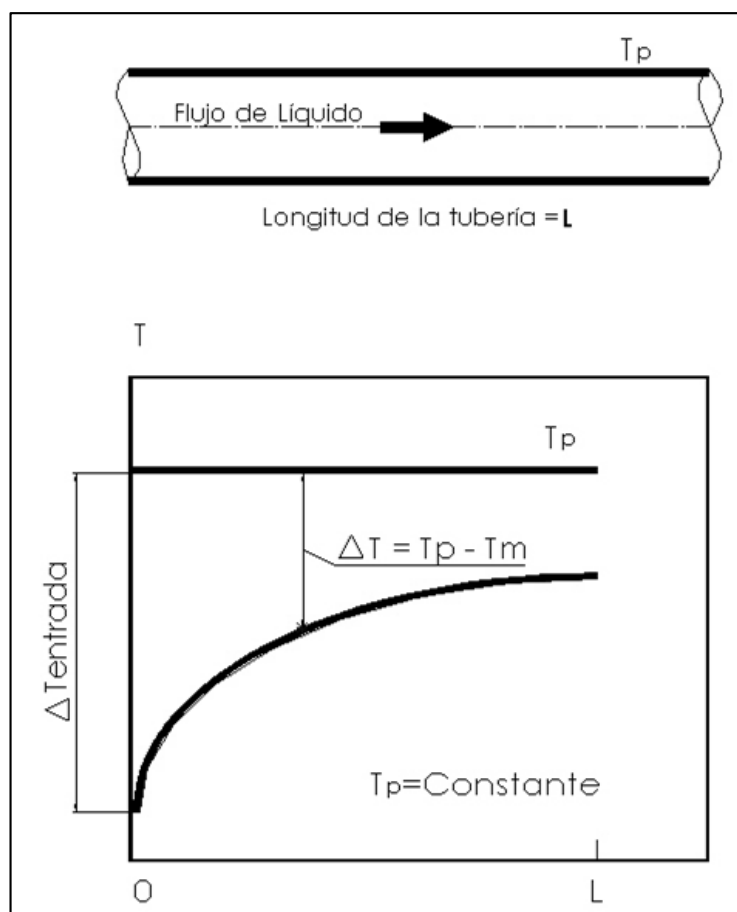
# CAPÍTULO 5

## 5. PROCESO CON TEMPERATURA DE PARED CONSTANTE

Cuando se analiza un flujo en una tubería y la temperatura superficial de este no varía, se dice que es un proceso de transferencia de calor con temperatura de pared constante. En la figura 5.1 se observa la variación de temperatura  $\Delta T$  entre la temperatura de la pared  $T_p$  y la temperatura media del fluido  $T_m$ .

Un proceso se aproxima a temperatura de pared constante si en el medio al cual está expuesta la superficie externa de un intercambiador de calor ocurre un cambio de fase (ebullición o condensación) [62], o si existe un reservorio infinito de temperatura constante.

Esta condición puede encontrarse en procesos típicos de la industria como condensadores de vapor a salida de las turbinas, en calderas pirotubulares y bombas de calor geotérmicas, entre otros.



**FIGURA 5.1.** VARIACIÓN DE TEMPERATURA EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD DE UN DUCTO PARA TEMPERATURA DE PARED CONSTANTE.

### 5.1. Modelado del Proceso

El problema de transferencia de calor analizado consiste de un flujo turbulento que está disipando calor a través de una tubería de pared lisa



de temperatura constante  $T_p = 28^\circ C$ , la temperatura inicial del fluido  $T_i = 38^\circ C$ , estas temperaturas fueron seleccionadas para considerar un 100% de cambio de fase del MPCM, eicosane (C<sub>20</sub>H<sub>40</sub>).

Se asume que la región de entrada está completamente desarrollada, que la mezcla es homogénea (sistema simple), flujo incompresible y que no existen cambios en la composición química. La carga térmica, la longitud y el diámetro se definen más adelante según el caso de estudio.

**Caso 1:** *Capacidad térmica y Variación de temperatura entre la entrada y salida de la tubería constantes.*

Con el objetivo de comparar el desempeño de las mezclas de nano-fluido basado en MWCNT y suspensiones de MPCM se considera la capacidad térmica del flujo constante. El flujo másico efectivo para la mezcla es calculado a partir de la Ecuación (5.1), en donde se muestra la capacidad térmica de la mezcla y la del fluido base igualadas.

$$C_{p,eff}\dot{m}_{eff} = C_{p,bf}\dot{m}_{bf} \quad (5.1)$$

Para cada carga térmica y variación de temperatura entre la entrada y salida de la tubería supuestos, el flujo másico del fluido base es calculado mediante la Ecuación (5.2).

$$\dot{Q} = \dot{m}_{bf} C p_{bf} \Delta T \quad (5.2)$$

La carga térmica (cantidad de calor a remover) se mantiene constante para la mezcla, como consecuencia de igualar las capacidades térmicas y fijar la variación de temperatura.

Las cargas térmicas consideradas son  $\dot{Q}_L = 35 \text{ KW}$ ,  $106 \text{ KW}$  y  $176 \text{ KW}$  las cuales representan valores típicos en aplicaciones de refrigeración en edificaciones de pequeña a mediana escala. Para cada carga térmica diferentes variaciones de temperatura son asumidas  $\Delta T = 4, 5$  y  $6^\circ\text{C}$ . El diámetro interior de la tubería supuesto es  $D = 50.8 \text{ mm}$ .

La longitud de la tubería se obtiene a través de la Ecuación (5.3) [62] y la potencia disipada o pérdidas por fricción a lo largo de la tubería puede ser calculada a partir de la Ecuación (5.4) [63].

$$\dot{Q} = \dot{m}_{eff} C p_{eff} (T_w - T_{in}) \left(1 - e^{-\frac{4 St L}{D}}\right) \quad (5.3)$$

$$P_f = \frac{8 m_{eff}^3 L \bar{f}}{\pi^2 \rho_{eff}^2 d^5} \quad (5.4)$$

**Caso 2:** *Potencia disipada y Longitud de tubería fijas.*

Para este caso se considera que la potencia disipada en la tubería se mantiene constante y además se fija la longitud de la tubería. Con estas

consideraciones se puede estudiar la posibilidad de emplear nuevos fluidos de trabajo en intercambiadores de calor existentes.

El flujo másico de la mezcla entre MWCNT, MPCM y agua es encontrado a partir de la Ecuación (5.4) en donde aparece implícito y por tanto se debe utilizar métodos numéricos.

Debido a que la temperatura a la salida de la tubería es inicialmente desconocida, un procedimiento iterativo es seguido para determinar el calor específico de la mezcla  $C_{p,eff} = f(T_f)$  Ecuación (2.2).

Se realiza el análisis para una longitud de tubería  $L=5\text{m}$ , diámetro interno  $D=25.4\text{ mm}$  y una potencia disipada  $P_f = 100\text{W}$ .

## 5.2. Modelo de Generación de Entropía

Para calcular la tasa de generación de entropía empleamos la Ecuación (5.5) la cual fue desarrollada por Şahin [64].

$$\dot{S}_{gen} = \dot{m}C_p \left\{ \ln \left[ \frac{1-\tau e^{-4St\lambda}}{1-\tau} \right] - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) + \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left[ \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1-\tau} \right] \right\} \quad (5.5)$$

Los dos primeros términos del lado derecho de la Ecuación (5.5) corresponden a la entropía generada por transferencia de calor y el

último término corresponde a la entropía generada por fricción.

La longitud adimensional  $\lambda = L/D$  y la diferencia de temperatura adimensional  $\tau = (T_i - T_p)/T_p$  son valores que permiten reducir la Ecuación (5.5) con el fin de facilitar su análisis. Para el caso 1 y 2 son constantes.

La generación de entropía global adimensional  $\psi$  Ecuación (5.6) A. Z. Şahin [64] es un indicador que muestra la relación entre la tasa de generación de entropía y la carga térmica disipada por una determinada mezcla.

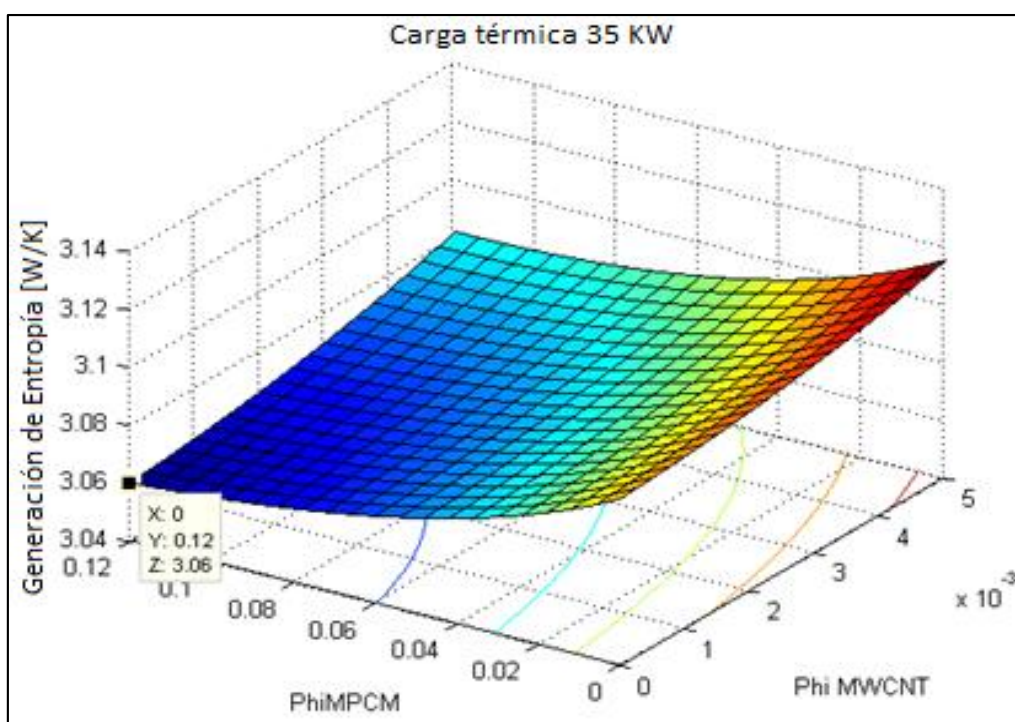
$$\psi = \frac{\dot{S}_{gen}}{\dot{Q}/(T_p - T_i)} \quad (5.6)$$

El indicador  $\psi$  permite analizar casos en los cuales se presenta un incremento en la generación de entropía asociado a una mayor disipación de calor, esto como consecuencia de una mejora en las propiedades termo físicas del fluido de trabajo.

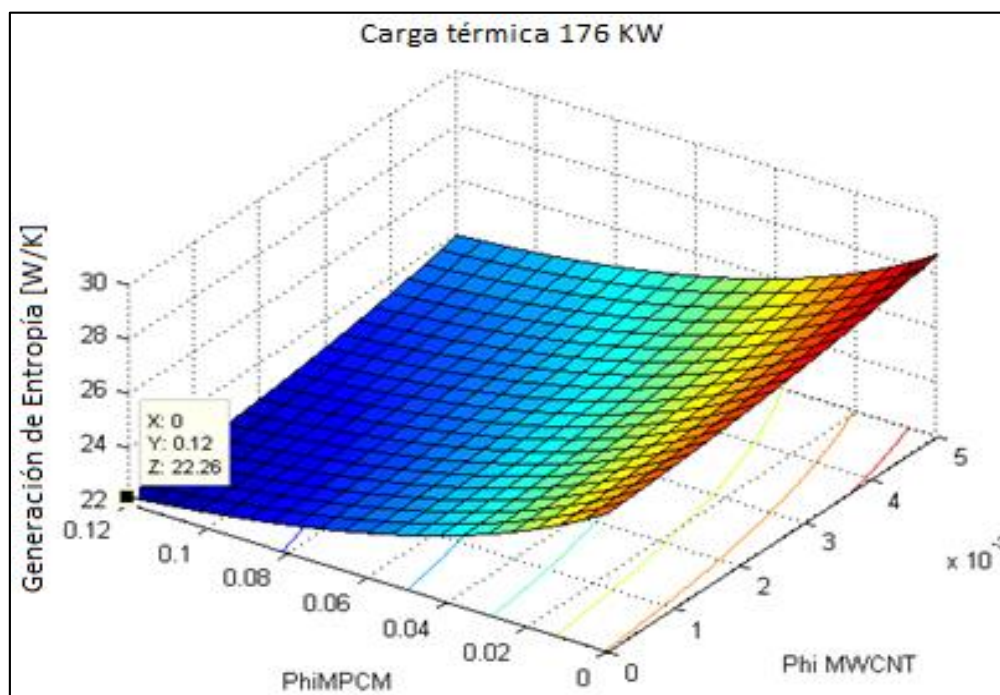
### 5.3. Resultados

**Caso 1:** *Capacidad térmica y Variación de temperatura entre la entrada y salida de la tubería constantes.*

Las Figuras 5.2 y 5.3 muestran los resultados de la tasa de generación de entropía con cargas de refrigeración of 35 KW and 176 KW respectivamente ambas con una variación de temperatura de 5°C. Los resultados indican que la generación de entropía es reducida con la adición de MPCM. En los casos estudiados el uso de MWCNT incrementan la generación de entropía.

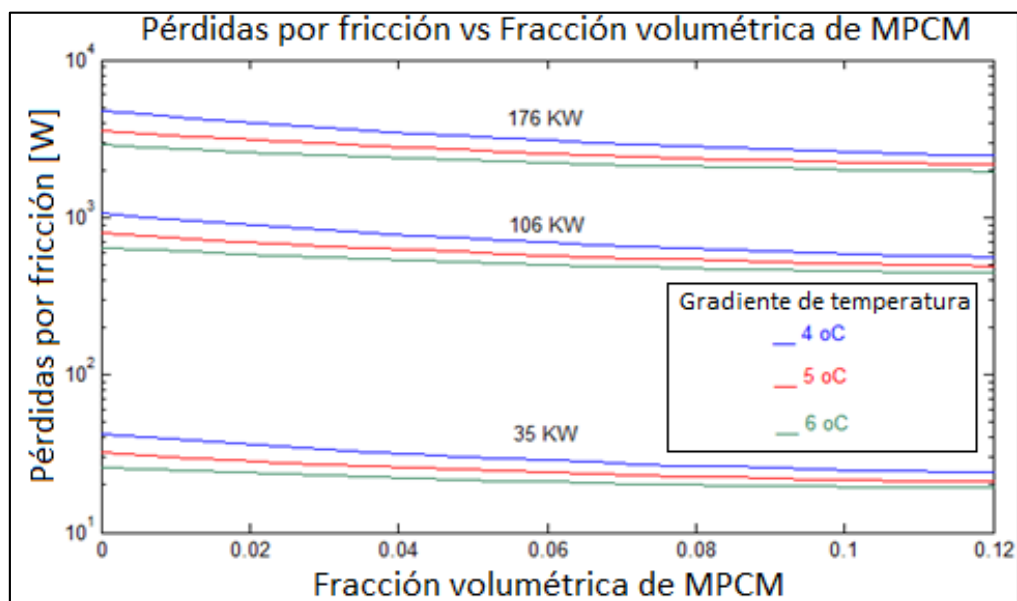


**FIGURA 5.2.** ENTROPÍA GENERADA, CARGA DE REFRIGERACIÓN 35 KW, DIÁMETRO INTERIOR DE TUBERÍA 50.8MM, VARIACIÓN DE TEMPERATURA ENTRE LA ENTRADA Y SALIDA 5 °C.

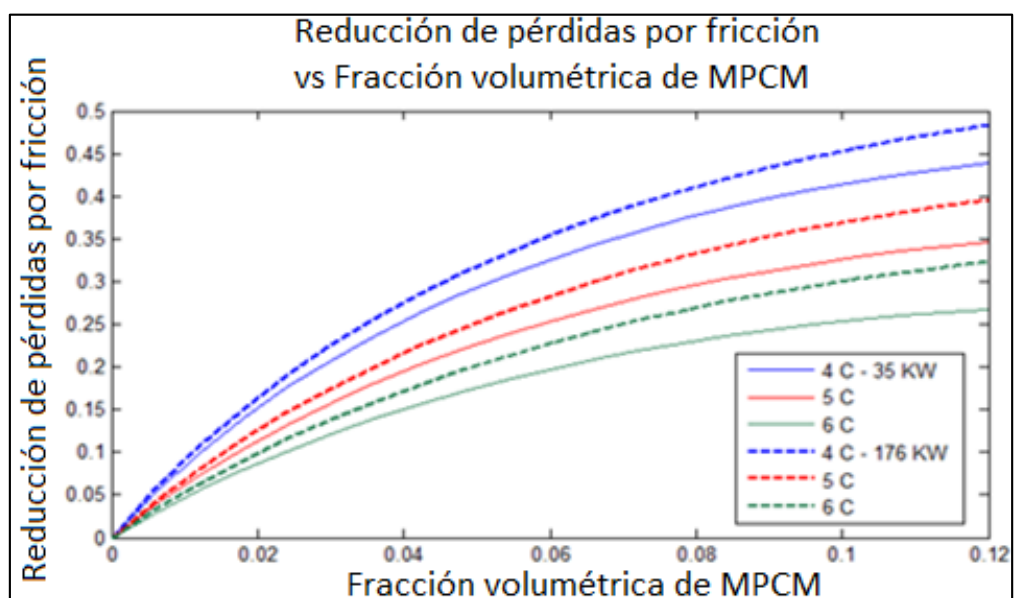


**FIGURA 5.3.** ENTROPÍA GENERADA, CARGA DE REFRIGERACIÓN 176 KW, DIÁMETRO INTERIOR DE TUBERÍA 50.8MM, VARIACIÓN DE TEMPERATURA DE ENTRADA Y SALIDA 5 °C.

La figura 5.4 muestra la tendencia de las pérdidas por fricción para diferentes cargas de refrigeración en función de la fracción volumétrica de MPCM. La figura 5.5 muestra la fracción en la cual se reducen las pérdidas por fricción para 35KW y 176 KW.



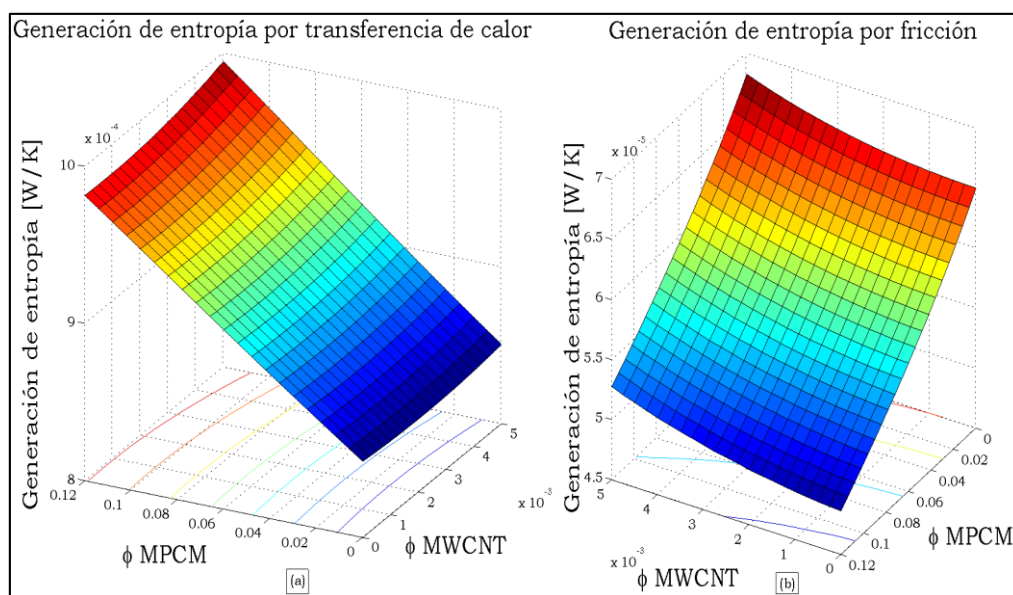
**FIGURA 5.4.** PERDIDAS POR FRICCIÓN PARA LECHADAS DE MPCM, DIFERENTES CARGAS DE REFRIGERACIÓN Y VARIACIONES DE TEMPERATURA, DIÁMETRO INTERIOR 50.8MM.



**FIGURA 5.5.** FRACCIÓN DE PÉRDIDAS POR FRICCIÓN, CARGAS DE REFRIGERACIÓN DE 35 KW Y 176 KW, DIFERENTES VARIACIONES DE TEMPERATURA, DIÁMETRO INTERIOR DE TUBERÍA 50.8MM.

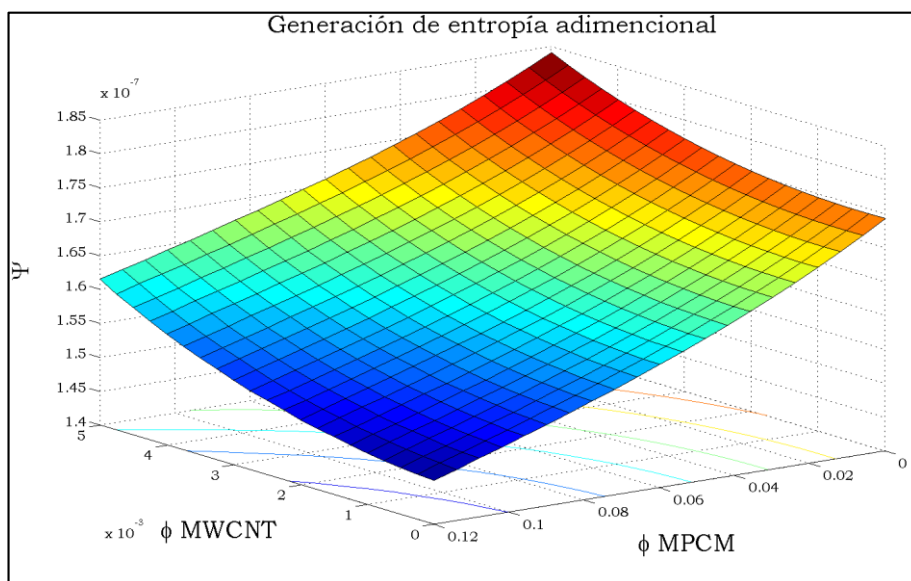
**Caso 2:** *Potencia disipada y Longitud de tubería fijas.*

La generación de entropía debido a la transferencia de calor y a la fricción en función de las concentraciones de MWCNT y MPCM se muestra en la figura 5.6 (a) y (b) respectivamente. La generación de entropía por transferencia de calor presenta una ligera reducción para los nanofluidos. La generación de entropía por fricción disminuye al agregar suspensiones de MPCM. La generación de entropía adimensional se observa en la figura 5.7, esta se reduce a medida que se incremente la concentración de MPCM en mezcla.



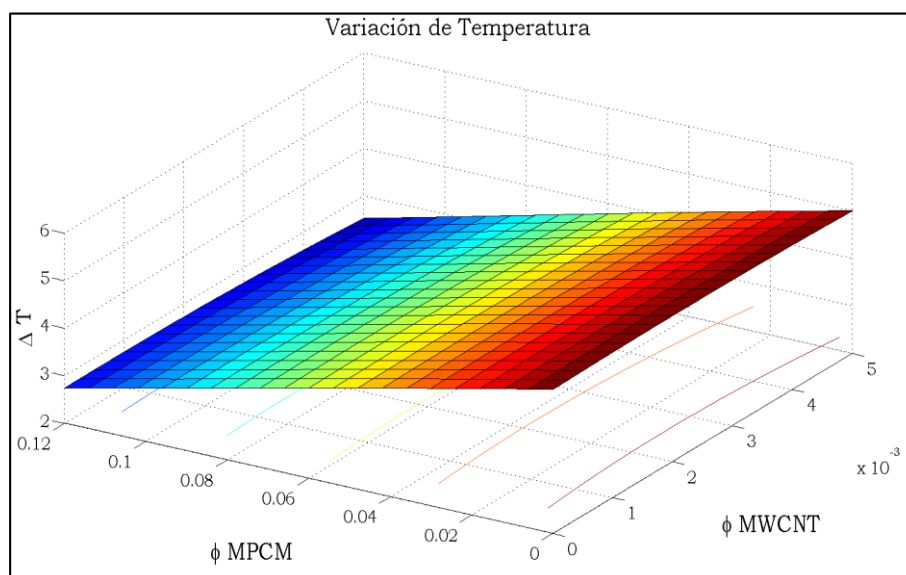
**FIGURA 5.6.** (A) GENERACIÓN DE ENTROPÍA POR TRANSFERENCIA DE CALOR (B) GENERACIÓN DE ENTROPÍA POR FRICCIÓN.





**FIGURA 5.7.** GENERACIÓN DE ENTROPÍA ADIMENSIONAL.

La variación de temperatura entre la entrada y salida de la tubería figura 5.8 disminuye a medida que aumenta la concentración de MPCM en la mezcla y presenta un pequeño aumento para el caso de los nanofluidos.



**FIGURA 5.8.** VARIACIÓN DE TEMPERATURA ENTRE LA ENTRA Y SALIDA DE LA TUBERÍA.

#### 5.4. Análisis de Resultados

**Caso 1:** *Capacidad térmica y Variación de temperatura entre la entrada y salida de la tubería constantes.*

El análisis de la Ecuación (5.5) muestra que la generación de entropía debido a la transferencia de calor se mantiene constante (Primer y segundo término). Al incrementar la fracción volumétrica de MPCM y nano partículas en la mezcla causa que la longitud adimensional  $\lambda$  incremente ya que la advección en el fluido disminuye (bajos números de Reynolds y viscosidad alta), además el número de Stanton disminuye en la misma proporción en que  $\lambda$  aumenta. La cantidad  $St\lambda$  permanece constante. El incremento de generación entropía que se muestra en las figuras 5.2 y 5.3 se debe a la generación de entropía debido a la fricción.

Usar nano fluidos basados en MWCNT no es recomendado para las condiciones analizadas, como puede ser observado en las figuras 5.2 y 5.3. Por otra parte el uso de MPCM disminuye la generación de entropía.

Para gradientes de temperatura grandes, el incremento de la viscosidad supera cualquier beneficio en el incremento en la capacidad térmica, como se observa en la figura 5.4. Una consecuencia de esto es el

incremento en la longitud de la tubería para disipar la misma carga térmica.

**Caso 2:** *Potencia disipada y Longitud de tubería fijas.*

La generación de entropía debido a la transferencia de calor aumenta cuando existe un incremento en la capacidad térmica del fluido, esto sucede cuando se incrementa la concentración de MPCM en la mezcla, figura 5.6 (a).

Para el nano fluido se tiene que la generación de entropía debido a la transferencia de calor disminuye ligeramente hasta una concentración aproximada de 0.02% de MWCNT para luego aumentar figura 5.6 (a), este aumento se debe a una reducción del  $St$  a partir de la misma concentración de MWCNT. Este comportamiento observado se asocia a que para concentraciones mayores de 0.02% de MWCNT la viscosidad crece tanto que supera los beneficios de incrementar la conductividad térmica del fluido base y por tanto disminuye la convección en el proceso de transferencia de calor.

La consecuencia de añadir MPCM y MWCNT a un fluido base es que la viscosidad de la mezcla aumenta. Si se mantienen constantes la

potencia disipada y la longitud de tubería es inevitable que el flujo másico a través de la tubería disminuya.

En general el comportamiento de la generación de entropía por fricción figura 5.6 (b), depende de la reducción del flujo másico en comparación con la reducción en el número de Stanton. Para las suspensiones de MPCM la reducción en el flujo másico es mayor que la reducción en  $St$  por tanto se tiene que la generación de entropía por fricción disminuye. Para el nanofluido la reducción en el flujo másico es menor a la reducción en el  $St$  y por ende aumenta.

El comportamiento de la generación de entropía adimensional figura 5.7, se debe a que al aumentar la concentración volumétrica de MPCM en la mezcla aumenta la carga térmica disipada.

La variación de temperatura entre la entrada y salida de la tubería figura 5.8 en general disminuye al agregar MPCM y MWCNT esto hace lógica a la reducción del número de Reynolds por un incremento en la viscosidad y una reducción en el flujo másico.

# CAPÍTULO 6

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### Conclusiones

Se estudian casos de transferencia de calor por flujo de calor constante y temperatura de pared constante utilizando la herramienta de optimización de minimización de generación entropía (EGM). Esto con el objetivo de encontrar una mezcla óptima de MWCNT y MPCM en agua con el mayor desempeño, que equivale a la mezcla que menos entropía genere durante un proceso con condiciones preestablecidas.

En el primer caso de transferencia de calor a flujo de calor constante se obtienen mezclas óptimas bajo ciertas condiciones y parámetros de flujo. En régimen laminar el rendimiento mejora al agregar MWCNT, que

incrementan la conductividad térmica y mejoran la transferencia de calor hacia el interior del ducto que se debe a la conducción, en este régimen la fricción es pequeña y el aumento en la viscosidades es poco relevante. En régimen turbulento el agregar MPCM reduce el flujo másico para transportar igual cantidad de calor por ende reduce la fricción, para ductos de pequeños diámetro (<5mm) la fricción es elevada y por ende efectivo los MPCM. Bajo ciertas condiciones específicas donde la irreversibilidad por transferencia y por fricción son igual de importantes (En este caso  $Re=1000$ ,  $D=1mm$ ,  $q''=1000W/m^2$ ), la acción combinada de MPCM y MWCNT es efectiva. Para flujos turbulentos y diámetros mayores a 10mm el agua pura es más efectiva dada sus características de baja viscosidad que resultan alta transferencia de calor por advección y menor fricción.

Se resalta la importancia del diámetro, y el régimen de flujo en la tendencia de la irreversibilidad del proceso. El diámetro de ducto dicta cual irreversibilidad prevalece sobre la otra (diámetros pequeño prevalece la irreversibilidad por fricción, grandes diámetros la irreversibilidad por transferencia de calor), el régimen de flujo dicta el principal mecanismo de transferencia de calor por conducción o advección (laminar o turbulento) y por ende la importancia de relativa de una alta conductividad y una baja viscosidad.

Para el segundo caso de transferencia a flujo de calor constante. Se

optimiza el diámetro para cada conjunto de parámetros y propiedades y luego se calcula la generación de entropía, Se obtuvo una generación de entropía similar entre: agua pura, MPCM y Agua. La adición de MWCNT era perjudicial, la mejora en conductividad no compensa las irreversibilidades asociadas a una mayor viscosidad.

Para el primer caso de temperatura de pared constante, se fijaron la capacidad térmica y variación de temperatura entre la entrada y la salida de la tubería, la conductividad del fluido es mejorada con la adición de nanofluidos, pero esta mejora es despreciable debido a que la viscosidad se incrementa de tal forma que reduce la advección, con el aumento en la viscosidad de los nanofluidos también la generación de entropía por fricción aumenta. El efecto global es un incremento en la generación de entropía.

El incremento del calor específico debido a los MPCM resulta en una reducción del flujo másico, una consecuencia de ello es la reducción de las pérdidas por fricción.

Las pérdidas por fricción también son afectadas por las condiciones de operación como carga térmica y variación de temperatura entre la entrada y salida de la tubería, la reducción en las pérdidas por fricción es mayor cuando se consideran pequeñas cargas térmicas y variaciones de

temperatura entre la entrada y salida de la tubería para una misma concentración de MPCM.

Otra forma de analizar estos fluidos de transferencia de calor es fijando la disipación de potencia en la tubería y su longitud para simular el desempeño de estos nuevos fluidos de trabajo en intercambiadores de calor existentes.

Para la generación de entropía por transferencia de calor en el primer caso se tiene que es constante y para el segundo caso se tiene que es variable, esto es una consecuencia de las diferentes formas en que se analizaron estos fluidos de transferencia de calor.

La generación de entropía adimensional disminuye cuando se agregan MPCM al fluido base, esto se debe a que pese a aumentar la generación de entropía por transferencia de calor, la disipación de calor a lo largo de la tubería aumenta en una mayor proporción como consecuencia de un incremento en la capacidad térmica de las suspensiones de MPCM.

La herramienta de optimización termodinámica EGM demuestra ser útil como un primer nivel de estudio para la selección de fluidos de transferencia de calor, con esta se obtuvo proporciones óptimas en función de las condiciones de los procesos de transferencia de calor.



## Recomendaciones

Para la programación y para los procedimientos analíticos se prefirió el uso de modelos lineales para obtener propiedades finales de la mezcla, además se asumen que esta tiene comportamiento newtoniano. Si se utilizasen modelos de propiedades más exactos a través de la experimentación y se considerasen las no linealidades; en especial de la viscosidad, se pudieran obtener resultados más precisos con tendencias que se desvían de los resultados expuestos en este trabajo. Como se mencionó en la revisión literaria se encontró solo un trabajo experimental donde se estudian estas mezclas, G.H. Zhang y C.Y. Zhao (2013).

Los modelos de densidad son precisos y fáciles de modelar en las mezclas de MPCM y MWCNT, ya que no existen fenómenos de disolución de componentes que invalide la teoría de mezclas simples.

La conductividad térmica se puede modelar a base resultados experimentales, o con fórmulas que consideraran muchos parámetros. A pesar de estos esfuerzos hay todavía mucha desviación en los ensayos experimentales que modelan la conductividad térmica de los nano-fluidos y por ello aun es un tema de estudio.

La viscosidad es una propiedad difícil de modelar dado el comportamiento no newtoniano de los nano-fluidos, y por muchos factores que influyen en su valor. Para las micro capsulas modelos experimentales y teóricos se han desarrollado y son precisos.

La capacidad térmica de suspensiones de MPCM se modelan como un balance de energía latente y sensible del PCM a través del gradiente de temperatura de entrada y salida del fluido por el intercambiador de calor, pero un modelo real consideraría el cambio de fase durante el proceso a través del gradiente térmico donde está ocurriendo el porcentaje de cambio de fase del PCM.

Fenómenos en el cambio de fase los MPCM fueron omitidos en la programación por motivos de sencillez, pero podrían ser considerados en una programación más laboriosa y extendida. Por ejemplo el porcentaje de cambio de fase de los MPCM es función de un rango de temperaturas a la que está sometida la mezcla.

## **Trabajos futuros**

Es necesaria más investigación experimental de propiedades termo-físicas para entender el comportamiento de estos fluidos y verificar los modelos matemáticos. Esto implica una mayor precisión en modelos de transferencia de calor, presión y generación de entropía.

La simulación de generación de entropía en programas de elementos finitos puede ser un área de investigación nueva y de gran impacto, proporcionando análisis de generación de entropía para geometrías complicadas como en los intercambiadores de calor tubulares.

La simulación de nuevos fluidos de transferencia de calor a base de aditivos en micro y nano escala tales como MPCM y MWCNT en programas de elementos finitos como CFD es un área que debe explorarse, se podrían para comprobar resultados experimentales y posteriormente emular estos aditivos.

El uso del CFD puede extenderse a evaluar el desempeño de estos fluido junto con propagadores de turbulencia en el interior de ductos (con ductos de diferente sección transversal). Y para flujo externo también se puede estudiar la transferencia de calor con aletas de diferente geometría.

# **APÉNDICES**

## APÉNDICE A

### PROCEDIMIENTO ALGEBRÁICO DE MINIMIZACIÓN DE LA GENERACIÓN DE ENTROPÍA DETERMINANDO PORCENTAJES ÓPTIMOS DE MWCNT Y MPCM EN AGUA PARA UN PROCESO CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE.

Este apéndice detalla el desarrollo matemático para determinar la solución,  $(\varphi_a^*, \varphi_b^*)$  (óptimo primario), de un problema de optimización basado en la minimización de la generación de entropía,  $\dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)$  (función objetivo), para un proceso de transferencia de calor con flujo de calor superficial constante, donde  $(\varphi_a, \varphi_b)$  es el vector variable a optimizar,  $\varphi_a$  es la proporción de MWCNT y  $\varphi_b$  es la proporción de MPCM en agua. Revisar teoría vista en el Capítulo 3, 3.3. Herramientas de Optimización.

#### Enunciado del problema de optimización

*min*

$$\dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b) = \frac{q'^2 \pi D^2}{4.36 k_{eff} T^2} + \frac{(8 * 10^6) \pi}{T} \left( \frac{C_{p,bf} \mu_{bf}}{C_{p,eff} \rho_{eff} D} \right)^2 \mu_{eff} \quad (f_0(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$s. t.: \quad -\varphi_a \leq 0 \quad (f_1(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_a - 0.02 \leq 0 \quad (f_2(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$-\varphi_b \leq 0 \quad (f_3(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_b - 0.12 \leq 0 \quad (f_4(\varphi_a, \varphi_b))$$

EL problema pide encontrar el valor óptimo primario  $(\varphi_a^*, \varphi_b^*)$  que minimice la función objetivo  $f_0$ , de todos los vectores  $(\varphi_a, \varphi_b)$  que satisfacen las funciones de restricciones de desigualdad  $f_1, \dots, f_4$ .

Se tiene un problema de optimización con restricciones de desigualdad, por lo tanto son necesarias las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para encontrar los puntos críticos de la función y luego estos se evaluarán en el determinante de la Matriz Hessiana para determinar cuál de ellos es el mínimo global, es decir la solución  $(\varphi_a^*, \varphi_b^*)$ .

### Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

#### 1. Factibilidad Primaria

$$-\varphi_a \leq 0 \quad (f_1(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_a - 0.02 \leq 0 \quad (f_2(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$-\varphi_b \leq 0 \quad (f_3(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_b - 0.12 \leq 0 \quad (f_4(\varphi_a, \varphi_b))$$

#### 2. Factibilidad dual

$$\lambda_k \geq 0 \quad , \quad (k = 1, \dots, 4)$$

#### 3. Ecuaciones de holgura complementarias

$$\lambda_1 \varphi_a = 0 \quad (A.1)$$

$$\lambda_2(\varphi_a - 0.02) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda_3\varphi_b = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\lambda_4(\varphi_b - 0.12) = 0 \quad (\text{A.4})$$

#### 4. Lagrangian Estacionario

$$\frac{\partial \hat{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} + \sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{\partial f_k(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} = 0 \quad , \quad (i = a, b) \quad (\text{A.5})$$

Las condiciones de KKT se encargan de introducir las funciones de restricciones de desigualdad  $f_1, \dots, f_4$  en el problema de minimizar la función objetivo  $f_0$  a través de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ , respectivamente. Las condiciones KKT nos dan un sistema de seis ecuaciones con seis variables: cuatro ecuaciones de holgura complementaria (A.1 - A.4), dos ecuaciones del Lagrangian Estacionario (A.5) y las variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_4, \varphi_a$  y  $\varphi_b$ .

Al resolver el sistema de ecuaciones que nos dan las condiciones de KKT obtendremos los puntos críticos, los cuales son los máximos y mínimos locales y globales. Por lo tanto es necesario analizar si estos puntos se encuentran en una región convexa o cóncava, y concluir si son mínimos o máximos, respectivamente. Para este fin se necesita obtener la matriz Hessiana.

## Matriz Hessiana

La Matriz Hessiana es la matriz cuadrada de segundas derivadas de una función. Si el determinante de la matriz Hessiana evaluado en un punto es positivo se dice que el punto se encuentra en una región convexa (mínimo local), caso contrario si es negativo en una región cóncava (máximo local) y si es cero se dice que el punto es de inflexión.

La Matriz Hessiana de la función objetivo  $f_0$  es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_a^2} & \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \\ \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_b \partial \varphi_a} & \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_b^2} \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

## Primeras Derivadas de la función objetivo

Se debe obtener las primeras derivadas de la función objetivo  $\partial f_0 / \partial \varphi_a$  y  $\partial f_0 / \partial \varphi_b$  para remplazar en el Lagrangian Estacionario del sistema de ecuaciones de las condiciones de KKT (A.5).

Resolviendo las primeras derivadas, se tiene:

$$\frac{\partial \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left( \frac{C_1}{k_{eff}} + C_2 \frac{1}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^2 \mu_{eff}} \right), \quad (i = a, b)$$

Donde  $C_1 = \frac{q''^2 \pi D^2}{4.36 T^2}$  y  $C_2 = \frac{(8 \cdot 10^6) \pi}{T} \left( C_{p,bf} \frac{\mu_{bf}}{D} \right)^2$  son constantes.

Entonces,



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} \\
&= -\frac{C_1}{k_{eff}^2} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_i} \\
&+ C_2 \left( \frac{1}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^2} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_i} - 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \right), \quad (i = a, b)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

### Segundas Derivadas de la función objetivo

También se debe obtener las segundas derivadas de la función objetivo  $\partial^2 f_0 / \partial \varphi_a^2$ ,  $\partial^2 f_0 / \partial \varphi_b^2$  y  $\partial^2 f_0 / \partial \varphi_a \partial \varphi_b$  para remplazar en la matriz Hessiana (A.6).

Resolviendo se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i^2} \\
&= C_1 \left( -\frac{1}{k_{eff}^2} \frac{\partial^2 k_{eff}}{\partial \varphi_i^2} + \frac{2}{k_{eff}^3} \left( \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_i} \right)^2 \right) \\
&+ C_2 \left[ \frac{1}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^2} \frac{\partial^2 \mu_{eff}}{\partial \varphi_i^2} \right. \\
&- \left( 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \frac{\partial^2 C_{p,eff}}{\partial \varphi_i^2} \right. \\
&- 6 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^4} \left( \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} \right)^2 \Big) \tag{A.8} \\
&- \left( 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} \frac{\partial^2 \rho_{eff}}{\partial \varphi_i^2} - 6 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^4} \left( \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \right)^2 \right) \\
&- 4 \frac{1}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} \\
&- 4 \frac{1}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^3} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \\
&\left. + 8 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^3} \frac{1}{\rho_{eff}^3} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \right], \quad (i = a, b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \\
&= C_1 \left( -\frac{1}{k_{eff}^2} \frac{\partial^2 k_{eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} + \frac{2}{k_{eff}^3} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_b} \right) \\
&+ C_2 \left[ \frac{1}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^2} \frac{\partial^2 \mu_{eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right. \\
&- \left( 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \frac{\partial^2 C_{p,eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right. \\
&- 6 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^4} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} \left. \right) \\
&- \left( 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^3} \frac{\partial^2 \rho_{eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right. \\
&- 6 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^4} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \left. \right) \\
&- 2 \frac{1}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \left( \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} \right) \\
&- 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^3} \left( \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \right) \\
&\left. + 4 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^3 \rho_{eff}^3} \left( \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} \right) \right] \tag{A.9}
\end{aligned}$$

### Primeras y segundas de derivadas de las propiedades termo-físicas

Tanto en las primeras y segundas derivadas de la función objetivo son funciones de las primeras y segundas derivadas de las funciones termo-físicas, entonces derivando estas se tiene:

- **Conductividad térmica efectiva**

$$k_{eff} = (1 - \varphi_a - \varphi_b)k_{bf} + \varphi_a C_{ka} + \varphi_b C_{kb} \quad (A.10)$$

Primera derivada

$$\frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_i} = C_{ki} - k_{bf}, \quad (i = a, b) \quad (A.11)$$

Segunda derivada

$$\frac{\partial^2 k_{eff}}{\partial \varphi_i^2} = \frac{\partial^2 k_{eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = 0, \quad (i = a, b) \quad (A.12)$$

- **Viscosidad dinámica efectiva**

$$\mu_{eff} = \mu_{bf}(1 + C_{\mu_a} \varphi_a + C_{\mu_b} \varphi_b) \quad (A.13)$$

Primera derivada

$$\frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_i} = \mu_{bf} C_{\mu_i}, \quad (i = a, b) \quad (A.14)$$

Segunda Derivada

$$\frac{\partial^2 \mu_{eff}}{\partial \varphi_i^2} = \frac{\partial^2 \mu_{eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = 0, \quad (i = a, b) \quad (A.15)$$

- **Densidad efectiva**

$$\rho_{eff} = \rho_a \varphi_a + \rho_b \varphi_b + \rho_{bf}(1 - \varphi_a - \varphi_b) \quad (A.16)$$

Primera derivada

$$\frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} = \rho_i - \rho_{bf}, \quad (i = a, b) \quad (A.17)$$

Segunda derivada

$$\frac{\partial^2 \rho_{eff}}{\partial \varphi_i^2} = \frac{\partial^2 \rho_{eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = 0, \quad (i = a, b) \quad (\text{A.18})$$

- **Calor específico efectivo**

$$C_{p,eff} = \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf} (1 - \varphi_a - \varphi_b) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \quad (\text{A.19})$$

Primera derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} = & -\frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf} (1 - \varphi_a - \varphi_b) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \\ & + \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_i C_{p,i} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \frac{\partial \varphi_b}{\partial \varphi_i} \right), \quad (i = a, b) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_{p,eff}}{\partial \varphi_i^2} = & \frac{2}{\rho_{eff}^3} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf} (1 - \varphi_a - \varphi_b) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \left( \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \right)^2 \\ & - \frac{2}{\rho_{eff}^2} \left( \rho_i C_{p,i} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \frac{\partial \varphi_b}{\partial \varphi_i} \right) \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$(i = a, b)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_{p,eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} &= \frac{2}{\rho_{eff}^3} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf} (1 - \varphi_a - \varphi_b) C_{p,bf} \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \\
&\quad - \frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( \rho_i C_{p,i} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \frac{\partial \varphi_b}{\partial \varphi_i} \right), \\
&\quad \left( \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} + \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \right), \quad (i = a, b)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Se observa que la mayoría de segundas derivadas de las propiedades termodinámicas son cero, entonces reescribiendo las ecuaciones (A.8) y (A.9) se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i^2} \\
&= C_1 \left( \frac{2}{k_{eff}^3} \left( \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_i} \right)^2 \right) \\
&+ C_2 \left[ -2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} \frac{\partial^2 C_{p,eff}}{\partial \varphi_i^2} \right. \\
&+ 6 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^4} \left( \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} \right)^2 \\
&+ 6 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^4} \left( \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \right)^2 \\
&- 4 \frac{1}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} \\
&- 4 \frac{1}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^3} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \\
&\left. + 8 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^3} \frac{1}{\rho_{eff}^3} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \right], \quad (i = a, b)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \\
&= C_1 \left( \frac{2}{k_{eff}^3} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_b} \right) \\
&+ C_2 \left[ -2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \frac{\partial^2 C_{p,eff}}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right. \\
&+ 6 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^4} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} \\
&+ 6 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^4} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \\
&- 2 \frac{1}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \left( \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} \right) \\
&- 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^3} \left( \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \right) \\
&\left. + 4 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^3 \rho_{eff}^3} \left( \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} \right) \right] \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Además las ecuaciones (A.12), (A.15), (A.18), (A.21) y (A.22) pueden ser reemplazadas en (A.23) y (A.24). Y luego las ecuaciones (A.23) y (A.24) en la matriz Hessiana (A.6).

Por otro lado, si derivamos la segunda parte del Lagrangian Estacionario:

$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{\partial f_k(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_a} = -\lambda_1 + \lambda_2 \tag{A.25}$$



$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{\partial f_k(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_b} = -\lambda_3 + \lambda_4 \quad (\text{A.26})$$

Las ecuaciones (A.7), (A.25) y (A.26) se remplazan en (A.5) y se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{C_1}{k_{eff}^2} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_a} + C_2 \left( \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} - 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} \right. \\ \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^3} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \right) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

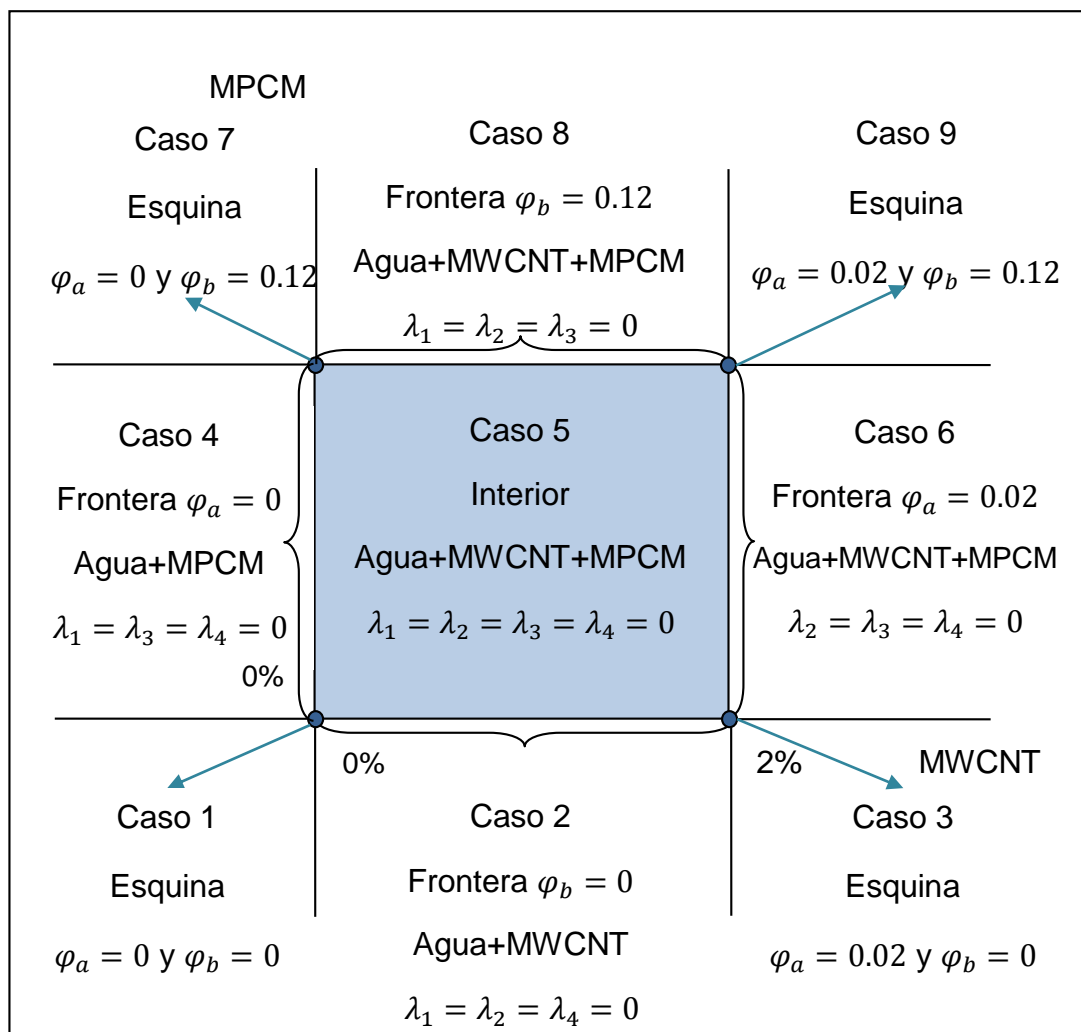
$$\begin{aligned} -\frac{C_1}{k_{eff}^2} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_b} + C_2 \left( \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} - 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2 C_{p,eff}^3} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} \right. \\ \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2 \rho_{eff}^3} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \right) - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Finalmente se tiene que las ecuaciones (A.11), (A.14), (A.17) y (A.20) de primeras derivadas de las propiedades termo-físicas pueden ser remplazadas en (A.27) y (A.28).

### Casos para resolver el sistema de ecuaciones

Como se mencionó anteriormente se debe resolver el sistema de ecuaciones dadas en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), el sistema de seis ecuaciones (A.1 - A.5), (A.27) y (A.28) y seis incógnitas  $\lambda_1, \dots, \lambda_4, \varphi_a$  y  $\varphi_b$ .

Las ecuaciones de holgura complementaria sirven como guía para reducir el sistema de seis ecuaciones a casos donde se tengan sistemas de dos ecuaciones o solo una ecuación con 2 y 1 variable, respectivamente. Los casos para resolver el sistema de ecuaciones son nueve. Para comprender y visualizar mejor estos casos es necesario graficar el dominio de la función objetivo.



**FIGURA A.1** CASOS PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES DADAS EN LAS CONDICIONES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT) EN EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN OBJETIVO  $F_0 = \dot{S}'_{GEN}(\Phi_A, \Phi_B)$

Los casos 1, 3, 7 y 9 corresponden a las esquinas del dominio, estos casos se evalúan de manera directa en la función objetivo, mientras que los casos 2, 4, 6, 8 corresponden a las fronteras y el 5 a los puntos interiores al dominio, de estos últimos se obtendrán sus puntos críticos del sistema de ecuaciones dadas en las condiciones KKT.

También se puede tabular los casos:

**TABLA A.1**  
CASOS PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES DADAS EN LAS  
CONDICIONES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)

<b>Casos</b>	<b>Condiciones</b>	<b>Descripción</b>
Caso 1:	$\varphi_a = 0,$ $\varphi_b = 0$	Esquina
Caso 2:	$0 < \varphi_a < 0.02,$ $\varphi_b = 0$	Frontera
Caso 3:	$\varphi_a = 0,$ $\varphi_b = 0.12$	Esquina
Caso 4:	$\varphi_a = 0,$ $0 < \varphi_b < 0.12$	Frontera
Caso 5:	$0 < \varphi_a < 0.02,$ $0 < \varphi_b < 0.12$	Interior
Caso 6:	$\varphi_a = 0.02,$ $0 < \varphi_b < 0.12$	Frontera
Caso 7:	$\varphi_a = 0.02,$ $\varphi_b = 0$	Esquina
Caso 8:	$0 < \varphi_a < 0.02,$ $\varphi_b = 0.12$	Frontera
Caso 9:	$\varphi_a = 0.02,$ $\varphi_b = 0.12$	Esquina

A continuación se resolverán los casos 2, 4, 5, 6 y 8.

## Caso 2

Se tiene  $\varphi_b = 0$ , de esto se deduce  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$ , reemplazando en:

La ecuación (A.10) y (A.11) para conductividad térmica específica,

$$k_{eff} = (1 - \varphi_a)k_{bf} + \varphi_a C_{ka} \quad (A.29)$$

$$\frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_a} = C_{ka} - k_{bf} \quad (A.30)$$

en (A.13) y (A.14) para viscosidad dinámica específica,

$$\mu_{eff} = \mu_{bf}(1 + C_{\mu_a}\varphi_a) \quad (A.31)$$

$$\frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} = \mu_{bf}C_{\mu_a} \quad (A.32)$$

en (A.16) y (A.17) para densidad efectiva,

$$\rho_{eff} = \rho_a\varphi_a + \rho_{bf}(1 - \varphi_a) \quad (A.33)$$

$$\frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} = \rho_a - \rho_{bf} \quad (A.34)$$

y en (A.19) y (A.20) para calor específico efectivo,

$$C_{p,eff} = \frac{1}{\rho_{eff}} (\rho_a\varphi_a C_{p,a} + \rho_{bf}(1 - \varphi_a)C_{p,bf}) \quad (A.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} = & -\frac{1}{\rho_{eff}^2} (\rho_a\varphi_a C_{p,a} + \rho_{bf}(1 - \varphi_a)C_{p,bf}) \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} \\ & + \frac{1}{\rho_{eff}} (\rho_a C_{p,a} - \rho_{bf}C_{p,bf}) \end{aligned} \quad (A.36)$$

Reemplazando estas últimas ecuaciones en (A.27) del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\frac{C_1}{k_{eff}^2}(C_{ka} - k_{bf}) \\
& + C_2 \left[ \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \mu_{bf} C_{\mu_a} \right. \\
& + 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \left( \frac{1}{\rho_{eff}^2} (\rho_a \varphi_a C_{p,a} \right. \\
& + \rho_{bf} (1 - \varphi_a) C_{p,bf}) (\rho_a - \rho_{bf}) \\
& \left. \left. - \frac{1}{\rho_{eff}} (\rho_a C_{p,a} - \rho_{bf} C_{p,bf}) \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} (\rho_a - \rho_{bf}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Esta última es una ecuación con una variable implícita  $\varphi_a$ , la cual se puede resolver por métodos numéricos como Newton Raphson y utilizando softwares como EES o MATLAB®.

#### Caso 4

Se tiene  $\varphi_a = 0$ , de esto se deduce  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ , remplazando en: la ecuación (A.10) y (A.11) para conductividad térmica específica,

$$k_{eff} = (1 - \varphi_b)k_{bf} + \varphi_b C_{kb} \quad (A.38)$$

$$\frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_b} = C_{kb} - k_{bf} \quad (A.39)$$

en (A.13) y (A.14) para viscosidad dinámica específica,

$$\mu_{eff} = \mu_{bf}(1 + C_{\mu_b}\varphi_b) \quad (A.40)$$

$$\frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} = \mu_{bf}C_{\mu_b} \quad (A.41)$$

en (A.16) y (A.17) para densidad efectiva,

$$\rho_{eff} = \rho_b\varphi_b + \rho_{bf}(1 - \varphi_b) \quad (A.42)$$

$$\frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} = \rho_b - \rho_{bf} \quad (A.43)$$

y en (A.19) y (A.20) para calor específico efectivo,

$$C_{p,eff} = \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_b\varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf}(1 - \varphi_b)C_{p,bf} + \varepsilon\rho_b\varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \quad (A.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} = & -\frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( \rho_b\varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf}(1 - \varphi_b)C_{p,bf} + \varepsilon\rho_b\varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} \\ & + \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_b C_{p,b} - \rho_{bf}C_{p,bf} + \varepsilon\rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \end{aligned} \quad (A.45)$$

Remplazando estas últimas ecuaciones en (A.27) del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
f(\varphi_b) = & -\frac{C_1}{k_{eff}^2}(C_{kb} - k_{bf}) \\
& + C_2 \left[ \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \mu_{bf} C_{\mu_b} \right. \\
& + 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \left( \frac{1}{\rho_{eff}^2} (\rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf} (1 - \varphi_b) C_{p,bf} \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) (\rho_b - \rho_{bf}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_b C_{p,b} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} (\rho_b - \rho_{bf}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Esta última es una ecuación con una variable implícita  $\varphi_b$ , la cual se puede resolver por métodos numéricos como Newton Raphson y utilizando softwares como EES o Matlab.

## Caso 6

Se tiene  $\varphi_a = 0.02$ , de esto se deduce  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ , reemplazando en: la ecuación (A.10) y (A.11) para conductividad térmica específica,

$$k_{eff} = (0.98 - \varphi_b)k_{bf} + 0.02 C_{ka} + \varphi_b C_{kb} \quad (A.47)$$

$$\frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_b} = C_{kb} - k_{bf} \quad (A.48)$$

en (A.13) y (A.14) para viscosidad dinámica específica,

$$\mu_{eff} = \mu_{bf}(1 + 0.02 C_{\mu_a} + C_{\mu_b}\varphi_b) \quad (A.49)$$

$$\frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} = \mu_{bf} C_{\mu_b} \quad (A.50)$$

en (A.16) y (A.17) para densidad efectiva,

$$\rho_{eff} = 0.02 \rho_a + \rho_b \varphi_b + \rho_{bf}(0.98 - \varphi_b) \quad (A.51)$$

$$\frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} = \rho_b - \rho_{bf} \quad (A.52)$$

y en (A.19) y (A.20) para calor específico efectivo,

$$C_{p,eff} = \frac{1}{\rho_{eff}} \left( 0.02 \rho_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf}(0.98 - \varphi_b) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \quad (A.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} = & -\frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( 0.02 \rho_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf}(0.98 - \varphi_b) C_{p,bf} \right. \\ & \left. + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} + \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_b C_{p,b} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \end{aligned} \quad (A.54)$$

Reemplazando estas últimas ecuaciones en (A.27) del sistema de ecuaciones se obtiene:



$$\begin{aligned}
f(\varphi_b) = & -\frac{C_1}{k_{eff}^2}(C_{kb} - k_{bf}) \\
& + C_2 \left[ \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \mu_{bf} C_{\mu_b} \right. \\
& + 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \left( \frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( 0.02 \rho_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} \right. \right. \\
& \left. \left. + \rho_{bf} (0.98 - \varphi_b) C_{p,bf} - \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) (\rho_b - \rho_{bf}) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_b C_{p,b} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} (\rho_b - \rho_{bf}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Esta última es una ecuación con una variable implícita  $\varphi_b$ , la cual se puede resolver por métodos numéricos como Newton Raphson y utilizando softwares como EES o Matlab.

## Caso 8

Se tiene  $\varphi_b = 0.12$ , de esto se deduce  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , reemplazando en:  
la ecuación (A.10) y (A.11) para conductividad térmica específica,

$$k_{eff} = (0.88 - \varphi_a)k_{bf} + \varphi_a C_{ka} + 0.12 C_{kb} \quad (A.56)$$

$$\frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_a} = C_{ka} - k_{bf} \quad (A.57)$$

en (A.13) y (A.14) para viscosidad dinámica específica,

$$\mu_{eff} = \mu_{bf}(1 + C_{\mu_a}\varphi_a + 0.12 C_{\mu_b}) \quad (A.58)$$

$$\frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} = \mu_{bf} C_{\mu_a} \quad (A.59)$$

en (A.16) y (A.17) para densidad efectiva,

$$\rho_{eff} = \rho_a \varphi_a + 0.12 \rho_b + \rho_{bf}(0.88 - \varphi_a) \quad (A.60)$$

$$\frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} = \rho_a - \rho_{bf} \quad (A.61)$$

y en (A.19) y (A.20) para calor específico efectivo,

$$C_{p,eff} = \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + 0.12 \rho_b C_{p,b} + \rho_{bf}(0.88 - \varphi_a) C_{p,bf} \right. \\ \left. + 0.12 \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \quad (A.62)$$

$$\frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} = -\frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + 0.12 \rho_b C_{p,b} + \rho_{bf}(0.88 - \varphi_a) C_{p,bf} \right. \\ \left. + 0.12 \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} + \frac{1}{\rho_{eff}} (\rho_a C_{p,a} - \rho_{bf} C_{p,bf}) \quad (A.63)$$

Remplazando estas últimas ecuaciones en (A.27) del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f(\varphi_a) = & -\frac{C_1}{k_{eff}^2}(C_{ka} - k_{bf}) \\
 & + C_2 \left[ \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \mu_{bf} C_{\mu_a} \right. \\
 & + 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \left( \frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + 0.12 \rho_b C_{p,b} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \rho_{bf} (0.88 - \varphi_a) C_{p,bf} - 0.12 \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) (\rho_a - \rho_{bf}) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\rho_{eff}} (\rho_a C_{p,a} - \rho_{bf} C_{p,bf}) \right) - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} (\rho_a - \rho_{bf}) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{A.64}$$

Esta última es una ecuación con una variable implícita  $\varphi_b$ , la cual se puede resolver por métodos numéricos como Newton Raphson y utilizando softwares como EES o Matlab.

## Caso 5

Para el caso 5 ( $\varphi_a, \varphi_b$ ) son variables dentro del dominio es decir,  $0 < \varphi_a < 0.02$ ,  $0 < \varphi_b < 0.12$ , respectivamente, de esto se deduce  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Con esto se tiene que las ecuaciones (A.27) y (A.28) forman un sistema de ecuaciones con 2 ecuaciones y 2 incógnitas implícitas.

Además se remplazan las derivadas que tenemos en las ecuaciones 7-10

$$\begin{aligned} & -\frac{C_1}{k_{eff}^2}(C_{ka} - k_{bf}) \\ & + C_2 \left[ \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \mu_{bf} C_{\mu_a} \right. \\ & + 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \left( \frac{1}{\rho_{eff}^2} (\rho_a \varphi_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} \right. \\ & \left. \left. - \rho_{bf} (1 - \varphi_a - \varphi_b) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) (\rho_a - \rho_{bf}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho_{eff}} (\rho_a C_{p,a} - \rho_{bf} C_{p,bf}) \right) \\ & \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} (\rho_a - \rho_{bf}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (A.65)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{C_1}{k_{eff}^2}(C_{kb} - k_{bf}) \\
& + C_2 \left[ \left( \frac{1}{C_{p,eff}} \right)^2 \mu_{bf} C_{\mu_b} \right. \\
& + 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \left( \frac{1}{\rho_{eff}^2} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho_{bf} (1 - \varphi_a - \varphi_b) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) (\rho_b - \rho_{bf}) \right. \quad (A.66) \\
& \left. + \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_b C_{p,b} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} (\rho_b - \rho_{bf}) \right] = 0
\end{aligned}$$

Esto último es un sistema de dos ecuaciones con dos variables implícitas  $\varphi_a, \varphi_b$ , el cual se puede resolver por métodos numéricos como el de Newton Raphson y utilizando softwares como EES o Matlab.

### **Solución del problema de optimización**

Obtenido los  $\varphi_a, \varphi_b$  para todos los 9 casos, se debe analizar si corresponde a un mínimo o máximo local dependiendo del determinante de la matriz Hessiana, si es positivo (convexo) o negativo (cóncavo), respectivamente.

Luego se remplazan estos puntos en la función inicial de generación de entropía y se comparan para obtener el resultado mínimo, que vendría hacer

el mínimo global del dominio, Para la resolución de las ecuaciones implícitas se aplica el programa EES y para determinar el determinante de la matriz Hessiana se usó Matlab.

**TABLA A.2**

TABLA DE PROPIEDADES TERMO-FÍSICAS Y CONDICIONES DEL PROBLEMA

<b>Parámetros</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>
Densidad del fluido base	$\rho_{bf}$	1000 $Kg/m^3$
Densidad MWCNT	$\rho_a$	2100 $Kg/m^3$
Densidad MPCM	$\rho_b$	856 $Kg/m^3$
Calor específico del fluido base	$C_{p,bf}$	4.179 $KJ/(Kg K)$
Calor específico MWCNT	$C_{p,a}$	0.485 $KJ/(Kg K)$
Calor específico MPCM	$C_{p,b}$	2.180 $KJ/(Kg K)$
Calor latente MPCM	$\lambda$	244.0 $KJ/(Kg K)$
Conductividad del fluido base	$k_{bf}$	0.616 $W/(m K)$
Conductividad MWCNT	$k_a$	80 $W/(m K)$
Conductividad MPCM	$k_b$	0.152 $W/(m K)$
Coeficiente de Conductividad MWCNT	$C_{ka}$	11
Coeficiente de Conductividad MPCM	$C_{kb}$	0.152
Viscosidad del fluido base	$\mu_{bf}$	0.89E-3 $Pa/s$
Coeficiente de viscosidad MWCNT	$C\mu_a$	120
Coeficiente de viscosidad MPCM	$C\mu_b$	15
Flujo de Calor	$q''$	1000 $W/m^2$
Diámetro	$D$	0.005 $m$
Temperatura	$T$	300 $K$
Diferencia de Temperatura	$\Delta T$	5 $K$

Con esta tabla se puede proceder a remplazar todas las propiedades termo-físicas y además los valores correspondientes a las condiciones que definen nuestro problema.

$$C_1 = 2.0015 \times 10^{-4}$$

$$C_2 = 9.2711 \times 10^{10}$$

$$k_{eff} = 0.616(1 - \varphi_a - \varphi_b) + 11 \varphi_a + 0.152 \varphi_b$$

$$\frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_a} = 10.384 \quad y \quad \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_b} = -0.464$$

$$\mu_{eff} = 0.89 \times 10^{-3}(1 + 120 \varphi_a + 15 \varphi_b)$$

$$\frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_a} = 0.1068 \quad y \quad \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_b} = 0.0134$$

$$\rho_{eff} = 2100\varphi_a + 856 \varphi_b + 1000 (1 - \varphi_a - \varphi_b)$$

$$\frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_a} = 1100 \quad y \quad \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_b} = -144$$

$$C_{p,eff} = \frac{1}{\rho_{eff}} (1019\varphi_a + 1866 \varphi_b + 4179(1 - \varphi_a - \varphi_b) + 418 \varphi_b) \times 10^3$$

$$\frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_a} = -1100 \frac{C_{p,eff}}{\rho_{eff}} - \frac{3160 \times 10^3}{\rho_{eff}} \quad y \quad \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_b} = 144 \frac{C_{p,eff}}{\rho_{eff}} - \frac{1895 \times 10^3}{\rho_{eff}}$$

$$-\frac{C_1}{k_{eff}^2} \frac{\partial k_{eff}}{\partial \varphi_i} + C_2 \left( \left( \frac{1}{C_{p,eff} \rho_{eff}} \right)^2 \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \varphi_i} - 2 \frac{\mu_{eff}}{\rho_{eff}^2} \frac{1}{C_{p,eff}^3} \frac{\partial C_{p,eff}}{\partial \varphi_i} - \right.$$

$$\left. 2 \frac{\mu_{eff}}{C_{p,eff}^2} \frac{1}{\rho_{eff}^3} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} \right) = 0, \quad (i = a, b)$$

**TABLA A.3**

TABLA DE SOLUCIONES PARA LOS 9 CASOS DEL SISTEMA DE ECUACIONES  
DE LAS CONDICIONES KKT

Casos	$\varphi_a$	$\varphi_b$	Hessiano	$\dot{s}'_{gen} (\times 10^{-4})$	Conclusión
1	0.0000	0.00000	Cóncavo	2.8022	Máximo local
2	0.09825	0.00000			No está en el dominio
3	0.0200	0.00000	Convexo	2.5956	Mínimo local
4	0.0000	-0.1954			No está en el dominio
5	-	-			
6	0.0200	0.02385	Convexo	2.5843	Mínimo Global
7	0.0000	0.12000	Cóncavo	3.6012	Máximo Global
8	0.26740	0.12000			No está en el dominio
9	0.02000	0.12000	Convexo	2.6609	Mínimo Local

**Ecuaciones utilizadas en el programa Engineering Equation Solver (EES).**

### **Caso 1**

---

a=0  
b=0



C1=2.0015e-4  
C2=4.6356e10\*2  
K=0.616\*(1-a-b)+11\*a+0.152\*b  
u=0.89e-3\*(1+120\*a+15\*b)  
D=2100\*a+856\*b+1000\*(1-a-b)  
C=1/D\*(1019\*a+1866\*b+4179\*(1-a-b)+41773\*b)\*10^3  
S=C1/K+C2\*(1/C/D)^2\*u

## Caso 2

---

b=0

C1=2.0015e-4  
C2=4.6356e10\*2  
K=0.616\*(1-a-b)+11\*a+0.152\*b  
dKa=10.384  
u=0.89e-3\*(1+120\*a+15\*b)  
dua=0.1068  
D=2100\*a+856\*b+1000\*(1-a-b)  
dDa=1100  
C=1/D\*(1019\*a+1866\*b+4179\*(1-a-b)+41773\*b)\*10^3  
dCa=-1100\*C/D-(3160e3)/D  
-C1/K^2\*dKa+C2\*((1/C/D)^2\*dua-2\*u/D^2/C^3\*dCa-2\*u/C^2/D^3\*dDa)=0  
S=C1/K+C2\*(1/C/D)^2\*u

## Caso 3

---

a=0.02

b=0

C1=2.0015e-4  
C2=4.6356e10\*2  
K=0.616\*(1-a-b)+11\*a+0.152\*b  
u=0.89e-3\*(1+120\*a+15\*b)  
D=2100\*a+856\*b+1000\*(1-a-b)  
C=1/D\*(1019\*a+1866\*b+4179\*(1-a-b)+41773\*b)\*10^3  
S=C1/K+C2\*(1/C/D)^2\*u

## Caso 4

---

a=0

C1=2.0015e-4  
C2=4.6356e10\*2  
K=0.616\*(1-a-b)+11\*a+0.152\*b  
dKb=-0.464  
u=0.89e-3\*(1+120\*a+15\*b)  
dub=0.0134  
D=2100\*a+856\*b+1000\*(1-a-b)

dDb=-144  
C=1/D\*(1019\*a+1866\*b+4179\*(1-a-b)+41773\*b)\*10^3  
dCb=144\*C/D+(39460e3)/D  
-C1/K^2\*dKb+C2\*((1/C/D)^2\*dub-2\*u/D^2/C^3\*dCb-2\*u/C^2/D^3\*dDb)=0  
S=C1/K+C2\*(1/C/D)^2\*u

## Caso 5

---

C1=2.0015e-4  
C2=4.6356e10\*2  
K=0.616\*(1-a-b)+11\*a+0.152\*b  
dKa=10.384  
dKb=-0.464  
u=0.89e-3\*(1+120\*a+15\*b)  
dua=0.1068  
dub=0.0134  
D=2100\*a+856\*b+1000\*(1-a-b)  
dDa=1100  
dDb=-144  
C=1/D\*(1019\*a+1866\*b+4179\*(1-a-b)+41773\*b)\*10^3  
dCa=-1100\*C/D-(3160e3)/D  
dCb=144\*C/D+(39460e3)/D  
-C1/K^2\*dKa+C2\*((1/C/D)^2\*dua-2\*u/D^2/C^3\*dCa-2\*u/C^2/D^3\*dDa)=0  
-C1/K^2\*dKb+C2\*((1/C/D)^2\*dub-2\*u/D^2/C^3\*dCb-2\*u/C^2/D^3\*dDb)=0  
S=C1/K+C2\*(1/C/D)^2\*u

## Caso 6

---

a=0.02  
C1=2.0015e-4  
C2=4.6356e10\*2  
K=0.616\*(1-a-b)+11\*a+0.152\*b  
dKb=-0.464  
u=0.89e-3\*(1+120\*a+15\*b)  
dub=0.0134  
D=2100\*a+856\*b+1000\*(1-a-b)  
dDb=-144  
C=1/D\*(1019\*a+1866\*b+4179\*(1-a-b)+41773\*b)\*10^3  
dCb=144\*C/D+(39460e3)/D  
-C1/K^2\*dKb+C2\*((1/C/D)^2\*dub-2\*u/D^2/C^3\*dCb-2\*u/C^2/D^3\*dDb)=0  
S=C1/K+C2\*(1/C/D)^2\*u

## Caso 7

---

a=0  
b=0.12  
  
C1=2.0015e-4  
C2=4.6356e10\*2  
K=0.616\*(1-a-b)+11\*a+0.152\*b

$$u=0.89e-3*(1+120*a+15*b)$$

$$D=2100*a+856*b+1000*(1-a-b)$$

$$C=1/D*(1019*a+1866*b+4179*(1-a-b)+41773*b)*10^3$$

$$S=C1/K+C2*(1/C/D)^2*u$$

## Caso 8

---

b=0.12

$$C1=2.0015e-4$$

$$C2=4.6356e10^2$$

$$K=0.616*(1-a-b)+11*a+0.152*b$$

$$dKa=10.384$$

$$u=0.89e-3*(1+120*a+15*b)$$

$$dua=0.1068$$

$$D=2100*a+856*b+1000*(1-a-b)$$

$$dDa=1100$$

$$C=1/D*(1019*a+1866*b+4179*(1-a-b)+41773*b)*10^3$$

$$dCa=-1100*C/D-(3160e3)/D$$

$$-C1/K^2*dKa+C2*((1/C/D)^2*dua-2*u/D^2/C^3*dCa-2*u/C^2/D^3*dDa)=0$$

$$S=C1/K+C2*(1/C/D)^2*u$$

## Caso 9

---

a=0.02

b=0.12

$$C1=2.0015e-4$$

$$C2=4.6356e10^2$$

$$K=0.616*(1-a-b)+11*a+0.152*b$$

$$u=0.89e-3*(1+120*a+15*b)$$

$$D=2100*a+856*b+1000*(1-a-b)$$

$$C=1/D*(1019*a+1866*b+4179*(1-a-b)+41773*b)*10^3$$

$$S=C1/K+C2*(1/C/D)^2*u$$

## Programa hecho en Matlab para determinar el determinante de la matriz Hessiana

```
clear all;
clc;
a=input('Ingrese la fracción de MWCNT: ');
b=input('Ingrese la fracción de MPCM: ');

q=1000;
d=0.005;
```

```

T=300;
Cbf=4.179e3;
ubf=0.89e-3;
C1=q^2*pi*d^2/(4.36*T^2);
C2=8e6*pi/T*(Cbf*ubf/d)^2*2;

K=0.616*(1-a-b)+11*a+0.152*b;
dKa=10.384;
dKb=-0.464;
u=0.89e-3*(1+120*a+15*b);
dua=0.1068;
dub=0.0134;
D=2100*a+856*b+1000*(1-a-b);
dDa=1100;
dDb=-144;
C=1/D*(1019*a+1866*b+4179*(1-a-b)+41773*b)*10^3;
dCa=-1100*C/D-(3160e3)/D;
dCb=144*C/D+(39460e3)/D;
d2Ca2=-2*dCa/D*dDa;
d2Cb2=-2*dCb/D*dDb;
d2Cab=2*C/D^2*dDa*dDb-(3160e3)/D^2*(dDa+dDb);
d2Cba=2*C/D^2*dDa*dDb-(39460e3)/D^2*(dDa+dDb);
d2sa2=(1/(D^2*C^2))*(C1*(2*D^2*C^2/K^3*dKa^2)+C2*(-
2*u/C*d2Ca2+6*u/C^2*dCa^2+6*u/D^2*dDa^2-4/C*dua*dCa-
4/D*dua*dDa+8*u/C/D*dCa*dDa));
d2sb2=(1/(D^2*C^2))*(C1*(2*D^2*C^2/K^3*dKb^2)+C2*(-
2*u/C*d2Cb2+6*u/C^2*dCb^2+6*u/D^2*dDb^2-4/C*dub*dCb-
4/D*dub*dDb+8*u/C/D*dCb*dDb));
d2sab=(1/(D^2*C^2))*(C1*(2*D^2*C^2/K^3*dKa*dKb)+C2*(-
2*u/C*d2Cab+6*u/C^2*dCa*dCb+6*u/D^2*dDa*dDb-2/C*(dCa*dub+dCb*dua)-
2/D*(dDa*dub+dDb*dua)+4*u/C/D*(dCa*dDb+dCb*dDa)));
d2sba=(1/(D^2*C^2))*(C1*(2*D^2*C^2/K^3*dKa*dKb)+C2*(-
2*u/C*d2Cba+6*u/C^2*dCa*dCb+6*u/D^2*dDa*dDb-2/C*(dCa*dub+dCb*dua)-
2/D*(dDa*dub+dDb*dua)+4*u/C/D*(dCa*dDb+dCb*dDa)));
Det=det([d2sa2 d2sab; d2sba d2sb2]);
if Det>0
    display('Convexa');
elseif Det<0
    display('Concava');
else display('Infleccion');
end

```

## APÉNDICE B

### PROCEDIMIENTO ALGEBRÁICO DE OPTIMIZACIÓN DEL DIÁMETRO COMO FUNCIÓN DE LA ENTROPÍA GENERADA.

Sea la ecuación (B.1) la expresión de generación de entropía a la que se efectuará la optimización.

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{q''^2 \pi D^2}{K T^2 Nu(Re, Pr)} + \frac{32 \dot{m}^3}{\pi^2 \rho^2 T D^5} f(Re) \quad (B.1)$$

Para flujo laminar, factor de fricción es  $f=64/Re$ , y el número de Nusselt para flujo laminar con flujo de calor constante  $Nu=4.36$ . (Nusselt es un valor constante), El número de Reynolds es  $Re = 4\dot{m}/(\pi\mu D)$ . Remplazando estos valores en la ecuación B.1.

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{q''^2 \pi D^2}{K T^2 4.36} + \frac{32 \dot{m}^3}{\pi^2 \rho^2 T D^5} \left(\frac{64}{Re}\right) \quad (B.2)$$

$$\dot{S}'_{gen} = \frac{q''^2 \pi D^2}{K T^2 4.36} + \frac{512 \mu \dot{m}^2}{\pi \rho^2 T} \left(\frac{1}{D^4}\right) \quad (B.3)$$

Ahora se efectúa la derivación con respecto a D y se iguala a 0.

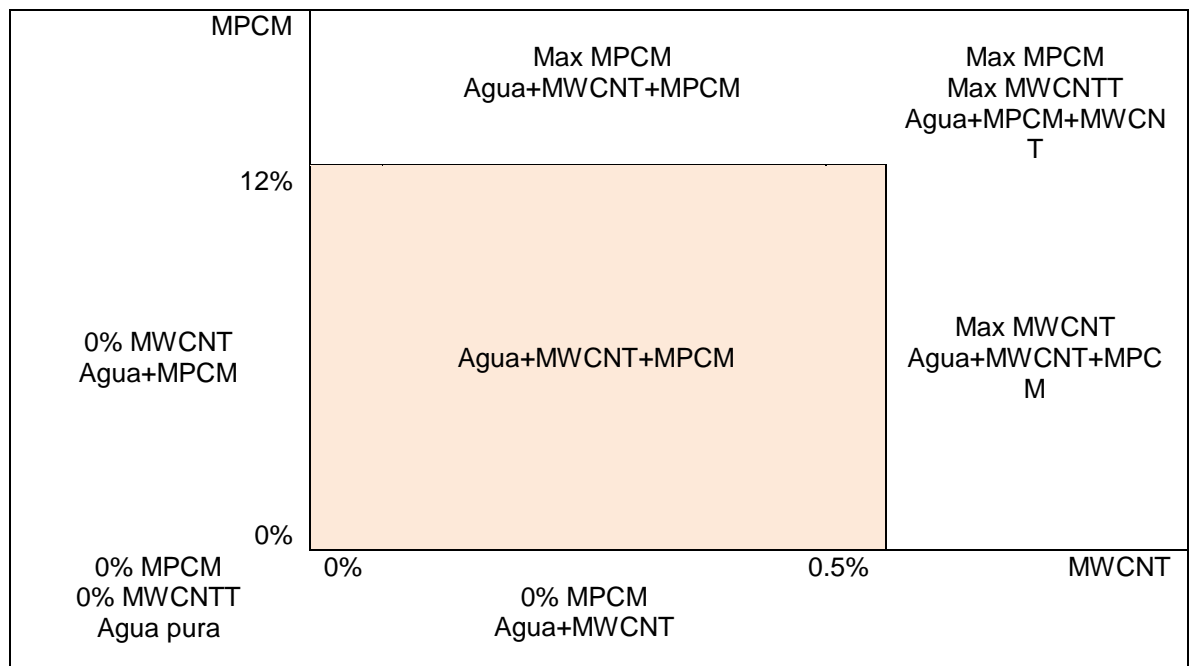
$$\frac{\partial \dot{S}'_{gen}}{\partial D} = \frac{2q''^2 \pi}{K T^2 4.36} D + \frac{512 \mu \dot{m}^2}{\pi \rho^2 T} \left(\frac{4}{D^5}\right) = 0 \quad (B.4)$$

Ahora se despeja D

$$D = \left[ \frac{2048\mu K T N u}{\pi^2 \rho^2} \left( \frac{\dot{m}}{q''} \right)^2 \right]^{1/6} \quad (B.5)$$

Se calcula el diámetro óptimo para todo el dominio de propiedades. Este dominio de propiedades se encuentra graficado a continuación.

**Gráfico B.1.** Dominio de propiedades termo-físicas



**FIGURA B.1.** DOMINIO DE PROPIEDADES TERMO-FÍSICAS

Ahora, conocidos  $(\dot{m}, q'', D, T, \mu, \rho, k, C_p)$  se introducen en la ecuación B.3 para generar todos los valores de entropía de acuerdo con los parámetros y propiedades.

## APÉNDICE C

### PROCEDIMIENTO ALGEBRÁICO EGM DETERMINANDO PORCENTAJES ÓPTIMOS DE MWCNT Y MPCM EN PROCESO CON TEMPERATURA DE PARED CONSTANTE

Análogamente al Apéndice A se detalla el desarrollo matemático para determinar la solución,  $(\varphi_a^*, \varphi_b^*)$  (óptimo primario), de un problema de optimización basado en la minimización de la generación de entropía,  $\dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)$  (función objetivo), para un proceso de transferencia de calor con temperatura de pared constante, donde  $(\varphi_a, \varphi_b)$  es el vector variable a optimizar,  $\varphi_a$  es la proporción de MWCNT y  $\varphi_b$  es la proporción de MPCM en agua.

#### Enunciado del problema de optimización

*min*

$$\dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b) = \dot{m}C_p \left[ \ln \left( \frac{1-\tau e^{-4St\lambda}}{1-\tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) + \right. \quad (f_0(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\left. \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1-\tau} \right) \right]$$

$$s. t.: \quad -\varphi_a \leq 0 \quad (f_1(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_a - 0.005 \leq 0 \quad (f_2(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$-\varphi_b \leq 0 \quad (f_3(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_b - 0.12 \leq 0 \quad (f_4(\varphi_a, \varphi_b))$$

EL problema pide encontrar el valor óptimo primario  $(\varphi_a^*, \varphi_b^*)$  que minimice la función objetivo  $f_0$ , de todos los vectores  $(\varphi_a, \varphi_b)$  que satisfacen las funciones de restricciones de desigualdad  $f_1, \dots, f_4$ .

Al igual que el Apéndice A se tiene un problema de optimización con restricciones de desigualdad, por lo tanto son necesarias las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para encontrar los puntos críticos de la función.

### Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

#### 1. Factibilidad Primaria

$$-\varphi_a \leq 0 \quad (f_1(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_a - 0.005 \leq 0 \quad (f_2(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$-\varphi_b \leq 0 \quad (f_3(\varphi_a, \varphi_b))$$

$$\varphi_b - 0.12 \leq 0 \quad (f_4(\varphi_a, \varphi_b))$$

#### 2. Factibilidad dual

$$\lambda_k \geq 0 \quad , \quad (k = 1, \dots, 4)$$

#### 3. Ecuaciones de holgura complementarias

$$\lambda_1 \varphi_a = 0 \quad (C.1)$$



$$\lambda_2(\varphi_a - 0.005) = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\lambda_3\varphi_b = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\lambda_4(\varphi_b - 0.12) = 0 \quad (\text{C.4})$$

#### 4. Lagrangian Estacionario

$$\frac{\partial \hat{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} + \sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{\partial f_k(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} = 0 \quad , \quad (i = a, b) \quad (\text{C.5})$$

Las condiciones de KKT se encargan de introducir las funciones de restricciones de desigualdad  $f_1, \dots, f_4$  en el problema de minimizar la función objetivo  $f_0$  a través de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ , respectivamente. Las condiciones KKT nos dan un sistema de seis ecuaciones con seis variables: cuatro ecuaciones de holgura complementaria (C.1 - C.4), dos ecuaciones del Lagrangian Estacionario (C.5) y las variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_4, \varphi_a$  y  $\varphi_b$ .

#### Primeras Derivadas de la función objetivo

Se debe obtener las primeras derivadas de la función objetivo  $\partial f_0 / \partial \varphi_a$  y  $\partial f_0 / \partial \varphi_b$  para remplazar en el Lagrangian Estacionario del sistema de ecuaciones de las condiciones de KKT (C.5).

Resolviendo las derivadas, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left( \dot{m} C_p \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right] \right), \quad (i = a, b) \end{aligned}$$

Sea  $r(\varphi_a, \varphi_b) = \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) + \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right],$

Entonces

$$\frac{\partial \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} = C_p r \frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_i} + \dot{m} \left( r \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i} + C_p \frac{\partial r}{\partial \varphi_i} \right), \quad (i = a, b)$$

Mientras que la derivada de  $r$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \varphi_i} &= \left[ \frac{4St\lambda\tau e^{-4St\lambda}}{\left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right)} - 4St\lambda e^{-4St\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \bar{f} \frac{Ec}{8} \left( -\frac{1}{St^2} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) + \frac{1}{St} \frac{4St\lambda e^{4St\lambda}}{\left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right)} \right) \right] \frac{\partial St}{\partial \varphi_i} \\ &\quad + \frac{Ec}{8St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_i} + \frac{\bar{f}}{8St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial Ec}{\partial \varphi_i} \end{aligned}$$

Remplazando se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \dot{s}'_{gen}(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_i} \\
&= C_p \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right] \frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_i} \\
&+ \dot{m} \left\{ \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right] \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i} \right. \\
&+ C_p \left[ \frac{4St\lambda \tau e^{-4St\lambda}}{\left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right)} - 4St\lambda e^{-4St\lambda} \right. \\
&+ \left. \left. \bar{f} \frac{Ec}{8} \left( -\frac{1}{St^2} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) + \frac{1}{St} \frac{4St\lambda e^{4St\lambda}}{\left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right)} \right) \right] \frac{\partial St}{\partial \varphi_i} \right. \\
&+ \left. \left. \frac{C_p Ec}{8 St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_i} + \frac{C_p \bar{f}}{8 St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial Ec}{\partial \varphi_i} \right\}, \\
&(i = a, b)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

La derivada de la generación de entropía se encuentra formada por 5 derivadas de funciones que dependen de las fracciones  $\varphi_a, \varphi_b$  que deben ser

resueltas por separado, estas son,  $\frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial St}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial Ec}{\partial \varphi_i}$ . Estas derivadas se resolverán a continuación.

- **Densidad efectiva**

$$\rho_{eff} = \rho_a \varphi_a + \rho_b \varphi_b + \rho_{bf}(1 - \varphi_a - \varphi_b) \quad (C.7)$$

derivando

$$\frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} = \rho_i - \rho_{bf}, \quad (i = a, b) \quad (C.8)$$

- **Calor específico efectivo**

$$C_p = \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_a \varphi_a C_{p,a} + \rho_b \varphi_b C_{p,b} + \rho_{bf}(1 - \varphi_a - \varphi_b) C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \varphi_b \frac{\lambda}{\Delta T} \right) \quad (C.9)$$

derivando

$$\frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i} = -\frac{C_p}{\rho_{eff}} \frac{\partial \rho_{eff}}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{\rho_{eff}} \left( \rho_i C_{p,i} - \rho_{bf} C_{p,bf} + \varepsilon \rho_b \frac{\lambda}{\Delta T} \frac{\partial \varphi_b}{\partial \varphi_i} \right), \quad (C.10)$$

$(i = a, b)$

- **Flujo másico**

$$\dot{m} = \frac{\dot{m}_{H2O} C_{p,H2O}}{C_p} \quad (C.11)$$

derivando

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_i} = -\frac{\dot{m}}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i}, \quad (i = a, b) \quad (\text{C.12})$$

- **Viscosidad Efectiva**

Aquí tenemos modelos de viscosidad para nano-fluidos y suspensiones de MPCM por separado, por lo tanto se muestran un conjunto de ecuaciones sucesivas cada una dependiente de la ecuación anterior. Partiendo de los modelos para nano fluidos con MWCNT y suspensiones de MPCM se obtendrá al final la viscosidad efectiva y su derivada.

Modelo de viscosidad para los MWCNT

$$\mu_{nf} = \mu_{H2O} \left(1 - \frac{\varphi_a}{\varphi_m}\right)^{-2} \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial \mu_{nf}}{\partial \varphi_a} = 2 \frac{\mu_{H2O}}{\varphi_m} \left(1 - \frac{\varphi_a}{\varphi_m}\right)^{-3} \quad (\text{C.14})$$

Modelo de viscosidad para los MPCM

$$\mu_{slurry} = \mu_{H2O} \left( \frac{1 + 0.5(1 + 0.6\varphi_b)\varphi_b - \varphi_b}{(1 - (1 + 0.6\varphi_b)\varphi_b)^2(1 - \varphi_b)} \right) \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mu_{slurry}}{\partial \varphi_b} \\
& = \mu_{H_2O} \left( \frac{0.6\varphi_b - 0.5}{(1 - (1 + 0.6\varphi_b)\varphi_b)^2(1 - \varphi_b)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{-(1 - (1 + 0.6\varphi_b)\varphi_b)^2 + 2(1 - (1 + 0.6\varphi_b)\varphi_b)(-1 - 1.2\varphi_b)(1 - \varphi_b)}{((1 - (1 + 0.6\varphi_b)\varphi_b)^2(1 - \varphi_b))^2} \right)
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Ahora reemplazando estos valores en la viscosidad cinemática dada para los nano-fluidos por

$$v_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \times 10^6 \tag{C.17}$$

$$\frac{\partial v_{nf}}{\partial \varphi_a} = \frac{10^6}{\rho_{nf}} \frac{\partial \mu_{nf}}{\partial \varphi_a} - \left( \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}^2} \times 10^6 \right) \frac{\partial \rho_{nf}}{\partial \varphi_a} \tag{C.18}$$

y para las suspensiones de MPCM por

$$v_{slurry} = \frac{\mu_{slurry}}{\rho_{slurry}} \times 10^6 \tag{C.19}$$

$$\frac{\partial v_{slurry}}{\partial \varphi_b} = \frac{10^6}{\rho_{slurry}} \frac{\partial \mu_{slurry}}{\partial \varphi_b} - \left( \frac{\mu_{slurry}}{\rho_{slurry}^2} \times 10^6 \right) \frac{\partial \rho_{slurry}}{\partial \varphi_b} \tag{C.20}$$

Luego se reemplaza en VBI (Índice de Viscosidad de Mezcla) para los nano-fluidos,

$$VBI_{nf} = 14.534 \ln(\ln(v_{nf} + 0.8)) + 10.975 \tag{C.21}$$

$$\frac{\partial VBI_{nf}}{\partial \varphi_a} = \frac{14.534}{(v_{nf} + 0.8) \ln(v_{nf} + 0.8)} \frac{\partial v_{nf}}{\partial \varphi_a} \tag{C.22}$$

y para las suspensiones de MPCM

$$VBI_{slurry} = 14.534 \ln(\ln(v_{slurry} + 0.8)) + 10.975 \quad (C.23)$$

$$\frac{\partial VBI_{slurry}}{\partial \varphi_b} = \frac{14.534}{(v_{slurry} + 0.8) \ln(v_{slurry} + 0.8)} \frac{\partial v_{slurry}}{\partial \varphi_b} \quad (C.24)$$

Por otro lado las proporciones de fracción de masa con sus respectivas derivadas son:

$$x_{nf} = \frac{\rho_{nf}}{\rho_{nf} + \rho_{slurry}} \quad (C.25)$$

$$\frac{\partial x_{nf}}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{\rho_{nf} + \rho_{slurry}} \frac{\partial \rho_{nf}}{\partial \varphi_i} - \frac{\rho_{nf}}{(\rho_{nf} + \rho_{slurry})^2} \left[ \frac{\partial \rho_{nf}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \rho_{slurry}}{\partial \varphi_i} \right], \quad (C.26)$$

(i = a, b)

$$x_{slurry} = \frac{\rho_{slurry}}{\rho_{nf} + \rho_{slurry}} \quad (C.27)$$

$$\frac{\partial x_{slurry}}{\partial \varphi_i} = \frac{1}{\rho_{nf} + \rho_{slurry}} \frac{\partial \rho_{slurry}}{\partial \varphi_i} - \frac{\rho_{slurry}}{(\rho_{nf} + \rho_{slurry})^2} \left[ \frac{\partial \rho_{nf}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \rho_{slurry}}{\partial \varphi_i} \right], \quad (C.28)$$

(i = a, b)

Con todo esto se puede escribir un VBI general para la mezcla

$$VBI = x_{nf} VBI_{nf} + x_{slurry} VBI_{slurry} \quad (C.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial VBI}{\partial \varphi_i} &= x_{nf} \frac{\partial VBI_{nf}}{\partial \varphi_i} + VBI_{nf} \frac{\partial x_{nf}}{\partial \varphi_i} + x_{slurry} \frac{\partial VBI_{slurry}}{\partial \varphi_i} \\ &+ VBI_{slurry} \frac{\partial x_{slurry}}{\partial \varphi_i}, \quad (i = a, b) \end{aligned} \quad (C.30)$$

Reemplazando en la viscosidad cinemática de la mezcla

$$v = (e^{e^{\left(\frac{VBI-10.975}{14.534}\right)}} - 0.8) \times 10^{-6} \quad (C.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi_i} = \frac{VBI}{14.534} e^{\left(\left(\frac{VBI-10.975}{14.534}\right) + e^{\left(\frac{VBI-10.975}{14.534}\right)}\right)} \times 10^{-6} \frac{\partial VBI}{\partial \varphi_i}, \quad (i = a, b) \quad (C.32)$$

Finalmente la viscosidad efectiva es

$$\mu = v\rho \quad (C.33)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varphi_i} = \rho \frac{\partial v}{\partial \varphi_i} + v \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_i}, \quad (i = a, b) \quad (C.34)$$

- **Número de Reynolds**

$$Re = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} \quad (C.35)$$

$$\frac{\partial Re}{\partial \varphi_i} = \frac{Re}{\dot{m}} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_i} - \frac{Re}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi_i} \quad (C.36)$$

- **Factor de Fricción de Darcy**

$$\bar{f} = (0.790 \ln(Re) - 1.64)^{-2} \quad (C.37)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_i} = - \frac{2(0.790)}{Re(0.790 \ln(Re) - 1.64)^3} \frac{\partial Re}{\partial \varphi_i} \quad (C.38)$$

- **Conductividad Térmica**

Análogamente a la viscosidad efectiva se tiene inicialmente modelos por separado para nano-fluidos con MWCNT y suspensiones de MPCM. A partir de esto se obtendrá una expresión para la mezcla.

Para los nano-fluidos,



$$K_{nf} = K_{bf}(1 + C_K \varphi_a) \quad (C.39)$$

$$\frac{\partial K_{nf}}{\partial \varphi_a} = K_{bf} C_K \quad (C.40)$$

Para suspensiones de MPCM

$$k_{slurry} = k_{bf} \frac{2k_{bf} + k_b + 2\varphi_b(k_b - k_{bf})}{2k_{bf} + k_b - \varphi_b(k_b - k_{bf})} \quad (C.41)$$

$$\frac{\partial K_{slurry}}{\partial \varphi_b} = 3k_{bf}(k_b - k_{bf}) \frac{2k_{bf} + k_b}{(2k_{bf} + k_b - \varphi_b(k_b - k_{bf}))^2} \quad (C.42)$$

Luego la conductividad térmica efectiva es

$$K = X_{nf} K_{nf} + (1 - X_{nf}) K_{slurry} \quad (C.43)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi_i} = X_{nf} \frac{\partial K_{nf}}{\partial \varphi_i} + (K_{nf} - K_{slurry}) \frac{\partial X_{nf}}{\partial \varphi_i} + (1 - X_{nf}) \frac{\partial K_{slurry}}{\partial \varphi_i} \quad (C.44)$$

- **Número de Prandtl**

$$Pr = \frac{C_p \mu}{K} \quad (C.45)$$

$$\frac{\partial Pr}{\partial \varphi_i} = Pr \left( \frac{1}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial \varphi_i} \right) \quad (C.46)$$

- **Número de Nusselt**

$$Nu = \frac{(\bar{f}/8)(Re - 1000)Pr}{1 + 12.7(Pr^{2/3} - 1)(\bar{f}/8)^{1/2}} \quad (C.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Nu}{\partial \varphi_i} = & \left[ \frac{Nu}{\bar{f}} - \frac{1}{2}(12.7(Pr^{2/3} - 1)(1/8)^{1/2}\bar{f}^{-1/2}) \frac{Nu}{(1 + 12.7(Pr^{2/3} - 1)(\bar{f}/8)^{1/2})} \right] \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_i} \\ & + \frac{Nu}{(Re - 1000)} \frac{\partial Re}{\partial \varphi_i} \\ & + \left[ \frac{Nu}{Pr} \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} 12.7(\bar{f}/8)^{1/2} Pr^{-1/3} \frac{Nu}{(1 + 12.7(Pr^{2/3} - 1)(\bar{f}/8)^{1/2})} \right] \frac{\partial Pr}{\partial \varphi_i} \end{aligned} \quad (C.48)$$

- **Coeficiente de convección**

$$h = \frac{K}{D} Nu \quad (C.49)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi_i} = h \left( \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{Nu} \frac{\partial Nu}{\partial \varphi_i} \right) \quad (C.50)$$

- **Número de Stanton**

$$St = \frac{h}{\rho U C_p} \quad (C.51)$$

$$\frac{\partial St}{\partial \varphi_i} = St \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i} \right) \quad (C.52)$$

- **Velocidad Media**

$$U = \frac{4\dot{m}}{\pi D^2 \rho} \quad (\text{C.53})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = U \left( \frac{1}{\dot{m}} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_i} \right) \quad (\text{C.54})$$

- **Número de Eckert**

$$Ec = \frac{U^2}{C_p T_w} \quad (\text{C.55})$$

$$\frac{\partial Ec}{\partial \varphi_i} = Ec \left( \frac{2}{U} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_i} \right) \quad (\text{C.56})$$

Sistema de ecuaciones de las condiciones KKT

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) nos dan un sistema de seis ecuaciones con seis variables: cuatro ecuaciones de holgura complementaria (C.1 - C.4), dos ecuaciones del Lagrangian Estacionario (C.5) y las variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_4, \varphi_a$  y  $\varphi_b$ .

Ahora si derivamos la segunda parte del Lagrangian Estacionario se obtiene

$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{\partial f_k(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_a} = -\lambda_1 + \lambda_2 \quad (\text{C.57})$$

$$\sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{\partial f_k(\varphi_a, \varphi_b)}{\partial \varphi_b} = -\lambda_3 + \lambda_4 \quad (\text{C.58})$$

Las derivadas obtenidas como las de flujo másico (C.12), calor específico efectivo (C.10), número de Stanton (C.52), factor de fricción de Darcy (C.38) y el número de Eckert (C.56) pueden ser remplazadas en (C.6). Las ecuaciones (C.6), (C.57) y (C.58) se remplazan en (C.5).

El sistema de 6 ecuaciones puede ser reducido a dos ecuaciones, (C.59) y (C.60) desarrolladas en 9 casos posibles a lo largo del dominio.

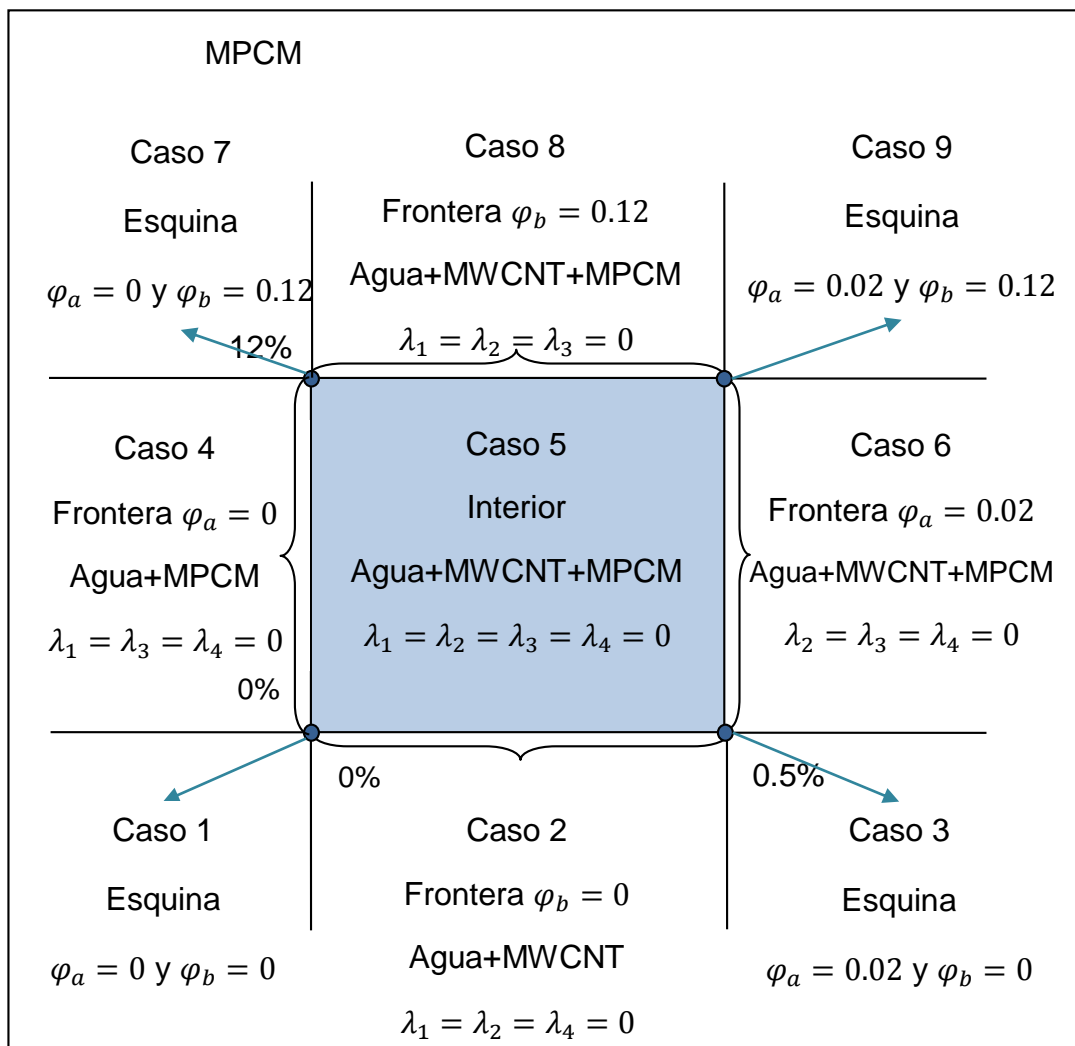
$$\begin{aligned}
& C_p \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) + \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right] \frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_a} \\
& + \dot{m} \left\{ \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right] \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_a} \right. \\
& \left. + C_p \left[ \frac{4St\lambda \tau e^{-4St\lambda}}{\left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right)} - 4St\lambda e^{-4St\lambda} \right. \right. \tag{C.59} \\
& \left. \left. + \bar{f} \frac{Ec}{8} \left( -\frac{1}{St^2} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) + \frac{1}{St} \frac{4St\lambda e^{4St\lambda}}{\left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right)} \right) \right] \frac{\partial St}{\partial \varphi_a} \right. \\
& \left. \left. + \frac{C_p Ec}{8 St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_a} + \frac{C_p \bar{f}}{8 St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial Ec}{\partial \varphi_a} \right\} \\
& - \lambda_1 + \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_p \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) + \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right] \frac{\partial \dot{m}}{\partial \varphi_b} \\
& + \dot{m} \left\{ \left[ \ln \left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right) - \tau(1 - e^{-4St\lambda}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{8} \bar{f} \frac{Ec}{St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \right] \frac{\partial C_p}{\partial \varphi_b} \right. \\
& \left. + C_p \left[ \frac{4St\lambda \tau e^{-4St\lambda}}{\left( \frac{1 - \tau e^{-4St\lambda}}{1 - \tau} \right)} - 4St\lambda e^{-4St\lambda} \right. \right. \\
& \left. \left. + \bar{f} \frac{Ec}{8} \left( -\frac{1}{St^2} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) + \frac{1}{St} \frac{4St\lambda e^{4St\lambda}}{\left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right)} \right) \right] \frac{\partial St}{\partial \varphi_b} \right. \\
& \left. \left. + \frac{C_p Ec}{8 St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi_b} + \frac{C_p \bar{f}}{8 St} \ln \left( \frac{e^{4St\lambda} - \tau}{1 - \tau} \right) \frac{\partial Ec}{\partial \varphi_b} \right\} \\
& - \lambda_3 + \lambda_4 = 0
\end{aligned} \tag{C.60}$$

### Casos para resolver el sistema de ecuaciones

Las ecuaciones de holgura complementaria sirven como guía para reducir el sistema de seis ecuaciones a casos donde se tengan sistemas de dos ecuaciones o solo una ecuación con 2 y 1 variable, respectivamente.

Los casos para resolver el sistema de ecuaciones son nueve. Para comprender y visualizar mejor estos casos es necesario graficar el dominio de la función objetivo.



**FIGURA C.1** CASOS PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES DADAS LAS CONDICIONES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT) EN EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN OBJETIVO  $F_0 = \dot{S}'_{GEN}(\Phi_A, \Phi_B)$

Los casos 1, 3, 7 y 9 corresponden a las esquinas del dominio, estos casos se evalúan de manera directa en la función objetivo, mientras que los casos 2, 4, 6, 8 corresponden a las fronteras y el 5 a los puntos interiores al dominio, de estos últimos se obtendrán sus puntos críticos del sistema de ecuaciones dadas en las condiciones KKT.

También se puede tabular los casos:

**TABLA C.1**  
CASOS PARA RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES DADAS EN LAS  
CONDICIONES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)

<b>Casos</b>	<b>Condiciones</b>	<b>Descripción</b>
Caso 1:	$\varphi_a = 0,$ $\varphi_b = 0$	Esquina
Caso 2:	$0 < \varphi_a < 0.05,$ $\varphi_b = 0$	Frontera
Caso 3:	$\varphi_a = 0,$ $\varphi_b = 0.12$	Esquina
Caso 4:	$\varphi_a = 0,$ $0 < \varphi_b < 0.12$	Frontera
Caso 5:	$0 < \varphi_a < 0.005,$ $0 < \varphi_b < 0.12$	Interior
Caso 6:	$\varphi_a = 0.005,$ $0 < \varphi_b < 0.12$	Frontera
Caso 7:	$\varphi_a = 0.005,$ $\varphi_b = 0$	Esquina
Caso 8:	$0 < \varphi_a < 0.005,$ $\varphi_b = 0.12$	Frontera
Caso 9:	$\varphi_a = 0.005,$ $\varphi_b = 0.12$	Esquina

# APÉNDICE D

## PROGRAMAS EN MATLAB

En este apéndice se presentan los programas utilizados para efectuar este proyecto.

### PROGRAMAS ESCRITOS EN MATLAB UTILIZADOS EN EL CAPÍTULO 4, FLUJO DE CALOR CONSTANTE.

#### CASO #1

##### Programa #1. Cálculo de las propiedades

---

```
clear;clc;
%-----Propiedades-----
%-----Densidad-----
RHOcnt = 2100; %Fijo
RHOmpcm = 0857; %Fijo
RHObf = 1000; %Fijo
%----Conductividad----
Kbf = 0.616; %Fijo
Kmpcm = 0.152; %Fijo
Kcnt = 11 ; %Fijo
%---Calor Específico---
CPbf = 4179 ; %Fijo
CPcnt = 0485 ; %Fijo
CPmpcm = 2180 ; %Fijo
Lmpcm = 185000; %Fijo
e = 1 ; %fijo
DeltT = 5 ; %Posible Cambio
%-----Viscosidad-----
Ubf = 0.00089; %Posible Cambio
CUcnt = 120; %Posible Cambio
CUmpcm = 15; %Posible Cambio

%---Densidad-----
for i=1:1:21
    PHICnt(i) = 0.001*(i-1);
    for j=1:1:21
        PHImpcm(j) = 0.006*(j-1);
        PHIBf(i,j) = 1-PHICnt(i)-PHImpcm(j);
        RHO_eff(i,j) =PHIBf(i,j)*RHObf+ ...
            PHICnt(i)*RHOcnt+PHImpcm(j)*RHOmpcm;
    end
end
```



```

end
%----Conductividad-----
a = ones(21,1);
PHIcnt = (a*PHIcnt)';
PHImpcm = a*PHImpcm;
K_eff = PHIBf.*Kbf + PHIcnt.*Kcnt + PHImpcm.*Kmpcm;
%----Calor Específico-----
a = RHOcnt .*PHIcnt .*CPcnt;
b = RHOmpcm.*PHImpcm.*CPmpcm;
c = RHObf .*PHIBf .*CPbf;
d = RHOmpcm.*PHImpcm.*Lmpcm ./ DeltT;
CP_eff = (a+b+c+d)./RHO_eff;
%----Viscosidad-----
U_eff = Ubf.*(1 + CUcnt.*PHIcnt+ CUmpcm.*PHImpcm);

```

---

## Programa #2. Cálculo de resultados (Ej. la entropía)

---

```

Re_lam = 2000;    %No variar por tu bien
Re_tur = 10000;  %No variar por tu bien
T      = 300;    %Posible Cambio

D = 0.001;    %Diámetro del tubo
for i=1:1:1
D = D;
DD(i)=D.*10;
q = 1000;    %Flujo de calor por unidad de área

m_H2O_lam = pi*U_eff(1,1)*D*Re_lam/4;
m_H2O_tur = pi*U_eff(1,1)*D*Re_tur/4;

m_eff_lam = CP_eff(1,1).*m_H2O_lam./CP_eff;
m_eff_tur = CP_eff(1,1).*m_H2O_tur./CP_eff;

Q1 = m_eff_lam./RHO_eff;
Q2 = m_eff_tur./RHO_eff;

%Entropia para flujo Laminar
A = 11.*(q.^2).*pi.*(D.^2)./(48.*(T.^2).*K_eff);
B = 128.*(Q1.^2).*U_eff./(pi.*T.*(D.^4));
S_lam = A + B;

figure
subplot(1,2,1)
hold on; grid on;
view(-45,20);
surf([0.01,0.01;0,0],[0.01,0;0.01,0],[0,0;0,0]);
surf(PHIcnt,PHImpcm,S_lam/S_lam(1,1));
xlabel('Phi MWCNT');ylabel('Phi MPCM');zlabel('Laminar entropy
generation rate ratio');

%Entropía para flujo Turbulento
a = 4.*m_eff_tur./(pi.*D);
C1 = 43.478.*(q.^2).*pi.*(D.^2)./(a.^0.8);

```

```

C2 = 2.528.*(m_eff_tur.^3).*(a.^-0.25)./((pi.^2).*(D.^5));
b = C1.*(U_eff.^0.15)./((T.^2).*(K_eff.^0.6).*(CP_eff.^0.4));
c = C2./(T.*(RHO_eff.^2));
S_tur = (U_eff.^0.25).*(b+c);

subplot(1,2,2)
hold on;grid on;
view(-45,10);
surf([0.01,0.01;0,0],[0.01,0;0.01,0],[0,0;0,0]);
surf(PHIcnt,PHImpcm,S_tur/S_tur(1,1));
xlabel('Phi MWCNT');ylabel('PhiMPCM');zlabel('Turbulent entropy
generation rate ratio');
end

```

---

## CASO #2

### Programa #1. Cálculo de las propiedades

---

```

clear;clc;
%-----Propiedades-----
%-----Densidad-----
RHOcnt = 2100; %Fijo
RHOmpcm = 0857; %Fijo
RHObf = 1000; %Fijo
%----Conductividad----
Kbf = 0.616; %Fijo
Kmpcm = 0.152; %Fijo
Kcnt = 11 ; %Fijo
%---Calor Específico---
CPbf = 4179 ; %Fijo
CPcnt = 0485 ; %Fijo
CPmpcm = 2180 ; %Fijo
Lmpcm = 185000; %Fijo
e = 1 ; %fijo
DeltT = 5 ; %Posible Cambio
%-----Viscosidad-----
Ubf = 0.00089; %Posible Cambio
UCcnt = 120; %Posible Cambio
CUmpcm = 15; %Posible Cambio

%-----Densidad-----
for i=1:1:21
    PHIcnt(i) = 0.001*(i-1);
    for j=1:1:21
        PHImpcm(j) = 0.006*(j-1);
        PHIbf(i,j) = 1-PHIcnt(i)-PHImpcm(j);
    RHO_eff(i,j) = PHIbf(i,j)*RHObf+PHIcnt(i)*RHOcnt+PHImpcm(j)*RHOmpcm;
    end
end
%----Conductividad-----
a = ones(21,1);

```

```

PHIcnt = (a*PHIcnt)';
PHImpcm = a*PHImpcm;
K_eff = PHIfb.*Kbf + PHIcnt.*Kcnt + PHImpcm.*Kmpcm;
%----Calor Específico-----
a = RHOcnt .*PHIcnt .*CPcnt;
b = RHOmpcm.*PHImpcm.*CPmpcm;
c = RHObf .*PHIfb .*CPbf;
d = RHOmpcm.*PHImpcm.*Lmpcm ./ DeltT;
CP_eff = (a+b+c+d)./RHO_eff;
%-----Viscosidad-----
U_eff = Ubf.*(1 + CUcnt.*PHIcnt+ CUmpcm.*PHImpcm);

```

---

## Programa #2. Cálculo de resultados (Ej. la entropía)

---

```

clc;

Nu = 4.36;      %[#] Fijo para flujo de calor const
T = 300;       %[°C] Temp de entrada, 27°C (Variable)
q = 1000;      %[W/m2] Flujo de calor/area (Variable)
m_bf = 0.01;   %[Kg/s] Caudal másico (Variable)

m_eff = CP_eff(1,1).*m_bf./CP_eff;
m_eff = m_bf;

%-----Diámetro Óptimo-----
a=(m_eff./q).^2;
b=(1012.*U_eff.*K_eff.*T.*Nu.*a)./(pi^2).*RHO_eff.^2);
D = nthroot(b,6);
%-----
Re=4.*m_eff./(pi.*U_eff.*D);

%-----Entropía para flujo Laminar-----
A = pi.*(q.^2).*(D.^2)./(K_eff.*Nu.*(T.^2));
B = 512.*U_eff.*(m_eff.^2)./(pi.*T.*(RHO_eff.^2).*(D.^4));
S_lam = A + B;

figure
subplot(1,2,1)
hold on; grid on;
view(-45,20);
surf(PHIcnt,PHImpcm,A);
xlabel('Phi MWCNT');ylabel('Phi MPCM');zlabel('Heat Transfer entropy
generation');

subplot(1,2,2)
hold on; grid on;
view(-45,20);
surf(PHIcnt,PHImpcm,B);
xlabel('Phi MWCNT');ylabel('Phi MPCM');zlabel('Friction entropy
generation');

figure
hold on; grid on;

```

```

view(-45,20);
surf(PHIcnt,PHImpcm,S_lam);
xlabel('Phi MWCNT');ylabel('Phi MPCM');zlabel('Laminar entropy
generation');

```

---

## PROGRAMAS ESCRITOS EN MATLAB UTILIZADOS EN EL CAPÍTULO 5, TEMPERATURA DE PARED CONSTANTE.

### CASO #1

#### Programa #1. Función generadora de resultados

---

```

function [Sgen,Sgen1,Sgen2,f,Nu,Pr,Re,St,meff,Ec,L,y,h,Pot] =
entropiagenTempConst02(Rho,K,C,u,PhiA)
PhiA=[0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8 3 3.2
3.4 3.6 3.8 4]/400;
Phib=[0 1.2 2.4 3.6 4.8 6 7.2 8.4 9.6 10.8 12 13.2 14.4 15.6 16.8 18
19.2 20.4 21.6 22.8 24]/100;
D=2*0.0254; %Diámetro de la tubería
n=5; %n Veces 120000BTU/hr o 10 Ton de
refrigeración
Ql=120000*n/3.4121; %Carga de refrigeración
Tw=301; %K Temperatura de pared Tw=28°C
Ti=311; %K Temperatura media de entrada Ti=38°C
DT=5; %K Variación de temperatura media
m=Ql/(C(1,1)*DT); %kg/seg Flujo másico de agua
% Reagua=4/(3.1415*D*u(1,1))*m
%meff=(3.1415*D*Reagua/4).*u;
meff=(C(1,1)./C)*m; %kg/seg Flujo másico efectivo
t=(Ti-Tw)/Tw; %Thao
Pr=(C.*u)./K; %Prandtl
Re=4*meff./(pi*D*u); %Reynolds
U=4*meff./(Rho*pi*D^2); %Velocidad media
Ec=(U^2).(C.*Tw); %Eckert
w=length(Ql);
%Temperatura de Pared Constante
%Laminar(l)..... Re<3000
%Turbulento(t)..... 3000<=Re<=5000000
p=length(PhiA);
q=length(Phib);
for r=1:p;
for e=1:q;
if Re(r,e)<1000
Nu(r,e)=3.66;
f(r,e)=64./Re(r,e);
else
f(r,e)=(0.790.*log(Re(r,e))-1.64).^(-2);
Nu(r,e)=((f(r,e)/8).*(Re(r,e)-1000).*Pr(r,e))./(1+12.7.*(-
1+Pr(r,e).^(2/3)).*(f(r,e)/8).^(1/2)));

```

```

end
end
end
h=(K./D).*Nu;
St=h./(Rho.*U.*C);
L=- (D./ (4*St)).*log(1-(Ql./ (meff.*C*(Ti-Tw)))); %L=120; %m
Longitud de GHP
y=L/D;%Lambda
Pot=(f.*meff.*(U^2).*L./(2*D))*(0.0013410220888);
Sgen1=meff.*C.*(log((1-t.*exp(-4*St.*y))./(1-t))-t.*(1-exp(-
4*St.*y)));
Sgen2=meff.*C.*(f./8).*(Ec./St).*log((exp(4*St.*y)-t)./(1-t));
Sgen=Sgen1+Sgen2;
[X,Y]=meshgrid(Phia*PhiA,Phib*(1-PhiA));
%subplot(1,2,1)
surf(X,Y,Sgen)
xlabel('Phi MWCNT');ylabel('PhiMPCM');zlabel('Entropy generation
[W/K]');title('Cooling Load = 176 KW');
%subplot(1,2,2)
%surf(X,Y,Pot)
%xlabel('Phi MWCNT');ylabel('PhiMPCM');zlabel('Pumping Power
[HP]');title('Cooling Load Ql = 176 KW');
figure
close
end

```

---

## Programa #2. Cálculo de propiedades y parámetros iniciales

```

%Densidad
Rhoa=2100;%input('densidad MWCNT');
RhoB=815;%input('densidad MPCM');
RhoC=1000;%input('densidad Agua');
Phia=[0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8 3 3.2
3.4 3.6 3.8 4]/400;
Phib=[0 1.2 2.4 3.6 4.8 6 7.2 8.4 9.6 10.8 12 13.2 14.4 15.6 16.8 18
19.2 20.4 21.6 22.8 24]/100;
PhiA=0.5;%input('ingrese fracción volumétrica de nano-fluido en el
blend');
%Calor específico
Ca=485;%input('calor específico MWCNT');
Cb=2460;%input('calor específico MPCM');
Cc=4179;%input('calor específico Agua');
e=1;%input('Porcentaje de cambio de fase');
Lambda=185000;%input('calor latente MPCM');
DT=5;%input('Cambio de temperatura');
%Conductividad térmica
Ka=80;%input('conductividad térmica MWCNT');
L=20.2*10^-6;%input('Longitud promedio MWCNT Kalpana');
D=80*10^-9;%input('Diámetro promedio MWCNT Kalpana');
Kb=0.150;%input('conductividad térmica MPCM');
Kc=0.616;%input('conductividad térmica Agua');
%Viscosidad
uC=(8.9*10^-4);%input('viscosidad del Agua');

```

```

%-----%
p=length(Phia);
q=length(Phib);
for m=1:p;
for n=1:q;
RhoA(m)=Rhoa*Phia(m)+Rhoc*(1-Phia(m));
RhoB(n)=Rhob*Phib(n)+Rhoc*(1-Phib(n));
XA(n,m)=RhoA(m)/(RhoA(m)+(1-Phia)/Phia)*RhoB(n);
Rho(n,m)=RhoA(m)*Phia+RhoB(n)*(1-Phia);
C(n,m)=(1/Rho(n,m))*(Rhoa*Phia(m)*Phia*Ca+Rhob*Phib(n)*(1-
Phia)*Cb+Rhoc*(1-Phia(m)*Phia-Phib(n)*(1-
Phia))*Cc+e*Rhob*Phib(n)*(1-Phia)*Lambda/DT);
E=((1.5*(D^2)*L)^(2/3))/(D*L+0.5*D^2);%Esfericidad
%KA(m)=Kc*((Ka+(3/E-1)*Kc-(3/E-1)*Phia(m)*(Kc-Ka))/(Ka+(3/E-
1)*Kc+Phia(m)*(Kc-Ka)));
KA=Kc*(1+77.5*Phia);
KB(n)=Kc*((2*Kc+Kb+2*Phib(n)*(Kb-Kc))/(2*Kc+Kb-Phib(n)*(Kb-Kc)));
K(n,m)=XA(n,m)*KA(m)+(1-XA(n,m))*KB(n);

%Viscosidad
%Viscosidad Nano-fluido
%c(m)=0.6072*log(Phia(m)*100)+2.9589;%Viscosity of carbon
nanotubes (Franceses)
%c(1)=0
%PhiAA(m)=Phia(m)*c(m);
rp=L/D;
Phim=2/(0.321*rp+3.02);%rp=L/D(MWCNT)
uA(m)=uC*(1-Phia(m)/Phim)^(-2);
%Viscosidad Slurry
KK(n)=1+0.6*Phib(n);
uB(n)=uC*((1+0.5*KK(n)*Phib(n)-Phib(n))/(1-KK(n)*Phib(n))^2/(1-
Phib(n)));
%Viscosity Blend
vA(m)=uA(m)/RhoA(m)*10^6;
vB(n)=uB(n)/RhoB(n)*10^6;
xA(m)=RhoA(m)/(RhoA(m)+(1-0.5)/0.5)*RhoB(n);
xB(n)=RhoB(n)/(RhoB(n)+(1-0.5)/0.5)*RhoA(m);
VBIA(m)=14.534*log(log(vA(m)+0.8))+10.975;
VBIB(n)=14.534*log(log(vB(n)+0.8))+10.975;
VBI(n,m)=(xA(m)*VBIA(m)+(xB(n)*VBIB(n)));
v(n,m)=(exp(exp((VBI(n,m)-10.975)/14.534))-0.8)*(10^(-6));
u(n,m)=v(n,m)*Rho(n,m);

end
end
figure('Color',[1 1 1]);
[Sgen,Sgen1,Sgen2,f,Nu,Pr,Re,St,meff,Ec,L,y,h,Pot]=
entropiagenTempConst02(Rho,K,C,u,Phia);

```

---

## CASO #2

### Programa #1. Cálculo de propiedades y parámetros iniciales

---

```
clc
clear all
%Densidad
Rhoa=2100;%input('densidad MWCNT');
Rhob=815;%input('densidad MPCM');
Rhoc=1000;%input('densidad Agua');
Phia=[0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8 3 3.2
3.4 3.6 3.8 4]/400;
Phib=[0 1.2 2.4 3.6 4.8 6 7.2 8.4 9.6 10.8 12 13.2 14.4 15.6 16.8 18
19.2 20.4 21.6 22.8 24]/100;
PhiA=0.5;%input('ingrese fracción volumétrica de nano-fluido en el
blend');
%Calor específico
Ca=485;%input('calor específico MWCNT');
Cb=2460;%input('calor específico MPCM');
Cc=4179;%input('calor específico Agua');
e=1;%input('Porcentaje de cambio de fase');
Lambda=185000;%input('calor latente MPCM');
%Conductividad térmica
Ka=80;%input('conductividad térmica MWCNT');
Ln=20.2*10^-6;%input('Longitud promedio MWCNT Kalpana');
DD=80*10^-9;%input('Diámetro promedio MWCNT Kalpana');
Kb=0.150;%input('conductividad térmica MPCM');
Kc=0.616;%input('conductividad térmica Agua');
%Viscosidad
uC=(8.9*10^-4);%input('viscosidad del Agua');

%-----%
-----%
p=length(Phia);
q=length(Phib);
for m=1:p;
for n=1:q;
%Densidad
%Densidad del nano-fluido
RhoA(m)=Rhoa*Phia(m)+Rhoc*(1-Phia(m));
%Densidad del Slurry
RhoB(n)=Rhob*Phib(n)+Rhoc*(1-Phib(n));
Rho(n,m)=RhoA(m)*PhiA+RhoB(n)*(1-PhiA);
%Conductividad térmica
%Conductividad térmica de nano-fluido
XA(n,m)=RhoA(m)/(RhoA(m)+((1-PhiA)/PhiA)*RhoB(n));
KA(m)=(1+77.5*Phia(m))*Kc;
%Conductividad térmica del Slurry
KB(n)=Kc*((2*Kc+Kb+2*Phib(n)*(Kb-Kc))/(2*Kc+Kb-Phib(n)*(Kb-Kc)));
K(n,m)=XA(n,m)*KA(m)+(1-XA(n,m))*KB(n);
%Viscosidad
%Viscosidad Nano-fluido
rp=Ln/DD;
```

```

Phim=2/(0.321*rp+3.02); %rp=L/D(MWCNT)
uA(m)=uC*(1-Phia(m)/Phim)^(-2);
%Viscosidad Slurry
KK(n)=1+0.6*Phib(n);
uB(n)=uC*((1+0.5*KK(n)*Phib(n)-Phib(n))/(1-KK(n)*Phib(n))^2/(1-Phib(n)));
%Viscosity Blend
vA(m)=uA(m)/RhoA(m)*10^(6);
vB(n)=uB(n)/RhoB(n)*10^(6);
xA(m)=RhoA(m)/(RhoA(m)+(1-0.5)/0.5*RhoB(n));
xB(n)=RhoB(n)/(RhoB(n)+(1-0.5)/0.5*RhoA(m));
VBIA(m)=14.534*log(log(vA(m)+0.8))+10.975;
VBIB(n)=14.534*log(log(vB(n)+0.8))+10.975;
VBI(n,m)=(xA(m)*VBIA(m)+(xB(n)*VBIB(n)));
v(n,m)=(exp(exp((VBI(n,m)-10.975)/14.534))-0.8)*(10^(-6));
u(n,m)=v(n,m)*Rho(n,m);
end
end
format long
[Sgen,Sgen1,Sgen2,f,Nu,Pr,Re,St,meff,Ec,y,h,DT,C,U,Tw,Ti,T,Q] =
potencia(Phia,Phib,Rho,K,u,PhiA,Rhoa,Ca,Cb,Rhob,Rhoc,e,Cc,Lambda);

```

---

## Programa #2. Función generadora de resultados

---

```

function
[Sgen,Sgen1,Sgen2,f,Nu,Pr,Re,St,meff,Ec,y,h,DT,C,U,Tw,Ti,T,Q] =
potencia(Phia,Phib,Rho,K,u,PhiA,Rhoa,Ca,Cb,Rhob,Rhoc,ee,Cc,Lambda)
L=5; %input('Ingrese longitud de tubería
en metros');
D=(1)*0.0254; %input('Ingrese Diámetro de tubería
en metros');
P=100; %input('Ingrese Potencia de bombeo');
Tw=301; %K Temperatura de pared Tw=28°C
Ti=311; %K Temperatura media de entrada
Ti=38°C
p=length(Phia);
q=length(Phib);
for mm=1:p;
for nn=1:q;
meff(nn,mm)=fzero(@(m)
(8*L*(m^3)*((1/(0.790*log(4*m/(pi*D*u(nn,mm)))-
1.64))^2)/((pi*Rho(nn,mm))^2*D^5))-P,5);
Re(nn,mm)=4*meff(nn,mm)/(pi*D*u(nn,mm));
f(nn,mm)=(0.790*log(Re(nn,mm))-1.64)^(-2);
beta=1;
To=300;
while beta==1;
C(nn,mm)=(1/Rho(nn,mm))*(Rhoa*Phia(mm)*PhiA*Ca+Rhob*Phib(nn)*(1-

```



```

PhiA)*Cb+Rhoc*(1-PhiA(mm)*PhiA-Phib(nn)*(1-
PhiA))*Cc+ee*Rhob*Phib(nn)*(1-PhiA)*Lambda/(Ti-To));
Pr(nn,mm)=(C(nn,mm)*u(nn,mm))/K(nn,mm);
%Prandtl
U(nn,mm)=4*meff(nn,mm)/(Rho(nn,mm)*pi*D^2);
%Velocidad media
Ec(nn,mm)=(U(nn,mm))^2/(C(nn,mm)*Tw);
%Eckert
Nu(nn,mm)=(f(nn,mm)/8)*(Re(nn,mm)-
1000)*Pr(nn,mm)/(1+12.7*(-1+(Pr(nn,mm))^(2/3))*(f(nn,mm)/8)^(1/2));
h(nn,mm)=(K(nn,mm)/D)*Nu(nn,mm);
St(nn,mm)=h(nn,mm)/(Rho(nn,mm)*U(nn,mm)*C(nn,mm));
T(nn,mm)=Tw-((Tw-Ti)*exp(-(4*L/D)*St(nn,mm)));
if abs(To-T(nn,mm))>0.01
    To=To+0.01;
else beta=0;
end
end
end
end
DT=Ti-T;
Q=meff.*C.*DT;
t=(Ti-Tw)/Tw; %Thao
y=L/D; %Lambda
Sgen1=meff.*C.*(log((1-t.*exp(-4*St.*y))/(1-t))-t.*(1-exp(-
4*St.*y)))/(meff.*C.*(1-exp(-4*St.*y)));
Sgen2=meff.*C.*(f./8)*(Ec./St).*log((exp(4*St.*y)-t)/(1-
t))/(meff.*C.*(1-exp(-4*St.*y)));
Sgen=Sgen1+Sgen2;
[X,Y]=meshgrid(Phia*PhiA,Phib*(1-PhiA));
subplot(1,2,1)
surfc(X,Y,Sgen1)
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi MPCM');zlabel('Entropy generation
by heat transfer [W/K]');title('Entropy Generation by Heat
Transfer');
subplot(1,2,2)
surfc(X,Y,Sgen2)
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi MPCM');zlabel('Entropy generation
by friction [W/K]');title('Entropy Generation by Friction');
figure
surfc(X,Y,Sgen./(Q/(Ti-Tw)))
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi MPCM');zlabel('Dimensionless
Entropy generation');title('Dimensionless Entropy generation');
figure
surfc(X,Y,Nu)
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi MPCM');zlabel('Nu');title('Nusselt
Number');
figure
surfc(X,Y,St)
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi MPCM');zlabel('St');title('Stanton
Number');
figure
surfc(X,Y,Ec.*f./St)

```

```
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi  
MPCM');zlabel('Ec.*f./St');title('Ec.*f./St');  
figure  
surf(X,Y,meff)  
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi MPCM');zlabel('meff');title('Mass  
flow');  
figure  
surf(X,Y,Pr)  
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi MPCM');zlabel('Pr');title('Prandtl  
Number');  
figure  
surf(X,Y,DT)  
xlabel('\phi MWCNT');ylabel('\phi  
MPCM');zlabel('DT');title('Temperature Variation');  
end
```

## BIBLIOGRAFÍA

- 1 Choi, S.U.S. 1995. "Enhancing Thermal Conductivity of Fluids with Nanoparticles," American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division (FED) 231.
- 2 Buongiorno, J. and Zhou, S.Q. 2009. "A Benchmark Study on the Thermal Conductivity of Nanofluids," Journal of Applied Physics, 106(094312) pp.1-14
- 3 A. Bejan "Entropy generation through Heat and Fluid Flow", Wiley, New York, 1982.
- 4 Eastman JA, Choi SUS, Li S, Yu W, Thompson LJ. Anomalously increased effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles. Journal of Applied Physics 2001; 78:718-20.
- 5 Mulligan, J.C., Colvin, D.P. and Bryant, Y.G. 1996. "Microencapsulated Phase-Change Material Suspensions for Heat Transfer in Spacecraft Thermal Systems," Journal of Spacecraft and Rockets 33(2), pp. 278-284.
- 6 Yamagishi, Y., Takeuchi, H., Pyatenko, A.T. and Kayukawa, N.1999. "Characteristics of Microencapsulated PCM Slurry as a Heat-Transfer Fluid," AIChE Journal 45(4), pp. 696-707.

- 7** Thermal properties of nanofluids John Philip, P.D. Shima 1 SMARTS, Metallurgy and Materials Group, India Gandhi Center for Atomic Research, Kalpakkam –603102, India
- 8** Zalba, B, Marín, J. M., Cabeza, L.F. and Mehling, H. 2002. “Review on Thermal Energy Storage with Phase Change: Materials, Heat Transfer Analysis and Applications,” *Applied Thermal Engineering*, 23(3), pp. 251-283
- 9** Alvarado, J. L., Marsh, C., Sohn, C., Vilceus, M., Hock, V., Phetteplace, G., and Newell, T. 2006. “Characterization of Supercooling Suppression of Microencapsulated Phase Change Material by Using DSC,” *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 86(2), pp. 505–509.
- 10** Alvarado, J.L., Marsh, C., Sohn, C., Phetteplace, G., and Newell, T. 2007. “Thermal Performance of Microencapsulated Phase Change Material Slurry in Turbulent Flow under Constant Heat Flux,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(9), pp. 1938–1952.
- 11** L.C. Chow et al, Jet impingement and spray cooling using slurry of nanoencapsulated phase change materials
- 12** G.H. Zhang a y C.Y. Zhao, “Thermal and rheological properties of micro encapsulated phase change materials”, *Renewable Energy* 36 (2011) 2959-2966
- 13** Das, S K., Choi, S. U. S., and Patel, H.E. 2006. “Heat Transfer in Nanofluids—A Review,” *Heat Transfer Engineering*, 27(10), pp. 3-19.

- 14** Wang, X.Q. and Mujumdar, A.S. 2008. "A Review on Nanofluids - Part II: Experiments and Applications," *Brazilian Journal of Chemical Engineering* 25(4), pp. 631 – 648
- 15** Aida Nasiria, Mojtaba Shariaty-Niasara, Alimorad Rashidib, "Effect of dispersion method on thermal conductivity and stability of nanofluidos", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 35, Issue 4, 2011, pp 717–723
- 16** P. Garg, J.L. Alvarado, Ch. Marsh, T.A. Carlson, D.A. Kessler, K. Annamalai, An experimental study on the effect of ultrasonication on viscosity and heat transfer performance of multi-wall carbon nanotube-based aqueous nanofluids, *Int. J. Heat Mass Transfer* 52 (2009) 5090–5101.
- 17** Martel, R., Derycke, V., Lavoie, C., Appenzellar, J., Chan, K.K., Tersoff, J. and Avouris, P., 2001, "Ambipolar Electrical Transport in Semiconducting Single-Wall Carbon Nanotubes," *Physical Review Letters* **87** (25), pp. 256805-1-4.
- 18** Assael, M. J., Chen, C.-F., Metaxa, I., and Wakeham, W. A. 2004. "Thermal Conductivity of Suspensions of Carbon Nanotubes in Water," *International Journal of Thermophysics*, 25(4), pp. 971-985
- 19** Wen, D., and Ding, Y. 2004. "Effective Thermal Conductivity of Aqueous Suspensions of Carbon Nanotubes (Carbon Nanotube Nanofluids)," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 18(4), pp. 481-485.

- 20** Xie, H., Lee, H., Youn, W., and Choi, M. 2003. "Nanofluids Containing Multiwalled Carbon Nanotubes and Their Enhanced Thermal Conductivities," *Journal of Applied Physics*. **94**(8), pp. 4967-4971.
- 21** M. Corcione et al. "Optimization of laminar pipe flow using nanoparticle liquid suspensions for cooling applications", *Applied Thermal Engineering* 50 (2013) pp. 857-867
- 22** Buongiorno, J. and Zhou, S.Q. 2009. "A Benchmark Study on the Thermal Conductivity of Nanofluids," *Journal of Applied Physics*, **106** pp. 1-14
- 23** G.H. Zhang y C.Y. Zhao, "Thermal property investigation of aqueous suspensions of microencapsulated phase change material and carbon nanotubes as a novel heat transfer fluid", *Renewable Energy* 60 (2013) 433-438.
- 24** H. Taherian y J. L. Alvarado, "System Analysis of MPCM Slurry Enhanced with Carbon Nanotubes as Heat Transfer Fluid" ASHRAE annual conference (2010) Volume 116, Part 2.
- 25** Alvarado et Al 2008 "Characterization of thermal properties and Heat Transfer Behavior of Microencapsulated Phase Change Material Slurry and Multiwall Carbon Nanotubes in Aqueous Suspension", ASME International Mechanical Engineering Congress and exposition (2007) Volume 8 p177-1778, 2008.
- 26** Vajjha, R.S., D.K. Das, and B.M. Mahagaonkar. 2009. Density measurement of different nanofluids and their comparison with theory. *Petroleum Science and Technology* 27:612–624.

- 27** Chen, B., X. Wang, R Zeng, Y. Zhang, X. Wang, J. Niu, Y. Li, and H. Di. 2008. An experimental study of convective heat transfer with microencapsulated phase change material suspension: Laminar flow in a circular tube under constant heat flux. *Experimental Thermal and Fluid Science* 32:1638-1646.
- 28** Maxwell, J.C., 1954. *A treatise on electricity and magnetism*, 3rd ed., vol. 1, pp. 440-441, Dover, New York.
- 29** John Philip, P.D., Thermal properties of nanofluids. *Advances in Colloid and Interface Science* 183–184, pp. 30–45, 2012.
- 30** Hamilton, R., and Crosser, O., Thermal Conductivity of Heterogeneous Two-Component Systems. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1(3) pp. 187-191, 1962.
- 31** Prasher R, Phelan PE, Bhattacharya P. “*Effect of Aggregation Kinetics on the Thermal Conductivity of Nanoscale Colloidal Solutions (Nanofluid)*”. *Nano Lett* 2006;6 :15 29-34.
- 32** Halelfadl, S., Maré, T., Estellé, P., Efficiency of carbon nanotubes water based nanofluids as coolants. *Experimental Thermal and Fluid Science* 53, pp. 104–110, 2014.
- 33** Maloka, I.E. 2007. Thermal conductivities of liquid mixtures. *Petroleum Science and Technology* 25:1065-1072.
- 34** Toda, K., and Furuse, H., Extension of Einstein's Viscosity Equation to that for Concentrated Dispersions of Solutes and Particles. *Journal of Bioscience and Bioengineering*, 102(6) pp. 524-528, 2006.

- 35** Mueller, S., Llewellyn, E., and Mader, H., The Rheology of Suspensions of Solid Particles. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science, 466(2116) pp. 1201-1228, 2010.
- 36** Wolthers, W., Duits, M., Van Den Ende, D., Shear History Dependence of the Viscosity of Aggregated Colloidal Dispersions. Journal of Rheology (1978-Present), 40(5) pp. 799-811, 1996.
- 37** Maples, R.E. 1993. Petroleum refinery process economics, pp. 312-313, PennWell Publishing Company, Tulsa, Oklahoma
- 38** Termodinámica Básica y Aplicada, Isidoro Martinez, 1992, DOSSAT S.A.
- 39** J. Gibbs, "On the equilibrium of Heterogeneous Substances", 1953.
- 40** E. Schmidt, "Technische maximale arbeit", 1953.
- 41** Z. Rant, "Exergie, Ein neues Wort für "technische Arbeitsfähigkeit".1956, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 22: 36–37.
- 42** Boyd, Stephen, and Lieven Vandenberghe. Convex optimization. Cambridge university press, 2009.
- 43** Dantzig, George B. Linear programming and extensions. Princeton university press, 1998.
- 44** Bertsekas, Dimitri P. "Constrained optimization and Lagrange multiplier methods." Computer Science and Applied Mathematics, Boston: Academic Press, 1982 1 (1982).
- 45** H. W. Kuhn. Nonlinear programming. A historical view. In R. W. Cottle and C. E. Lemke, editors, Nonlinear Programming, volume 9 of SIAM-AM Proceedings, pages 1–26. American Mathematical Society, 1976.



- 46 H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In J. Neyman, editor, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492. University of California Press, 1951.
- 47 Reinelt, Gerhard. *The linear ordering problem: algorithms and applications*. Vol. 8. Berlin: Heldermann, 1985.
- 48 F.W. Glover, M. Laguna. *Tabu Search*. Kluwer Academic Publishers. 1997.
- 49 J.M. Candy, John Wiley & Son. *Bayesian Signal Processing: classical, modern and Particle Filtering Approaches*. 2008. pdf.
- 50 Ahem, J.E. *The exergy Method of Energy Systems Analysis*. USA, John Wiley and Sons, Inc. 1980.
- 51 Brodyanski, M.V. Sorin & P. Le Goff. *The efficiency of Industrial Processes; Exergy Analysis and Optimization*. The Netherlands, Elsevier 1998.
- 52 “*Thermodynamics; An engineering approach*”, 6 ed, 2008, Y. A. Cengel M.A. Boles, Mc Graw hill.
- 53 El-Sayed, Y.M. *The thermo economics of Energy Conversion*. Hungary, Elsevier, 2003
- 54 T.J. Kotas, *The exergy method of thermal plant analysis*, Butterworths, London, 1985.
- 55 Bejan, G. Tsatsaronis, and M. Moran, *Thermal Design and Optimization*, Wiley, New York, 1996.

- 56** A.Bejan, *Entropy Generation Minimization*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- 57** A.Bejan, *Entropy Generation Minimization: The new thermodynamics of finite-size devices and finite time processes*. *J. Appl. Phys.* Vol. 79 Feb. 1, 1996, 1191-1218.
- 58** A. Bejan “*Entropy generation through Heat and Fluid Flow*”, Wiley, New York, 1982.
- 59** *Advanced Engineering thermodynamics*, 2d Ed, A. Bejan, Wiley, New York, 1997.
- 60** M.Thirumaleshwar, *Exergy Method of analysis and its application to a helium cryorefrigeration*, *Cryogenic*, Vol. 19, 1979, pp. 219-218.
- 61** A. Bejan, *Models of Power plants that generate minimum entropy while operating at maximum power*, *Am. J. Phys.*, Vol 64, 1996, pag 1054-1059
- 62** *Fundamentos de transferencia de calor y masa*, 4 ed., Frank P. Incropera, David C. De Wit, Prentice Hall, México 1991.
- 63** *Mecánica de Fluidos*, 4 ed, Frank White, F. M., WCB , 1999.
- 64** Şahin, A. Z., Entropy Generation in Turbulent Liquid Flow through a Smooth Duct Subjected to Constant Wall Temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43(8) pp. 1469-1478, 2000.
- 65** Kalpana Tumuluri, Jorge L. Alvarado, Hessam Taherian, Charles Marsh, Thermal performance of a novel heat transfer fluid containing multiwalled carbon nanotubes and microencapsulated phase change materials. *International journal of heat and mass transfer* 54, (2011), pp. 5554-5567.

