ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESCUELA DE GRADUADOS

TESIS DE GRADO

PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:

"MAGÍSTER EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA"

TEMA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA PROPUESTA PEDAGÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

AUTORES

RÉGULO BOLÍVAR VISCARRA LEÓN

MIGUEL ÁNGEL ANGULO LUNA

Guayaquil – Ecuador

AÑO

2012

DEDICATORIA

De Régulo:

A mis hijos: Régulo Javier, Iván Eduardo, Juan Carlos y a mi nieta Daniela Alejandra.

De Miguel:

A mis padres Faustina y Jesús que gracias a Dios me han infundido los valores que inspiran mi vida.

A todos mis hermanos y amigos por quienes ha valido la pena realizar este esfuerzo.

AGRADECIMIENTO

Nuestra completa gratitud a todas aquellas personas que hicieron posible este sueño.

A Dios, por habernos dado el milagro de la vida y nos cuida en todo instante.

A los directivos de la ESPOL por permitirnos ingresar al Instituto de Ciencias Matemáticas y darnos la oportunidad de cristalizar la ilusión, haciéndola realidad.

A los Docentes, profesionales natos, quienes con su gran profesionalismo y sapiencia han acompañado este proceso, ayudando en la construcción conjunta de nuevas oportunidades de actualización pedagógica.

A los compañeros, docentes, quienes han demostrado una calidez extraordinaria al compartir sus experiencias.

Al tutor, **M.Sc Jorge Medina Sancho**, verdadero orientador y motivador para poder culminar este proyecto de grado, dimensionando al docente en todas sus potencialidades didácticas.

DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este Proyecto de Graduación, así como el Patrimonio Intelectual del mismo, corresponde exclusivamente al **ICM (Instituto de Ciencias Matemáticas)** de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Lic. Régulo Bolívar Viscarra León

Ing. Miguel Ángel Angulo Luna

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

M.Sc. John Ramírez Figueroa
PRESIDENTE DE TRIBUNAL

M.Sc. Jorge Medina Sancho
DIRECTOR DE TESIS

MPC. Miriam Ramos Barberán
VOCAL DEL TRIBUNAL

AUTORES DEL PROYECTO DE GRADUACIÓN

Lic. Régulo Viscarra León

Ing. Miguel Angulo Luna

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

TÍTULOS **PÁG.**

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESCUELA DE GRADUADOS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

TEMA: "DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA PROPUESTA PEDAGÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS"

AUTORES: **Lcdo. Régulo Bolívar Viscarra León**
Ing. Miguel Ángel Angulo Luna

FECHA: **FEBRERO DE 2012**

RESUMEN

El presente proyecto cuyo título es "Diseño e implementación de una propuesta pedagógica para la enseñanza de funciones exponenciales y logarítmicas" consta de 5 capítulos en los que se van desarrollando, a partir del planteamiento del problema, todos los elementos que nos han encaminado a formular la propuesta, su implementación y aplicación; para finalizar haciendo un análisis de los resultados que arrojó la misma.

Al plantear el problema se puso en evidencia las falencias en el proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas. Con la metodología tradicional los estudiantes, en su mayoría, tan sólo se limitan a

adquirir un conocimiento superficial de estos temas, desentendiéndose del análisis, interpretación y aplicación de dichas funciones.
El marco teórico se orientó hacia la corriente constructivista, por ser la más adecuada para llegar eficientemente a los estudiantes; no sólo es necesario que el maestro haya hecho las construcciones mentales, es preciso que cada estudiante las realice. Autores como Vygotsky, Piaget, Ausubel han desarrollado abundantemente este enfoque pedagógico.

Esta propuesta que se desarrolla a través de talleres pedagógicos, al contrario de lo que se encuentra en diferentes textos que abordan el estudio de funciones exponenciales y logarítmicas como el desarrollo de un conjunto de ejercicios y problemas, pretende que en base a sus conocimientos previos los alumnos lleguen a construir una función que sirva como modelo matemático aplicable en la solución de problemas reales.

Al finalizar el taller se realizó una encuesta a los estudiantes, con la que se evaluó el impacto de la metodología; la que fue en términos generales muy favorable. Es necesario destacar el entusiasmo de los estudiantes al involucrarse en presentar propuestas de solución que ellos mismos construyeron en base a datos reales, además de la motivación adicional que proporcionó el uso de las TICs, que ayudó a mostrar de forma más evidente y atractiva sus propuestas de solución.

Palabras claves:

Función exponencial y logarítmica, Taller pedagógico, Constructivismo en las matemáticas.

SUPERIOR TECHNICAL SCHOOL OF LITORAL

INSTITUTE OF MATHEMATICS SCIENCE
GRADUATE SCHOOL

MASTERS IN EDUCATION WITH EMPHASIS ON MATHEMATICAL EDUCATION

THEME: DESIGNED AND IMPLEMENTATION OF A PEDAGOGY PROPOSAL FOR THE LEARNING AND FUNCTIONS OF EXPONENTIALS AND LOGARITHMIC.

AUTHORS: **Lic. Régulo Bolívar Viscarra León**
Eng. Miguel Ángel Angulo Luna

DATE: **FEBRUARY, 2012**

ABSTRACT

The current project "Designed and implementation of a pedagogy proposal for the learning of functions Exponentials and Logarithmic" consist of five chapters which focus on the problem statement. In addition, all the elements that guided the authors to formulate the proposal, implementation and application of the problem, lead them to analyze the results.

Once the problem was analyzed, the errors became evident in the process of teaching and learning the functions of exponentials and logarithmic. According to the current methodology, the majority of the students limit themselves to acquire superficial knowledge of themes, without taking into consideration of the analysis, interpretation and application of their functions.

The constructivist learning theory guided the theory section because it was the most adequate way to teach the students efficiently. Additionally, that is not only is it necessary for the teacher to evaluate the level of difficulty the students might have but also, it is necessary for the students to show an active participation in problem solving and critical thinking regarding their learning activity. Authors like Ausubel, Piaget, and Vygotsky, developed sufficient pedagogic information for our current understanding of constructivism.

Currently, this proposal is carried out in pedagogic workshops. The emphasis of the workshops are placed in the development of the students' critical thinking and their previous learning abilities in order to be able to construct a function that will allow students to use them in a mathematical problem applicable to real solutions.

At the end of the workshop, a survey was given to the students in order to evaluate the effectiveness of the methodology. The results were favorable. Additionally, the results also reveal the importance to emphasize the students' enthusiasm to provide solutions constructed, based on real data. Furthermore, in addition to the motivation that was provided along the usage of the TIC's, they both helped to demonstrate a more evident and attractive solution to the authors proposals.

Keywords:

Exponential and Logarithmic functions, pedagogy workshops, constructivist theory on mathematics.

INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo principal es que los estudiantes entiendan las matemáticas como una ciencia lógica y abstracta por excelencia; y al mismo tiempo construyan y utilicen modelos matemáticos adaptables a diferentes situaciones reales y verificables.

La presente investigación es una propuesta metodológica para la enseñanza de funciones exponenciales y logarítmicas, hemos escogido dicho tema porque en base a nuestra experiencia docente hay un vacío en la comprensión de las mismas; vacío que luego tendrá repercusiones negativas cuando el estudiante se enfrente a emprender su carrera universitaria.

Nuestra metodología propone una enseñanza con talleres basados en el paradigma constructivista, mediante el cual se muestra la aplicación de las matemáticas en la vida real y pone de manifiesto la importancia para los estudiantes de concretar sus conocimientos en saberes prácticos, lo cual, como hemos podido verificar, estimula su aprendizaje.

Consideramos también el uso de las TICs cuya incorporación no admite más postergaciones, con la gran ventaja de que los estudiantes se motivan con el uso de la tecnología.

Además debemos destacar el trabajo en grupo, que debe incorporarse como una práctica frecuente para que los estudiantes aporten en la solución de problemas, exponiendo cada uno sus puntos de vista y criterios, y al mismo tiempo aprendan a argumentar y conciliar con los otros integrantes.

Este estudio, aunque se centra en las funciones exponenciales y logarítmicas puede extenderse a diferentes modelos matemáticos y también a otras ciencias; esperamos que satisfagan las expectativas del lector o al menos dé inicio a futuros estudios que complementen nuestro aporte.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es conocido por los docentes que en los cursos preuniversitarios y en las universidades se ha detectado una serie de dificultades que tienen los estudiantes para resolver problemas de aplicación en general, y sobre funciones exponenciales y logarítmicas en particular.

Parece ser que los alumnos olvidaron o quizá cuando aprendieron lo hicieron en forma mecánica o superficialmente.

Estas dificultades se refieren a no habituarse o no querer seguir un procedimiento (hoja de ruta) que facilite una solución satisfactoria de la problemática planteada.

El estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas por lo general trae complicaciones para un alto porcentaje de estudiantes. Los alumnos no reciben una enseñanza o no adquieren un aprendizaje significativo, lo toman superficialmente, lo cual trae como consecuencia mayores dificultades en los siguientes capítulos o cuando tienen que enfrentar situaciones similares.

Este tema generalmente se estudia en segundo o tercer año de bachillerato general único, cuando los estudiantes tienen 16 o 17 años, en plena adolescencia, y se hace necesario que pasen del nivel de simplemente resolver una serie de ejercicios y problemas “modelo”, a solucionar problemáticas planteadas que obligan a realizar una lectura crítica, interpretación, resolución, graficación y toma de decisiones; es decir, llegar a los niveles de análisis y síntesis de la taxonomía de Bloom.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 GENERAL

Elaborar talleres pedagógicos, basados en el paradigma constructivista, que permita a los estudiantes de segundo o tercer año de bachillerato realizar un aprendizaje significativo, sólido y aplicable en la interpretación, análisis, graficación y solución de problemas relativos a funciones exponenciales y logarítmicas.

1.2.2 ESPECÍFICOS

1. Diagnosticar las causas del bajo rendimiento académico de los estudiantes en el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas.
2. Determinar y seleccionar las invariantes que tienen mayor importancia en la solución de problemas sobre funciones exponenciales y logarítmicas.
3. Diseñar una estrategia para solucionar eficientemente problemas con variación exponencial y logarítmica.
4. Analizar los resultados obtenidos en la aplicación de los talleres a los estudiantes.

1.3 JUSTIFICACIÓN

El estudio de este tema es básico para entender e interpretar la variación exponencial y logarítmica, el dominio y rango, las funciones inversas, las tendencias y las asíntotas.

Lo que se tratará en el presente proyecto constituirá una buena herramienta para el estudio exitoso de esta y otras funciones, ya que se pretende demostrar que los aspectos que se analizan forman la parte medular para obviar la problemática planteada.

La resolución de problemas reales con variación exponencial y logarítmica le da una alta dosis de significatividad al estudio de las Matemáticas y en particular a las funciones exponenciales y logarítmicas.

Por los años de experiencia en la enseñanza de este tema, consideramos que es nuestro deber contribuir con nuestros colegas y estudiantes con una estrategia para facilitar la comprensión, interpretación, resolución y razonamiento crítico (inferencial) de este tipo de problemas.

El estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas será más ameno y motivante para los estudiantes ya que tiene aplicación concreta en:

- Interés compuesto (monto compuesto).
- Crecimiento poblacional (personas, bacterias, procesos infecciosos, etc.).

- Decrecimiento radioactivo.
- Decrecimiento de sustancias (medicamentos) en nuestro organismo.
- Depreciación de vehículos, maquinarias, muebles, etc.
- Enfriamiento de un cuerpo.
- Intensidad del sonido.
- Iluminación.
- Publicidad, propaganda y crecimiento del rumor.

La idea es crear un modelo que combine entre otros aspectos las lecturas compresora, reflexiva, crítica e interpretativa con los gráficos, los resultados, con lo que se pueda inferir de ellos y aprovechar la tecnología y las TICs.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1 EL MODELO CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

¿La enseñanza de la matemática es algo empírico?

Está extraordinariamente extendida la idea de que enseñar es “fácil”, “cuestión de personalidad”, “de sentido común”, “de encontrar la receta adecuada”. Debemos terminar con esa práctica pedagógica de la mera transmisión, que concibe la enseñanza de la matemática como un producto ya elaborado que debe ser trasladado al estudiante mediante un discurso que “le saque de su ignorancia”.

No todas las personas que saben matemáticas pueden enseñarla o ser profesores de la materia; la renovación de la enseñanza de las matemáticas exige proveer de una teoría que facilite la intervención en los procesos de enseñanza-aprendizaje; los investigadores matemáticos ven con buenos ojos el constructivismo como una propuesta alterna a la forma tradicional conductista.

¿Qué es el constructivismo?

En pocas palabras es una manera de explicar cómo el ser humano, a lo largo de su historia personal, va desarrollando su intelecto y va conformando sus conocimientos.[1]

A continuación, desde la página 7 a la 12 se ha tomado un extracto del artículo “El modelo constructivista en la enseñanza de la matemática” obtenido de la web: http://es.scribd.com/doc/22331757/EL-MODELO-CONSTRUCTIVISTA-EN-LA-ENSENANZA-DE-LA-MATEMATICA.

[1] LARIOS OSORIO, V., “Constructivismo en tres patadas”, *Revista Gaceta COBAQ. Año XV, no. 132 (1998),* pp 10-13.

“El Modelo Constructivista hoy en día está jugando un papel integrador, tanto de las investigaciones en los diferentes aspectos de la enseñanza -aprendizaje de la matemática, como de las aportaciones procedentes del campo de la sociología, la epistemología y la psicología del aprendizaje.

De este modo, las propuestas constructivistas se han convertido en el eje de una transformación fundamental de la enseñanza de la matemática.

Sin embargo, no hay unificación de lo que significa el constructivismo en la enseñanza de la matemática; las raíces ambiguas del constructivismo se encuentran en la filosofía, la sociología y en la psicología.

Se distinguen dos tipos de constructivismo. El Constructivismo Radical, el cual tiene como fundamento La Teoría Piagetiana de la mente y el Constructivismo Social el cual tiene como base La Teoría Vigotskiana de la formación social de la mente.

El constructivismo radical y el constructivismo social tienen en común lo siguiente:

1. El conocimiento es construido por el que conoce; no se puede recibir pasivamente del entorno; es decir, el estudiante tiene necesariamente que participar activamente en la construcción de su aprendizaje.

2. El proceso de conocer es una acción de adaptación del sujeto al mundo de su propia experiencia. Por lo tanto, no es posible descubrir un mundo independiente y pre-existente afuera de la mente del que conoce.

El primer principio no es cuestionable. Es evidente que la bifurcación del constructivismo (en radical y social), surge del segundo principio y sus interpretaciones. Sobre todo, es obvio que lo primero que debemos abordar es, ¿qué se entiende por “proceso de adaptación al mundo de la experiencia”?

¿Cuáles son las visiones más influyentes de la corriente constructivista?

Lo primero que tenemos que hacer es analizar las visiones de Jean Piaget, Lev Vigotsky y David Ausubel, porque sus ideas han influido enormemente en la construcción de algunos principios de corte constructivista, que se manejan actualmente en la enseñanza de la matemática.

Jean Piaget, epistemólogo, psicólogo y biólogo suizo famoso por su teoría del desarrollo cognitivo.

Piaget distingue el aspecto psicosocial que abarca todo lo que el niño aprende por transmisión familiar, escolar o educativa y el desarrollo de la inteligencia, lo que el niño piensa y descubre por sí solo. El desarrollo del niño es un proceso que supone una duración.

La teoría de Piaget, no es educativa, sino psicológica y epistemológica, sus investigaciones se refieren a cómo evolucionan los esquemas del niño y sus conocimientos a lo largo de las distintas edades. Según Piaget, el sujeto construye su conocimiento a medida que interactúa con la realidad.

Se trata de un proceso de interacción sujeto - objeto, por medio de una acción transformadora, el niño reestructura sus esquemas cognitivos, pasando de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento, surge así una nueva estructura mental distinta de las anteriores, que las incluye. Cuando un objeto conoce, se adapta a la situación utilizando mecanismos de asimilación y acomodación.

En la asimilación, el individuo incorpora la nueva información haciéndola parte de su conocimiento; en la acomodación, transforma la información que ya poseía en función de lo nuevo. Esta relación entre acomodación y asimilación es interactiva y el resultado es la equilibración; el equilibrio entre las contradicciones que pudieran surgir entre los conocimientos previos y la nueva información. Para Piaget, el aprendizaje depende fundamentalmente del nivel del desarrollo cognitivo del sujeto.

Lev Vigotsky, psicólogo judío, destacado teórico de la psicología del desarrollo, fundador de la Psicología histórico-cultural.

Vigotsky afirma que el aprendizaje es un proceso constructivo interno, que la enseñanza debe entenderse como un conjunto de acciones dirigidas a favorecer ese proceso constructivo. Sostiene además que el aprendizaje es un motor del desarrollo cognitivo.

Introduce la noción de zona de desarrollo próximo (ZDP) en un intento de resolver los problemas de la PSICOLOGÍA de la educación. Define la ZDP como: "la distancia entre el nivel de desarrollo real del niño (resolución independiente de problemas) y el nivel más elevado de desarrollo potencial (resolución de problemas con la guía del adulto o en colaboración con sus compañeros más capacitados).

Vigotsky sostiene que hay una influencia permanente entre el aprendizaje y el desarrollo cognitivo, si un alumno tiene más oportunidades de aprender que otro, no sólo adquiere más información, sino que logrará un mejor desarrollo cognitivo.

El maestro ayuda a construir los conceptos actuando en la ZDP, indaga los conocimientos previos, establece puentes entre esos conocimientos previos y la nueva información, organiza los contenidos, elige las estrategias y las actividades, según el nivel madurativo de los alumnos y su motivación.

Vygotsky considera que el desarrollo cognitivo está condicionado por el aprendizaje, es decir que el desarrollo cognitivo puede mejorar con el aprendizaje.

Piaget, en cambio sostiene que lo que un niño puede aprender está determinado por el nivel de su desarrollo cognitivo. A partir de Vygotsky se valora la actividad social: el alumno aprende mejor cuando lo hace con sus compañeros.

David Ausubel, psicólogo y pedagogo estadounidense, una de las personalidades más importantes del constructivismo.

Ausubel agrega el concepto del aprendizaje significativo cuando el alumno puede relacionar los nuevos conocimientos con los que ya posee, es decir que el contenido del aprendizaje debe estar estructurado no sólo en sí mismo, sino con respecto al conocimiento que ya posee el sujeto que aprende.
Para Ausubel aprender es sinónimo de comprender, lo que se comprende es lo que se aprende y se podrá recordar mejor.

Los aportes de Ausubel consisten, fundamentalmente en considerar que la organización y la secuencia de los contenidos deben tener en cuenta los conocimientos previos del alumno. Ha tenido el mérito de mostrar que la transmisión de conocimientos por parte del profesor también puede ser un modo adecuado y eficaz de producir aprendizaje, si se tiene en cuenta los conocimientos previos del alumno y su capacidad de comprensión.

¿Por qué optar por el modelo constructivista?

Creemos que una opción constructivista para la educación matemática es una opción promisoria. Los principios constructivistas de la educación matemática exigen un trabajo arduo, integral, que involucre a maestros, formadores, diseñadores, gestores, autores, etc. en la tarea común de modificar nuestras concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje matemático y de actuar consecuentemente con estas. Actualmente muchas instituciones sobre todo a nivel superior trabajan con el ABP (aprendizaje basado en problemas), cuyo fundamento son los principios constructivistas que hemos visto.

¿Cuáles son las consecuencias de la implementación de un modelo constructivista en la enseñanza de matemáticas?

Para el estudiante:

La aplicación de la teoría constructivista, implica para el ESTUDIANTE, cambios muy significativos en el desempeño de su papel, pasaría a ser dinámico, cuestionador, analista, investigador, responsable y consciente, ya que se convierte en el agente principal que actúa para alcanzar los conocimientos.

Para el docente

Para el DOCENTE, llevar una pedagogía constructivista, le exige mayor entrega a su profesión, mayor responsabilidad, mayor conocimiento del estudiante y su entorno. Le exige una gran capacidad de aceptación y respeto por la opinión del otro, para confrontar, concertar, acordar y estructurar los conocimientos que integran tanto la versión de los estudiantes como la suya.

Su actitud requiere ser, cuestionadora, problemática, que lleve al estudiante a pensar y a responder a las situaciones que se presenten. El docente debe poseer mucha creatividad para construir situaciones didácticas, basándose en la cotidianidad del entorno, para presentarlas a los estudiantes, como punto de partida para que ellos las resuelvan; es decir, las procesen y las adicionen coherentemente a ese mundo de experiencia.

En relación a los textos

Los libros de texto son los medios didácticos que ofrecen al estudiante la situación problemática o novedosa. Teniendo en cuenta que el constructivismo, defiende las diferencias individuales, en la adquisición del conocimiento, es muy conveniente que LOS TEXTOS de matemáticas sean elaborados por los docentes del área, conocedores del contexto en que se desenvuelven los estudiantes, para tener así, unas situaciones problemáticas reales y coherentes con las necesidades de dicho contexto.

En relación al material didáctico

Los materiales didácticos son mediadores entre el objeto y el sujeto que permiten la representación y la visualización de relaciones y estructuras conceptuales, para proveer al estudiante de experiencias posibles. Actualmente es imperioso que el material didáctico incluya el uso de las TICs.

Constructivismo más allá de la teoría

El constructivismo matemático es muy coherente con la Pedagogía activa y se apoya en la PSICOLOGÍA genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da, todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales, cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie puede reemplazar; no existe una "tomografía" para ver el proceso de construcción mental del conocimiento.

Como teoría de la adquisición del conocimiento, el constructivismo no es una teoría de la enseñanza o de la instrucción. No existe una conexión necesaria entre cómo concibe uno que el conocimiento se adquiere y qué procedimientos ve uno como óptimos para lograr que esa adquisición ocurra. Las epistemologías son descriptivas, mientras que teorías de la enseñanza o de la instrucción deben ser teorías de la práctica."

2.2 DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN

2.2.1 LECTURA COMPRENSIVA

"¿Se puede resolver un problema de matemáticas o física si no se es capaz de comprender su enunciado? La comprensión lectora es quizás una de las habilidades que más infiere en el correcto proceso de aprendizaje de los niños y jóvenes, ya que poseerla es vital para el desarrollo de todas las áreas y materias de conocimiento en las distintas etapas educativas.

Esto no significa que los jóvenes de nuestro país tengan problemas para leer, entendida esta acción en su definición más simple, tal como recoge el Diccionario de la Real Academia Española: pasar la vista por lo escrito o impreso comprendiendo la significación de los caracteres empleados. El problema radica en la capacidad de comprender lo que se lee, una habilidad que implica, además de la comprensión de la significación de las palabras que se incluyen en un texto, la comprensión de este texto como un todo global, de modo que el lector sea capaz tanto de obtener información y elaborar una interpretación de ésta, como de reflexionar sobre su contenido." [2]

En el nivel primario y en menor medida en el nivel medio, a veces alcanza con una comprensión mínima y una buena memoria para lograr altas calificaciones, sobre todo si a ello se suman prolijidad y buena conducta. Pero no debemos engañarnos, a medida que accedemos al estudio de temáticas más complejas, una buena memoria no basta.

A continuación, desde la página 14 a la 16 se ha tomado un extracto del artículo "Lectura Comprensiva" obtenido de la página web: http://www.luventicus.org/articulos/02A001/lectura_comprensiva.html.

[2] Marta Vásquez – Reina, Mejorar la comprensión lectora, **http://www.consumer.es/web/es/educacion/extraescolar/2009/01/23/182909.php**

Pensar es relacionar

“Al pensar relacionamos conceptos, datos e informaciones, estableciendo entre ellos relaciones causales o comparaciones, clasificándolos, reuniéndolos bajo una explicación general que los engloba y los supera, etc. La memoria recolecta y almacena ese *stock* de conceptos y datos a partir de los cuales podemos recrear y pensar. Pero si nuestra agilidad, nuestra precisión lógica y nuestra creatividad se encuentran atrofiadas será muy poco lo que podremos hacer a partir de la riqueza de recursos que nos brinda nuestra buena memoria.

Leer comprensivamente es leer entendiendo a qué se refiere el autor con cada una de sus afirmaciones y cuáles son los nexos, las relaciones que unen dichas afirmaciones entre sí. Como todo texto dice más incluso que lo que el propio autor quiso decir conscientemente, a veces el lector puede descubrir nexos profundos de los que ni siquiera el propio autor se percató.

Podemos hablar entonces de distintos niveles de comprensión:

1. *Comprensión primaria*: es la comprensión de los "átomos" de sentido, de las afirmaciones simples. ¿Qué dice esta oración? En este nivel suele generar dificultades la falta de vocabulario. Simplemente no sabemos qué dice porque no sabemos el sentido de la/s palabra/s que emplea el autor. Esto se soluciona fácilmente recurriendo al diccionario. Como los conceptos son universales y no siempre responden a objetos representables gráficamente, el escaso desarrollo del pensamiento abstracto (al que un muchacho de 13 o 14 años ya debería haber arribado) puede ser el origen de la no comprensión de determinadas afirmaciones. (Nuestra "cultura de la imagen" y nuestra falta de lectura dificultan el paso del pensamiento concreto al abstracto.)

2. *Comprensión secundaria*: es la comprensión de los ejes argumentativos del autor, de sus afirmaciones principales, de sus fundamentos y de cómo se conectan las ideas. ¿Qué quiere decir el autor? En este nivel los fracasos pueden tener por causa la no distinción entre lo principal y lo secundario.

Es muy común que el lector se quede con el ejemplo y olvide la afirmación de carácter universal a la que éste venía a ejemplificar. También dificulta la comprensión secundaria la falta de agilidad en el pensamiento lógico. El lector debe captar los nexos que unen las afirmaciones más importantes del texto. Al hacerlo está recreando en su interior las relaciones pensadas por el propio autor. Esto supone en el lector el desarrollo del pensamiento lógico. Por lo tanto, un escaso desarrollo del pensamiento lógico dificultará o incluso impedirá la lectura comprensiva en este nivel (de allí la importancia del estudio de las Matemáticas y la ejercitación en la exposición teoremática).

3. *Comprensión profunda*: es la comprensión que supera el texto, llegando a captar las implicancias que el mismo tiene respecto del contexto en que fue escrito, del contexto en que es leído, y respecto de lo que "verdaderamente es" y/o de lo que "debe ser". ¿Qué más dice el texto? ¿Son correctas sus afirmaciones? Esta comprensión implica un conocimiento previo más vasto por parte del lector. Cuanto mayor sea el bagaje de conocimientos con el que el lector aborde el texto tanto más profunda podrá ser su comprensión del mismo. Pueden dificultar el pasaje al nivel profundo de comprensión la falta de cultura general o de conocimientos específicos (relacionados con la materia de la que trata el texto). También dificulta este paso la carencia de criterio personal y de espíritu crítico. Si a todo lo que leemos lo consideramos válido por el sólo hecho de estar escrito en un libro, no hemos llegado aún a este nivel de comprensión.

Para desarrollar la lectura comprensiva es aconsejable:

- Leer periódicamente (en lo posible todos los días), tanto libros de estudio como libros de literatura, revistas o diarios.
- Adquirir más vocabulario, ayudándose para ello con el diccionario (la misma lectura nutre de conceptos al lector sin que éste se dé cuenta de ello).

- Ejercitar el pensamiento lógico, ya sea mediante el estudio de la Lógica o la Matemática, los juegos de ingenio o la práctica del ajedrez (no por casualidad algunos países de Europa oriental tienen al ajedrez como materia en sus colegios).
- Ampliar la propia cultura general adquiriendo un conocimiento básico suficiente sobre la Historia y sus etapas, sobre la geografía del propio país y del mundo, sobre las distintas ideas políticas y religiosas, etc.
- Desarrollar el espíritu crítico definiendo la propia escala de valores y juzgando desde ella las afirmaciones de terceros."

2.2.2 OPINIÓN DE EXPERTOS SOBRE LA LECTURA COMPRENSIVA

1. Lcdo. Juan Manuel Quintana, Profesor de Lenguaje y Comunicación:

Para nadie es desconocido hoy en día la importancia significativa de este tema. En la base de toda educación está la lectura. Sin embargo ésta en la escuela tradicional se la ha venido practicando de manera mecánica, muchas veces sin tomar en cuenta la aplicabilidad de la misma en la vida cotidiana del estudiante.

Si un alumno no comprende lo que lee le será muy difícil entonces estudiar. Y esta actividad no sólo es competencia de la asignatura de Lenguaje y Comunicación. Deberá ejercérsela de manera transversal, es decir en todas las áreas (Estudios Sociales, Matemáticas, Ciencias Naturales, etc.). Imaginemos un discente leyendo un problema de matemáticas, si no tiene los rudimentos básicos de la lectura (fonológica por lo menos) es obvio que no podrá entender el problema ni cómo solucionarlo.

Esto empieza desde la decodificación de las palabras; poder entender su significado y mejor si se lo hace por contexto, es decir sin la necesidad de acudir al diccionario, más bien practicando esta destreza de observar las palabras que rodean a la desconocida e inferir su significado.

En la actualidad mucho se discute respecto de los índices de lectura en nuestro país, si leemos o no, sin embargo, la Internet es una herramienta disponible para la lectura, siempre y cuando la sepamos utilizar con criterio. Podemos apreciar que esto es un aliado del propósito de crear un país de lectores. Aunque tiene también sus aspectos negativos, porque si bien los chicos leen, hay que ver qué es lo que están leyendo, ya que la web trae de todo.

Una metodología sugerida para la lectura comprensiva son los seis niveles de lectura de los hermanos colombianos Zubiría Samper.

2. María Andrea Tamariz, Profesora de Lenguaje y Comunicación

La conexión entre Matemáticas y Lectura es motivo de profundas y constantes investigaciones en el campo pedagógico actual, lo que ha permitido echar abajo la concepción tradicional sobre el tema, que suponía que leer y pensar matemáticamente eran dos actividades no sólo distintas, sino además excluyentes.

Gracias al avance de las investigaciones sociales, hoy sabemos que tal propuesta es inadecuada. La comprensión lectora no sólo es necesaria para la comprensión matemática: es indispensable.

Al respecto, María Isabel Avilés, del Ceip Intelhorce, nos hace notar que: “Las Matemáticas requieren habilidades de razonamiento que vayan más lejos de la mera adquisición de destrezas mecánicas para operar con números. Pero estas habilidades, a veces, no se producen en los alumnos porque no llegan a comprender el contenido de los enunciados de los problemas, confundiendo los datos que intervienen en las operaciones, incorporando al planteamiento otros irrelevantes (…)”.

Esta es, por supuesto, la primera conexión que se suele encontrar entre la actividad matemática y la lectura: ¿Si el alumno no logra comprender el problema que se plantea en la consigna, cómo podrá proceder en el trabajo?

Sin embargo, a más de ésta, que es la conexión más evidente, es necesario que los profesores tengan claro que hay otros vínculos entre la lengua y las matemáticas. En este sentido, debemos recordar que la lengua es la primera forma que adquiere el pensamiento lógico; es la primera simbolización. De allí que el pensamiento lógico formal que expresan las matemáticas, no pueda manifestarse solamente a través de los números, sino que pueden entenderse también como razonamientos verbales.

Esta tal vez sea una de las razones por las que algunas recientes investigaciones pedagógicas llevadas adelante por universidades norteamericanas, parecen indicar que la comprensión lectora es un requisito previo para la comprensión matemática, independientemente de si el problema matemático que el alumno debe resolver lleva una consigna verbal o no. Parece ser que la capacidad para leer y comprender lo leído sería una condición intelectual previa para la comprensión del razonamiento matemático.

Por otro lado, como la ya citada María Isabel Avilés sostiene: “(…) al trabajar la comprensión lectora, y la expresión oral en Matemáticas, haciendo que el alumno/a verbalice el razonamiento empleado en la resolución de los problemas, su aprendizaje conecta con el de la Lengua adquiriendo mayor significación.”

Finalmente, debemos reconocer que esta reflexión contribuye a la visión del sujeto como un ser integral, en el que los distintos aspectos de su vida y sus diferentes habilidades están conectados entre sí.

A continuación, desde la página 19 a la 26 se ha tomado un extracto del artículo de las autoras Ana María Olazábal y Patricia Camarena, "Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto" obtenido de la página web: http://www.luventicus.org/articulos/02A001/lectura_comprensiva.html.

2.2.3 TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE COMÚN AL LENGUAJE MATEMÁTICO

"Es claro que si el alumno no puede llevar a cabo la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, menos podrá llegar al modelo matemático que representa al problema, es decir, la traducción es una de las habilidades básicas en el proceso de solución de problemas.

En nuestra práctica como docentes hemos visto a muchos estudiantes lanzarse a efectuar operaciones y aplicar fórmulas sin reflexionar siquiera un instante sobre lo que se les pide.

En los problemas matemáticos, se debe llevar a cabo la traducción del lenguaje común al lenguaje matemático, puesto que la información y las relaciones se encuentran en un sistema semiótico diferente a aquél en el que se resuelve el problema.

Se distingue cuatro fases de trabajo para la resolución de problemas: Primero, tenemos que comprender el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, tenemos que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Tercero, poner en ejecución el plan. Cuarto, volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.

La categorización

Dada la relevancia que tiene la traducción entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático para el planteamiento y resolución de problemas, didácticamente hablando, es necesario establecer una categorización de los enunciados y problemas de acuerdo a la facilidad que presentan para llevar a cabo este proceso, con el propósito de que el profesor al ser consciente de esto pueda dosificar en los cursos de álgebra las tareas de traducción en donde el estudiante desarrollará las habilidades que le permitan no tener obstáculos en este punto.

Para llevar a cabo la clasificación se tomaron varios problemas de los llamados de aplicación que representan una aproximación a la matemática en el contexto de las ciencias y se procedió a su resolución para determinar las categorías en la traducción de éstos; asimismo, se tomaron enunciados y se procedió a su traducción algebraica para determinar los grados de dificultad y características específicas y comunes entre ellos. Después de la agrupación para clasificarlos se encontraron tres grandes categorías.

Primera categoría: Problemas con enunciado literal

Esta categoría se refiere a problemas en los que se puede hacer una traducción literal de los significados, del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Un concepto matemático puede tener más de una forma de representación en el lenguaje común (sinónimos), así como también las puede tener en el lenguaje matemático (algebraico, gráfico, etc.). Sin embargo, hablando exclusivamente del lenguaje algebraico, sólo una fórmula representará al concepto dado.

Al igual que todas las reglas tienen excepciones, esta definición de problemas con enunciado literal también posee su excepción. Hay ciertas palabras que si bien tienen un único y literal significado en la matemática, en determinados campos de la ciencia se traducen al lenguaje algebraico de forma diferente.

Por ejemplo en Física se tiene lo siguiente: Un objeto se mueve a una velocidad de 25 Kilómetros por hora → $v = 25\,Km/h$

La descripción matemática es a través de un entre.

Ejemplos de problemas con enunciado literal

1. Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en 3 años al triple de la edad del hijo. Hallar ambas edades.

Observación: En este ejemplo, a la edad del padre se le representa por una incógnita, que puede ser denotada por una P, y a la del hijo por H. Se traduce literalmente:

$$P + H = 83$$

$$P = 3H + 3$$

2. Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 metros sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de 2/3 de la altura anterior. Determine qué altura alcanza en su tercero y en su enésimo rebote.

Observación: Nuevamente, las expresiones algebraicas se obtienen únicamente de la comprensión verbal del enunciado:

$Rebote_1$ = 2/3 (15) ; $Rebote_2$ = 2/3 $Rebote_{1\,;}$ .... ; $Rebote_n$ = 2/3 $Rebote_{n-1}$

Segunda categoría: Problemas con enunciado evocador

Problemas en los que la traducción de los significados no es literal, sino que ésta se lleva a cabo gracias a la evocación de conceptos matemáticos y de las relaciones algebraicas asociadas a éstos. El enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático, pero sí es el que provoca la evocación. La evocación sirve de puente entre los significados del enunciado, o sus relaciones, y la traducción final al lenguaje algebraico, ya que en ella se presentan simultáneamente ambas formas de representación: natural y matemática. En el cuadro se muestra la dinámica propuesta.

Ejemplo de enunciados evocadores

Lenguaje común (Enunciado)	Conceptos Evocados	Traducción al lenguaje matemático
Conjunto de puntos que distan 5 unidades del punto (-2,4).	Distancia entre dos puntos, circunferencia, ecuación de la circunferencia. $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$(x+2)^2+\ (y-4)^2=25$
Se observa que la temperatura depende del tiempo.	Función $y\ =\ f(x)$	$T\ =\ f(t)$ T : temperatura t : tiempo
El lado opuesto al ángulo de un triángulo rectángulo cuya magnitud se desea calcular, mide 5 y la hipotenusa mide 8.	Triángulo rectángulo Funciones trigonométricas $sen\ \theta=\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$sen\ \theta\ =\ 5/8$

Características de problemas con enunciado evocador

Se ha detectado que los problemas pertenecientes a esta categoría demandan y refuerzan el conocimiento conceptual.

Se determinó que hay una relación directa entre los conocimientos matemáticos previos y el éxito en la traducción de este tipo de problemas en los estudiantes, aunque obviamente también influyen las habilidades verbales y las lógico-matemáticas.

Cabe destacar que esta categoría no descarta la traducción literal de cierta información del enunciado, pero no es suficiente para establecer el modelo matemático.

Ejemplos de problemas con enunciado evocador

1. Las dimensiones de una caja rectangular son 6 cm, 8 cm y 12 cm. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm^3. Calcular esta cantidad.

Observación: Gracias a la evocación del concepto de volumen de un paralelepípedo rectangular, que tiene por fórmula representativa V = (largo)(alto)(ancho), se traduce la información del enunciado a lenguaje algebraico:

$$V = 6 * 8 * 12 = 576$$
$$(6 - x)(8 - x)(12 - x) = 576 - 441$$

Como se observa, también se presenta traducción literal, sin embargo la organización de la relación algebraica se desprende del concepto de volumen evocado por el enunciado.

2. La suma de dos números es 59 y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Hallar los números.

Datos:

A: Número Mayor
B: Número Menor
C: Cociente
d: Divisor
r: Residuo
D: Dividendo

Observación: En este problema se presenta una parte que tiene traducción literal, $A + B = 59$, sin embargo lo que sigue en el enunciado no se puede traducir sin la evocación del concepto de división: $Cd + r = D$ (el producto del cociente por el divisor, más el residuo, siempre da el dividendo) → $2B + 5 = A$

Tercera categoría: Problemas con enunciado complejo

Problemas en los que se puede o no llevar a cabo traducciones literales (1ª categoría) y/o traducciones con evocación de enunciado (2ª categoría) pero lo que los caracteriza es que la expresión algebraica necesaria para relacionar los datos del problema y poder resolverlo no emana del enunciado, como en las categorías anteriores, sino de la estructura cognoscitiva del individuo. El individuo debe evocar propiedades, diagramas, estrategias y/o conceptos, matemáticos e interactuar con ellos para poder establecer la relación que represente la concepción de su plan.

Características de los problemas con enunciado complejo

En la práctica docente se ha observado que los problemas de esta categoría son los que más trabajo cuesta a los alumnos. Frecuentemente después del desaliento del alumno ante problemas de este tipo, el profesor le "explica" el problema, es decir, le ahorra el trabajo de evocar e interactuar para realizar la traducción definitiva, puesto que comúnmente se requieren conceptos que se vieron tiempo atrás o en otras asignaturas, y el muchacho no los tiene tan presentes como el profesor. Cuando no se conocen la o las teorías que respaldan a estos problemas, son difíciles para cualquiera, pues el enunciado es impropio para saber lo que se debe evocar.

El éxito en la traducción de los enunciados de este tipo de problemas depende de las habilidades verbales, las lógico-matemáticas y los conocimientos sólidos matemáticos y de las disciplinas del contexto.

Ejemplos de problemas con enunciado complejo

1. Una viga de madera tiene sección rectangular de altura h y ancho w. Su resistencia S es directamente proporcional al ancho y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar en un tronco de 24 pulgadas de diámetro?

Observación: En este problema, el establecimiento de la expresión algebraica del proceso de traducción

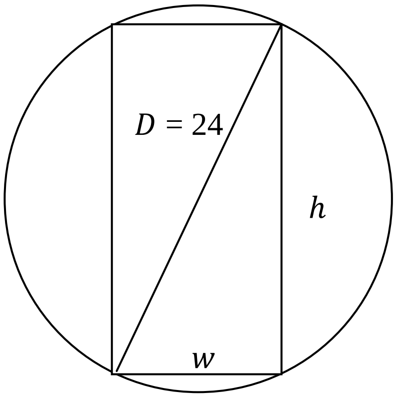
$$S = w(576 - w^2)$$

resulta de la interacción que el alumno efectúa entre dos relaciones algebraicas previas:

Una que resulta de la traducción literal de parte del enunciado:

$$S = wh^2$$

y otra, que resulta de la evocación del teorema de Pitágoras, de la cual no es responsable el enunciado, sino que puede evocarla el alumno a partir de la figura que se desprende de la visualización del problema.



$$24^2 = h^2 + w^2$$

$$h^2 = 24^2 - w^2$$

Reemplazando en $S = wh^2$ tenemos:

$S = w(576 - w^2)$

2. Una mezcla de 16 litros de alcohol y agua contiene un 25 % de alcohol. ¿Cuántos litros de alcohol deben añadirse para obtener una mezcla que contenga el 50 % de alcohol?

Observación: En este caso, el enunciado evoca el concepto de mezcla (el cual no es matemático sino fisicoquímico), pero aún así no es suficiente pues la interacción que debe realizarse para establecer la expresión algebraica requiere de los conceptos de solución y concentración los cuales ni se expresan literalmente ni se evocan.

Datos:

x: litros de alcohol que se añaden para aumentar la concentración de la mezcla.

$16(0.25) = 4$	litros de alcohol en la primera mezcla
$(4 + x)$	litros de alcohol en la nueva mezcla
$(16 + x)$	litros totales de la mezcla nueva

Para que la nueva mezcla tenga el 50% de alcohol se debe cumplir que:

$$\frac{Litros\ de\ alcohol\ en\ nueva\ mezcla}{Litros\ totales\ en\ nueva\ mezcla} = \frac{4+x}{16+x} = \frac{1}{2}$$

2.2.4 ERRORES COMUNES EN LA INTERPRETACIÓN, GRAFICACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Errores en la Interpretación y graficación de funciones exponenciales y logarítmicas

- Una de las deficiencias que suelen tener los alumnos es que, a pesar de realizar bien los cálculos, no interpretan los resultados obtenidos en el modelo matemático planteado.

- Se observan deficiencias en la precisión al momento de graficar las funciones tales como: que la curva sea creciente o decreciente; que se note claramente que no se interseque con la asíntota horizontal; que realice bien las intersecciones con los ejes coordenados; que utilice adecuadamente las escalas, etc.

- Es importante que el estudiante comente los resultados obtenidos y los relacione con la realidad para darle significado a su aprendizaje.

- En los diferentes modelos matemáticos que implican funciones exponenciales y logarítmicas los alumnos tienen dificultades de interpretar los parámetros de dichas funciones como:
  - Base y monotonía
  - Dominio
  - Rango
  - Asíntotas
  - Intersecciones con los ejes coordenados
  - Tendencias

Ejemplos de errores al analizar modelos matemáticos concretos

Crecimiento Poblacional[3]

En el modelo de crecimiento poblacional, el dominio representa períodos de tiempo, que pueden ser de 1 año, 5 años, etc. Muchos estudiantes no llegan a conceptualizar que el dominio no puede ser negativo y que además el modelo sirve para un intervalo limitado de tiempo y fuera de dicho intervalo hay que reajustarlo.

Por citar un ejemplo: "el número de bacterias de cierto cultivo se incrementó de 600 a 1800 entre las 7 horas y las 9 horas. El crecimiento de este tipo de bacterias está dado por la función $f(t) = 600\,(3^{t/2})$, donde t está dado en horas y $f(t)$ es el número de bacterias".

a) Calcule el número de bacterias a las 10, 11, 12, 13 horas.
b) Trace la gráfica desde $t = 0$ a $t = 6$.

Problemas presentados:

El estudiante tiene problemas en interpretar que:

- $t = 0$ representa las 07h 00.
- $t = 6$ representa las 13h 00.
- Lo vertiginoso del crecimiento poblacional.

Velocidad de mecanografiado[4]

Experimentalmente un investigador determinó que una persona podría mecanografiar $f(t)$ palabras después de t minutos, donde $f(t) = 90(1 - e^{-0.03t})$.

[3] SWOKOWSKI, E., Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, pp. 228 ej. 27.

[4] LEITHOLD, L., Matemáticas Previas al Cálculo, pp. 308 ej. 24.

a) Grafique f y observe el comportamiento de esta función cuando t crece indefinidamente ($t \rightarrow +\infty$).
b) ¿Cuántas palabras por minuto puede mecanografiar la persona después de 30 horas de práctica.
c) ¿Cuántas palabras por minuto puede esperarse que mecanografíe esta persona?

Problemas presentados:

- El estudiante no capta fácilmente que cuando t crece indefinidamente ($t \rightarrow +\infty$), el valor de $e^{-0.03t}$ tiende a 0.
- Al estudiante se le hace difícil captar que la función tiene una cota superior en $y = f(t) = 90$ y que ésta representa el límite de velocidad de mecanografiado de palabras al que puede llegar esta persona.

<u>Cantidad de terremotos</u>[5]

Si n es el número promedio de terremotos (en todo el mundo) en un año, cuya magnitud está dada entre R y $R+1$ (en la escala Richter), entonces un investigador experimentalmente obtuvo que: $R = \frac{77}{9} - \frac{10}{9}\log n$.

a) Despeje de la ecuación la variable n.
b) ¿Cuántos terremotos hay para una escala $R = 4°$?

Problemas presentados:

- Presenta dificultades en:
    - Despejar el argumento de la función logarítmica.

[5] SWOKOWSKI, E., Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, pp. 249 ej. 29.

Depreciación[6]

Si el valor de reventa de una cierta pieza de equipo es $f(t)$, t años después de su compra, donde experimentalmente un investigador obtuvo la siguiente función: $f(t) = 1200 + 8000e^{-0.25t}$.

a) Trace la gráfica de f y observe su comportamiento cuando t crece indefinidamente ($t \rightarrow +\infty$).
b) ¿Cuál es el valor del equipo al comprarlo?
c) ¿Cuál es el valor de desecho del equipo después de un largo período de tiempo?

Problemas presentados:

- El estudiante realiza la gráfica de f considerando t con valores negativos, lo cual no es concordante con la situación real.
- El estudiante tiene una comprensión deficiente para entender que cuando t crece indefinidamente el valor de $e^{-0.25t}$ tiende a 0, por lo tanto $y = f(t) = 1200$ es una cota inferior.
- Al estudiante se le hace difícil entender que en el momento de la compra significa que $t = 0$, por lo tanto el valor del equipo es 9200, y que en la gráfica significa la intersección con el eje "y".
- El estudiante no comprende que la cota inferior $y = f(t) = 1200$ representa el valor de desecho del equipo en términos contables.

Eliminación de medicamentos del organismo[7]

Un investigador experimentalmente encontró que un medicamento se elimina del organismo a través de la orina según la función $A(t) = 10(0.8^t)$, donde $A(t)$ representa la cantidad de medicamento en mg y t

---

[6] LEITHOLD, L., Matemáticas Previas al Cálculo, pp. 308 ej. 26.

[7] SWOKOWSKI, E., Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica, pp. 228 ej. 26

el tiempo en horas. Si La dosis inicial de una pastilla es de 10 mg y para hacer efecto mínimo debe existir 2.62 mg de medicamento en el organismo, determine ¿cada cuántas horas debe tomar el paciente una pastilla?

Problemas presentados:

- El estudiante no puede interpretar la pregunta. Le cuesta darse cuenta que al resolver $2.62 = 10(0.8^t)$ da un valor de $t = 6$ y que este representa el tiempo máximo que puede transcurrir para ingerir una nueva pastilla para que esta surta efecto.

2.2.5 TALLERES COMO MEDIO DE AFIANZAMIENTO SEGÚN EL MODELO CONSTRUCTIVISTA

"El modelo constructivista, enfatiza que los aprendices deben estar involucrados activamente, reflexionar sobre los aprendizajes, hacer inferencias y experimentar conflictos cognitivos; por otra parte, el docente debe documentarse con relación a todas las posibilidades que ofrece su profesión y elaborar una visión propia de la práctica pedagógica." [8]

A continuación, desde la página 32 a la 34 se ha tomado un extracto del artículo de la Universidad Los Llanos, "El concepto del taller" obtenido de la página web:

http://acreditacion.unillanos.edu.co/contenidos/dis_ambientes _metodos_pedagogicos/Memoria1/conceptotalle-Presentacion.pdf

[8] BUSTAMANTE, M., Propuesta de evaluación basada en la teoría constructivista, http://www.foroswebgratis.com/mensaje-propuesta_de_evaluaci%C3%93n_basada_em_la_ teor%C3%8Da_ constructivista-24070-110936-1-829685.htm

“Taller: Estrategia pedagógica trans – interdisciplinaria

TALLER, en el lenguaje corriente, es el lugar donde se hace, se construye o se repara algo. Así, se habla de taller de mecánica, taller de carpintería, taller de reparación de electrodomésticos, etc.

Desde hace algunos años la práctica ha perfeccionado el concepto de taller extendiéndolo a la educación, y la idea de ser "un lugar donde varias personas trabajan cooperativamente para hacer o reparar algo, lugar donde se aprende haciendo junto con otros".

Realidad integradora, compleja, reflexiva, en que se unen la teoría y la práctica como fuerza motriz del proceso pedagógico; es una reunión de trabajo donde se unen los participantes en pequeños grupos o equipos para hacer aprendizajes prácticos según los objetivos que se proponen y el tipo de asignatura que los organice. Puede desarrollarse en un local, pero también al aire libre.

El taller tiene como objetivo la demostración práctica de las leyes, las ideas, las teorías, las características y los principios que se estudian, la solución de las tareas con contenido productivo.

El taller pedagógico resulta una vía idónea para formar, desarrollar y perfeccionar hábitos, habilidades y capacidades que le permiten al alumno operar con el conocimiento y al transformar el objeto, cambiarse a sí mismo.

Tiempo-espacio para la vivencia, la reflexión y la conceptualización; síntesis del pensar, el sentir y el hacer. Lugar para la participación y el aprendizaje.

En el taller, a través de la interacción de los participantes con la tarea, confluyen pensamiento, sentimiento y acción.

El taller puede convertirse en el lugar del vínculo, la participación, la comunicación y, por ende, lugar de producción social de objetos, hechos y conocimientos".

¿Por qué se considera importante el taller como espacio de construcción de conocimiento?

Mediante el taller, los docentes y los alumnos desafían en conjunto problemas específicos buscando también que el aprender a ser, el aprender a aprender y el aprender a hacer se den de manera integrada, como corresponde a una auténtica educación o formación integral.

Mediante el taller los alumnos en un proceso gradual o por aproximaciones, van alcanzando la realidad y descubriendo los problemas que en ella se encuentran a través de la acción - reflexión inmediata o acción diferida.

El proceso pedagógico se centra en el desarrollo del alumno y se da como resultado de la vivencia que este tiene de su acción en terreno, formando parte de un equipo de trabajo, y de la implementación teórica de esta acción.

La relación teoría-práctica es la dimensión del taller que intenta superar esta antigua separación al interaccionar el conocimiento y la acción y así aproximarse al campo de la tecnología y de la acción fundamentada. Estas instancias requieren de la reflexión, del análisis de la acción, de la teoría y de la sistematización.

El taller puede ser una forma de instancia para que el estudiante se ejercite en el empleo de técnicas adquiridas en las clases teóricas.

En el taller se rescata la acción y participación del alumno en situaciones reales y concretas para su aprendizaje, por esto, se debe reconocer que la fuerza del taller reside en la participación más que en la persuasión.

Objetivos generales de los talleres

1. Promover y facilitar una educación integral e integrar simultáneamente en el proceso de aprendizaje el Aprender a aprender, el Hacer y el Ser.
2. Realizar una tarea educativa y pedagógica integrada y concertada entre docentes, alumnos, instituciones y comunidad.
3. Superar en la acción la dicotomía entre la formación teórica y la experiencia práctica.
4. Superar el concepto de educación tradicional en el cual el alumno ha sido un receptor pasivo del conocimiento.
5. Facilitar que los alumnos o participantes en los talleres sean creadores de su propio proceso de aprendizaje.
6. Hacer un acercamiento de contrastación, validación y cooperación entre el saber científico y el saber popular.
7. Aproximar comunidad - estudiante y comunidad - profesional.
8. Desmitificar la ciencia y el científico, buscando la democratización de ambos.
9. Desmitificar y desalienar la concientización.
10. Posibilitar la integración interdisciplinaria.
11. Crear y orientar situaciones que impliquen ofrecer al alumno y a otros participantes la posibilidad de desarrollar actitudes reflexivas, objetivas, críticas y autocríticas.
12. Promover la creación de espacios reales de comunicación, participación y autogestión en las entidades educativas y en la comunidad.

Principios pedagógicos del taller

1. *Eliminación de las jerarquías docentes.*
2. *Relación docente - alumno en una tarea común de cogestión.*
3. *Cambiar las relaciones competitivas por la producción conjunta – cooperativa grupal.*
4. *Formas de evaluación conjunta.”*

A continuación, desde la página 35 a la 38 se ha tomado un extracto del artículo del ICE (Institut de Ciències de´l´Educació), “Formas de Aprendizaje Cooperativo” obtenido de la página web: http://giac.upc.es/pag/giac_cas/giac_como_es_formas.htm

Talleres y aprendizaje cooperativo

“El aprendizaje cooperativo (AC) puede darse en tres tipos de grupos: informales, formales y de base. Los grupos informales se constituyen para discutir cuestiones o resolver problemas en una sesión de clase. Son grupos que existen durante un breve período de tiempo (unos minutos).

Los grupos formales están encaminados a resolver una tarea cuya duración puede abarcar desde una sesión a diversas semanas.

Los grupos de base son a largo plazo (por ejemplo, todo el curso o varios cursos) y controlan el eficaz avance y progresión de cada uno de sus componentes en ámbitos que pueden incluso ir más allá de lo meramente académico.

El grado de estructuración de la tarea y el rigor con que se utilizan los elementos básicos que se describirán a continuación son mayores cuanto más compleja es la tarea asignada al grupo. De hecho, varios de los elementos básicos suelen no estar presentes en los grupos cooperativos informales.

Los elementos básicos necesarios para que un trabajo en grupo sea auténticamente cooperativo son cinco:

1. La interdependencia positiva.
2. Promover la interacción cara a cara.
3. Dar responsabilidad a cada estudiante del grupo.
4. Desarrollar las habilidades del grupo y las relaciones interpersonales.
5. La reflexión sobre el trabajo del grupo.

La estructuración sistemática de estos cinco elementos básicos, como ayuda en situaciones de aprendizaje de grupo, asegura los esfuerzos cooperativos y habilitan la implementación disciplinada del AC para el éxito de los estudiantes a largo plazo.

El **primero** y más importante de los elementos que permiten estructurar el AC es la i**nterdependencia positiva**. La interdependencia positiva se da y está correctamente estructurada cuando los componentes del grupo son conscientes de que el éxito de cada cual depende del éxito de los demás; nadie puede alcanzar sus objetivos si no lo alcanzan también el resto de componentes del grupo.

Las metas y tareas comunes, por tanto, deben diseñarse y comunicarse a los estudiantes de tal manera que comprendan que, o nadan juntos, o se ahogan juntos. Para estructurar sólidamente unas interdependencias positivas, debe ponerse especial atención en que:

a. Los esfuerzos de cada componente del grupo son completamente indispensables para el éxito del grupo.
b. Cada componente del grupo, con su contribución tiene una responsabilidad en el esfuerzo común.

Ello crea un compromiso hacia la búsqueda del éxito por parte de todos los componentes del grupo con lo que cada uno pasa a ser núcleo del AC. Si no se dan interdependencias positivas, realmente, no es posible decir que existe cooperación.

El **segundo** elemento básico del AC es promover la **interacción entre los elementos del grupo, preferiblemente, cara a cara**. Cada estudiante del grupo precisa, para llevar a cabo con éxito su tarea individual, que los compañeros del grupo alcancen exitosamente, también, sus tareas individuales. Para ello, debe compartir recursos con ellos y darles todo el soporte y ayuda precisos, a la vez que agradecerá y aplaudirá la tarea alcanzada por los demás y de la cual él disfruta.

Hay importantes actividades cognitivas y de dinámica interpersonal que tan solo se pueden dar cuando los estudiantes promueven entre ellos su propio aprendizaje. Ello, incluye explicaciones orales con relación a como resolver problemas, explicar un determinado concepto o conocimiento a los demás, asegurarse de que lo han entendido, discutir los conceptos relacionados con aquello en lo que se está trabajando y que conectan el trabajo presente con aquello que se aprendió en el pasado.

Cada una de estas actividades se puede estructurar en procedimientos de grupo con lo que queda asegurado que los grupos cooperativos son tanto un sistema académico de soporte (cada estudiante tiene alguien comprometido en ayudarlo a aprender) como un sistema personal de soporte (cada estudiante tiene alguien que está comprometido con él como persona). Esta promoción de las relaciones personales, cara a cara, de los componentes del grupo los lleva a asumir un compromiso entre todos a la vez que un compromiso con el éxito de una tarea común.

El **tercer** elemento básico del AC es la **responsabilidad individual**. En cada sesión deben establecerse dos niveles diferentes de responsabilidad: el grupo debe ser responsable de alcanzar sus objetivos y cada componente del grupo debe ser responsable de contribuir, con su actitud y tarea, a la consecución del éxito del trabajo colectivo.

La responsabilidad individual existe cuando aquello que ha realizado cada cual revierte en el grupo y en cada miembro del grupo, a la vez que el grupo y cada miembro del grupo hace una valoración positiva por cuanto la tarea por él desarrollada ha supuesto una ayuda, un apoyo y un soporte al aprendizaje de cada uno, individualmente, y del grupo como colectivo. El propósito de los grupos de AC será que cada miembro crezca de una manera legítima. Los estudiantes que aprenden juntos son, individualmente, mucho más competentes que los que aprenden individualmente.

El **cuarto** elemento básico del AC es **enseñar** a los estudiantes a **desarrollar habilidades inherentes a pequeños grupos**. El AC es, por propia naturaleza, más complejo que el competitivo o el individualista, puesto que los estudiantes deben adoptar un doble compromiso con la tarea (el aprendizaje del tema académico) y con el trabajo de equipo (funcionar efectivamente como un grupo).

Las habilidades sociales necesarias para hacer efectivo el trabajo cooperativo no aparecen por sí solas cuando se utilizan las sesiones cooperativas. Las habilidades sociales deben enseñarse a los estudiantes como una finalidad y como habilidades académicas en sí mismas. El liderazgo, la toma de decisiones, la construcción de la confianza, la comunicación y las habilidades en resolver conflictos, deben guiar tanto el trabajo del equipo como sus relaciones a efectos de asimilar los contenidos de manera exitosa.

Asimismo, y puesto que la cooperación va asociada intrínsecamente a los conflictos, los procedimientos y habilidades para resolver y conducir estos conflictos de manera constructiva serán especialmente importantes para el éxito a largo plazo de los grupos de aprendizaje y del éxito individual de cada uno de sus componentes.

El **quinto** y último elemento básico del AC es la **reflexión sobre el trabajo del grupo**, que se produce cuando los componentes del grupo discuten cómo van alcanzando sus objetivos y qué efectividad tiene su relación de trabajo.

Los grupos precisan poder describir qué acciones y tareas de sus miembros son útiles y cuáles son inútiles a la hora que tomar decisiones acerca de qué conductas deben mantenerse, corregir o cambiar. La mejora continua de los procesos de aprendizaje revierte en la mejora de los resultados cuando se hacen análisis detallados de cómo los miembros del grupo trabajan conjuntamente y determinan la manera de aumentar la eficacia del grupo.

En este sentido puede ser interesante incorporar técnicas de gestión de calidad que aseguren una dinámica de auto evaluación continuada de aquello que genere el grupo, y que debe ser un conjunto de producciones de entre las que se podrían destacar.”

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El diseño de la investigación se lo ejecutó en un Colegio Particular Técnico de la Ciudad de Guayaquil el día sábado 29 de Octubre de 2011.

La investigación será de tipo cualitativa ya que no se probará la hipótesis debido a que la estadística utilizada será de carácter general, las preguntas son de apreciación personal (subjetivas), entre otras razones.

Por los años de experiencia en la enseñanza de este tema, consideramos que es nuestro deber contribuir con nuestros colegas y estudiantes con una estrategia para facilitar la comprensión, interpretación, resolución y razonamiento crítico (inferencial) de problemas referidos a funciones exponenciales y logarítmicas mediante una metodología amena y motivante, por lo que el método aplicado será el desarrollo de talleres siguiendo el paradigma constructivista.

3.2 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Por el objetivo, Aplicada: El taller será la solución de un problema real luego de analizar diferentes modelos matemáticos.

Por el lugar, De campo: El proyecto se realiza en un Colegio Particular Técnico de la Ciudad de Guayaquil, donde se observa la participación directa de los estudiantes y autoridades de dicho plantel.

Por su naturaleza, De Acción: El desarrollo del taller le dará a la investigación el carácter de activo y el tipo del problema la significatividad para motivar al estudiante.

Por el alcance, Cuasi Experimental: El proyecto generará participación activa pues traerá como consecuencia que los estudiantes aprendan a trabajar con las funciones exponenciales y logarítmicas y a interactuar con sus compañeros, mediante un aprendizaje cooperativo.

3.3 POBLACIÓN

La población del presente proyecto lo constituyen los 36 estudiantes del 3er año de Bachillerato de un Colegio Técnico Particular ubicado en la ciudad de Guayaquil.

Para nuestra investigación se procederá a censar a los estudiantes.

3.4 INSTRUMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

La técnica utilizada fue la encuesta, la cual aplicamos a los 36 estudiantes del colegio antes mencionado después que hubieron concluido el taller pedagógico propuesto.

Mediante los resultados de la encuesta se pretende evaluar si se alcanzaron los objetivos del taller.

A continuación presentamos el taller pedagógico que se propuso a los estudiantes y la encuesta aplicada:

3.4.1 TALLER PEDAGÓGICO

OBJETIVO

A partir del planteamiento de problemas reales, presentar propuestas de solución en base a los modelos matemáticos estudiados: función lineal, cuadrática, exponencial y logística, para afianzar los conceptos asociados a dichas funciones.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 1

Como política gubernamental conviene poder predecir el incremento poblacional de un país en un horizonte de muchos años para planificar y tomar decisiones de políticas sociales a mediano y largo plazo como son: proyectos de vivienda, alimentación, salud, plazas de trabajo, educación, proyectos energéticos, etc.

En base a los datos de la población de India, estime su población a un horizonte de 50 años.

POBLACION DE INDIA

AÑOS	**TIEMPO (en años)**	**POBLACION (millones de habitantes)**
1950	0	370
1960	10	445
1970	20	554
1980	30	685
1990	40	838
2000	50	1004
2010	60	1173

La población de India, es tomada de una Oficina del Censo de EEUU[9].

[9] http:/ /www.census.gov/cgibin/ipc/idbsum.pl?cty= IN.

PROCEDIMIENTO CONSTRUCTIVISTA

1) Defina los parámetros y variables pertinentes. Sitúe los puntos dados en una gráfica.
2) ¿Qué tipo de funciones podrían modelizar el comportamiento de la gráfica? Explique sus elecciones.
3) Determine analíticamente las funciones que se ajustan a los puntos de la gráfica.
4) Analice sobre el grado de ajuste de los modelos obtenidos con respecto a los datos originales.
5) Haga un análisis comparativo de las implicaciones de cada uno de los modelos en lo que respecto al crecimiento de la población de India en el futuro.
6) Elija el modelo que mejor se ajuste al problema planteado y fundamente su elección.

MATERIALES DIDÁCTICOS

- Útiles escolares.
- Papel milimetrado.
- Calculadora Científica.
- Software graficador de funciones.
- Computadora, Proyector.

3.4.2 ENCUESTA

A continuación se han planteado 11 enunciados relativos al Taller Pedagógico y sus respectivas opciones, escoja la opción que considere correcta.

1) ¿Está de acuerdo con la importancia de trabajar con datos reales?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

2) ¿Está de acuerdo en el procedimiento empleado para aprender a graficar funciones?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

3) ¿Está de acuerdo con esta forma de interpretar los parámetros de las funciones tales como: asíntotas, intersecciones con los ejes, dominio, rango, etc.?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

4) ¿Está de acuerdo en que sirve para comprender la utilidad de las funciones exponenciales y logarítmicas?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

5) ¿Está de acuerdo en que sirve para interpretar la diferencia entre variación lineal y variación exponencial?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

6) ¿Está de acuerdo en que las funciones exponenciales y logarítmicas tienen aplicaciones en la solución de problemas reales?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

7) ¿Está de acuerdo en que los integrantes del grupo se involucraron en el desarrollo de este taller?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

8) ¿Está de acuerdo en el uso de un software graficador de funciones?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

9) ¿Está de acuerdo en trabajar con esta metodología?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

10) ¿Está de acuerdo en aplicar esta técnica pedagógica en otros temas de estudio?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

11) ¿Está de acuerdo en esta forma de mostrar la importancia de las matemáticas?

( ) Totalmente de acuerdo.
( ) Parcialmente de acuerdo.
( ) Parcialmente en desacuerdo.
( ) Totalmente en desacuerdo.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

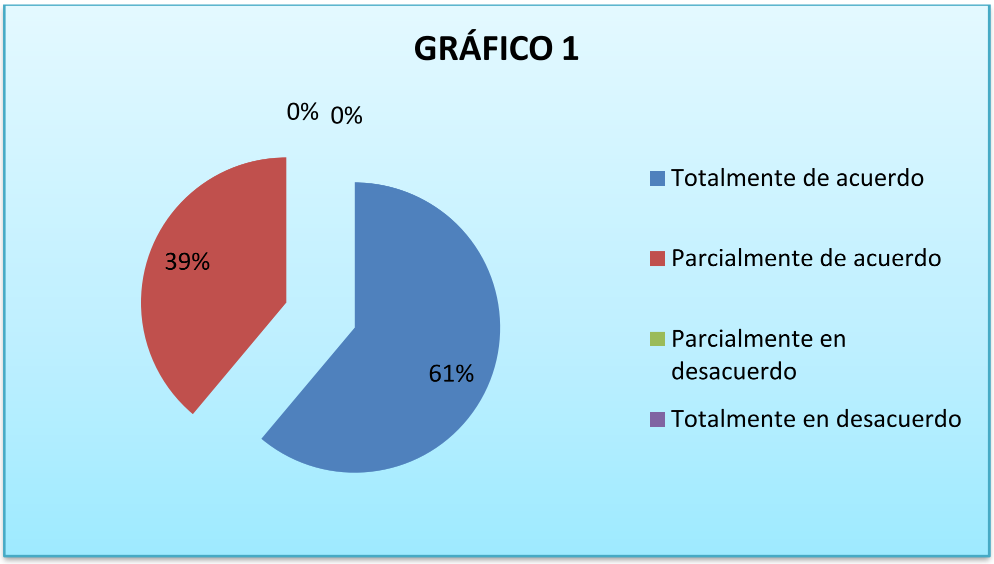
PREGUNTA 1

¿Está de acuerdo con la importancia de trabajar con datos reales?

CUADRO Nº 1

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	22	61,11%
Parcialmente de acuerdo	14	38,89%
Parcialmente en desacuerdo	0	0,00%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

Se puede observar que hay una buena aceptación al problema planteado en base a datos estadísticos reales, con fuentes verificables.

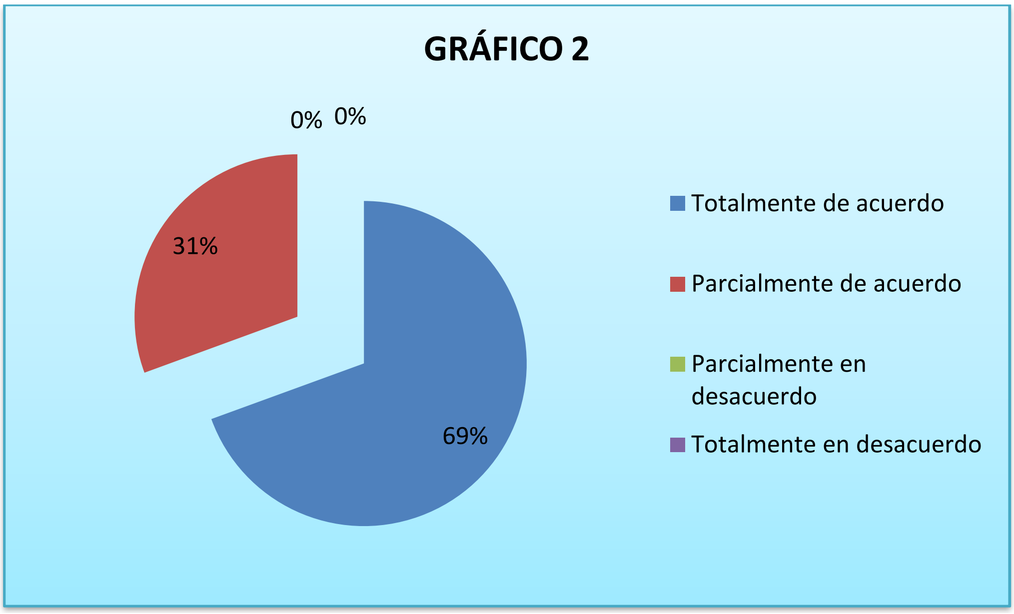
PREGUNTA 2

¿Está de acuerdo en el procedimiento empleado para aprender a graficar funciones?

CUADRO Nº 2

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	25	69,44%
Parcialmente de acuerdo	11	30,56%
Parcialmente en desacuerdo	0	0,00%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

La gran mayoría de los estudiantes considera que el procedimiento llevado es propicio para aprender a graficar funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.

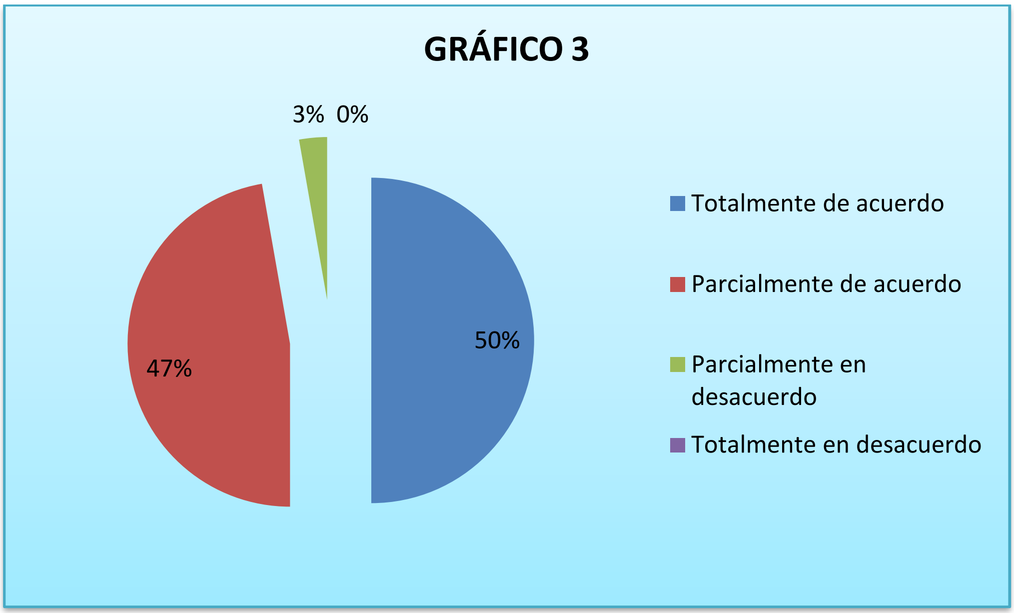
PREGUNTA 3

¿Está de acuerdo con esta forma de interpretar los parámetros de las funciones tales como: asíntotas, intersecciones con los ejes, dominio, rango, etc.?

CUADRO Nº 3

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	18	50,00%
Parcialmente de acuerdo	17	47,22%
Parcialmente en desacuerdo	1	2,78%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

La mayoría de los estudiantes están total o parcialmente de acuerdo en que se afianzaron sus conocimientos de los parámetros analizados en las funciones.

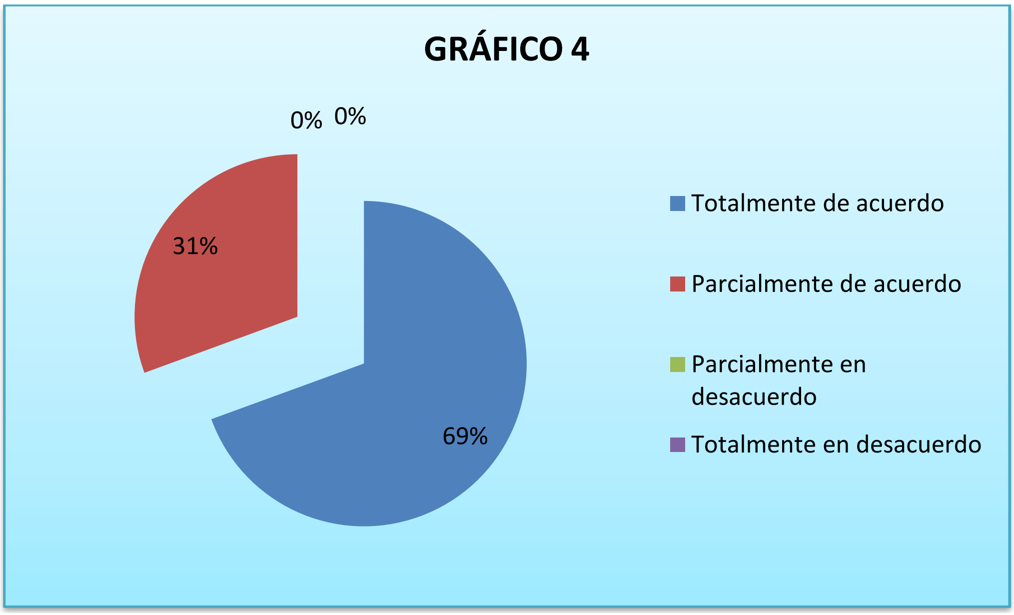
PREGUNTA 4

¿Está de acuerdo en que sirve para comprender la utilidad de las funciones exponenciales y logarítmicas?

CUADRO Nº 4

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	25	69,44%
Parcialmente de acuerdo	11	30,56%
Parcialmente en desacuerdo	0	0,00%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

Respecto a esta pregunta, los estudiantes tienen una gran aceptación en cuanto a que este taller les ha mostrado unas aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas.

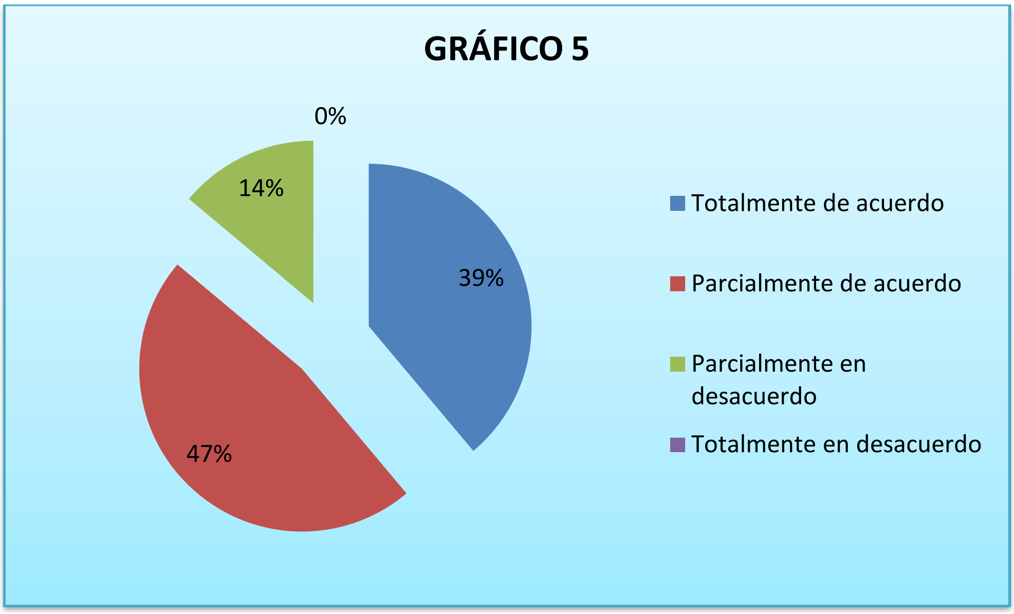
PREGUNTA 5

¿Está de acuerdo en que sirve para interpretar la diferencia entre variación lineal y variación exponencial?

CUADRO Nº 5

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	14	38,89%
Parcialmente de acuerdo	17	47,22%
Parcialmente en desacuerdo	5	13,89%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

El taller no está directamente enfocado para distinguir entre variación lineal y exponencial; como se puede observar tuvo buena aceptación aunque menor que en las preguntas anteriores.

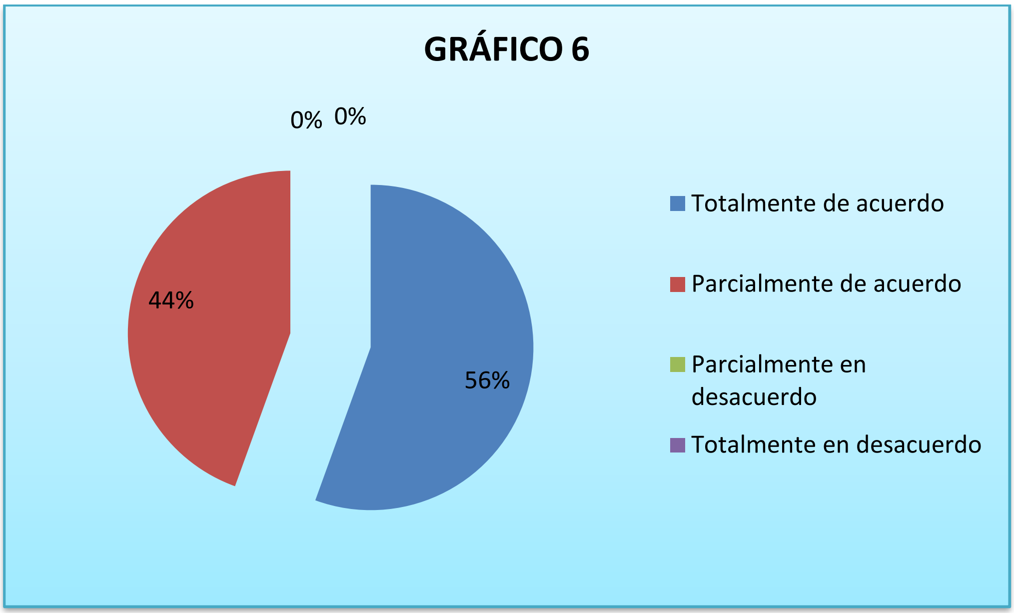
PREGUNTA 6

¿Está de acuerdo en que las funciones exponenciales y logarítmicas tienen aplicaciones en la solución de problemas reales?

CUADRO Nº 6

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	20	55,56%
Parcialmente de acuerdo	16	44,44%
Parcialmente en desacuerdo	0	0,00%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

El problema planteado fue acertado para demostrar la aplicación real de las funciones exponenciales y logarítmicas.

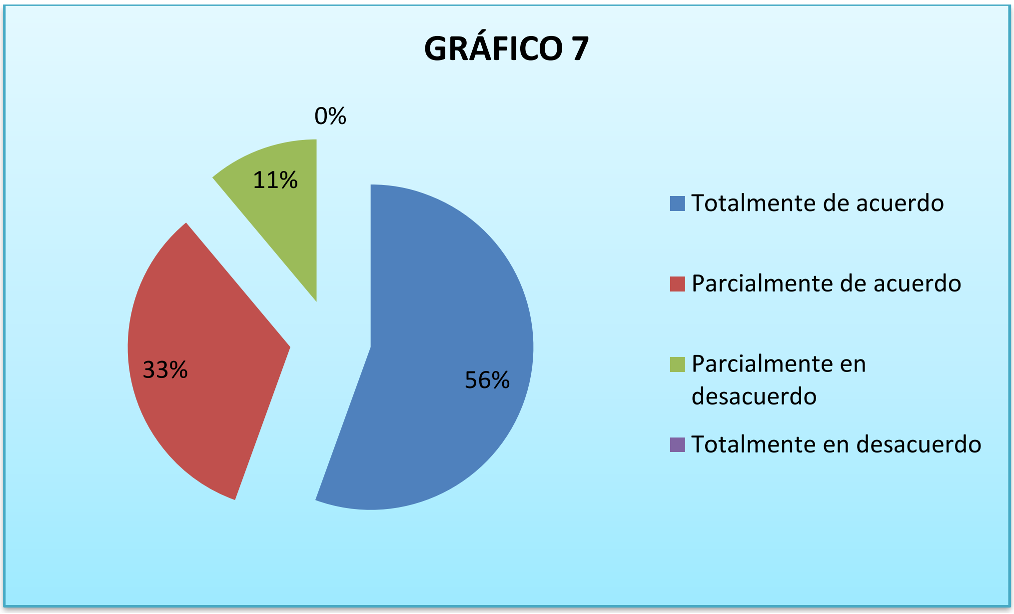
PREGUNTA 7

¿Está de acuerdo en que los integrantes del grupo se involucraron en el desarrollo de este taller?

CUADRO Nº 7

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	20	55,56%
Parcialmente de acuerdo	12	33,33%
Parcialmente en desacuerdo	4	11,11%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

Mayoritariamente a los estudiantes les gustó trabajar en grupo, a pesar que hubieron unos pocos que no se integraron.

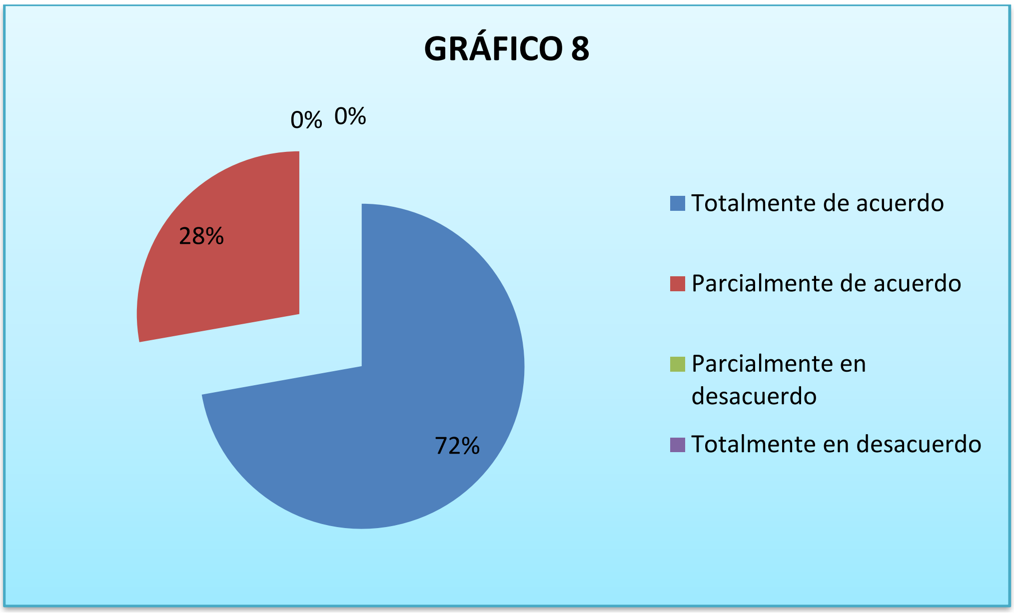
PREGUNTA 8

¿Está de acuerdo en el uso de un software graficador de funciones?

CUADRO Nº 8

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	26	72,22%
Parcialmente de acuerdo	10	27,78%
Parcialmente en desacuerdo	0	0,00%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

A los estudiantes les pareció muy interesante trabajar con el software Graph por la facilidad con la que se pueden graficar funciones, su versatilidad, la presentación en colores. Además se sienten identificados con el uso de las TICs.

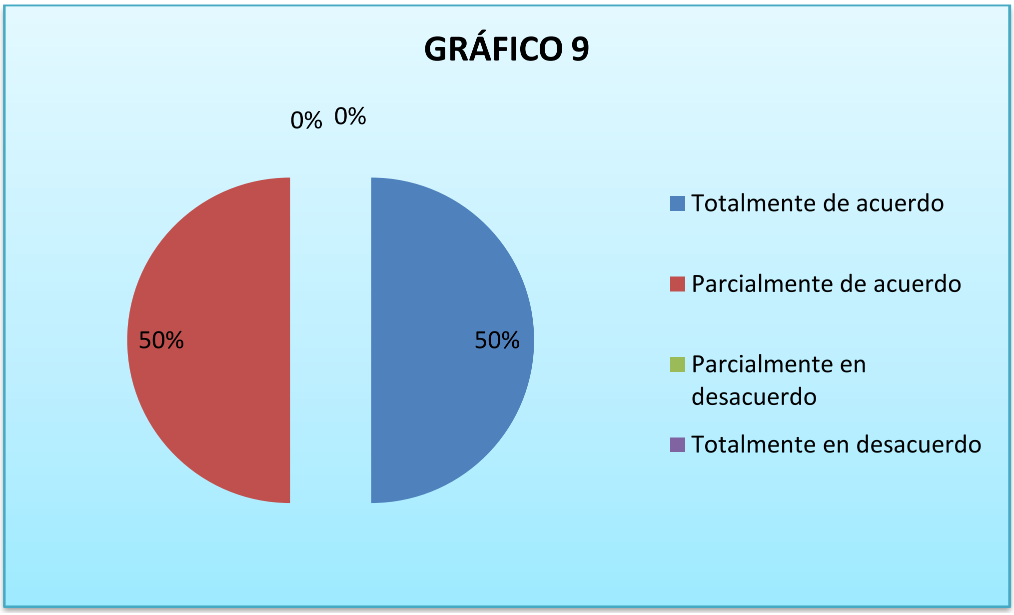
PREGUNTA 9

¿Está de acuerdo en trabajar con esta metodología?

CUADRO Nº 9

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	18	50,00%
Parcialmente de acuerdo	18	50,00%
Parcialmente en desacuerdo	0	0,00%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

Esta metodología es del agrado de los estudiantes, probablemente porque ellos participan individual y grupalmente.

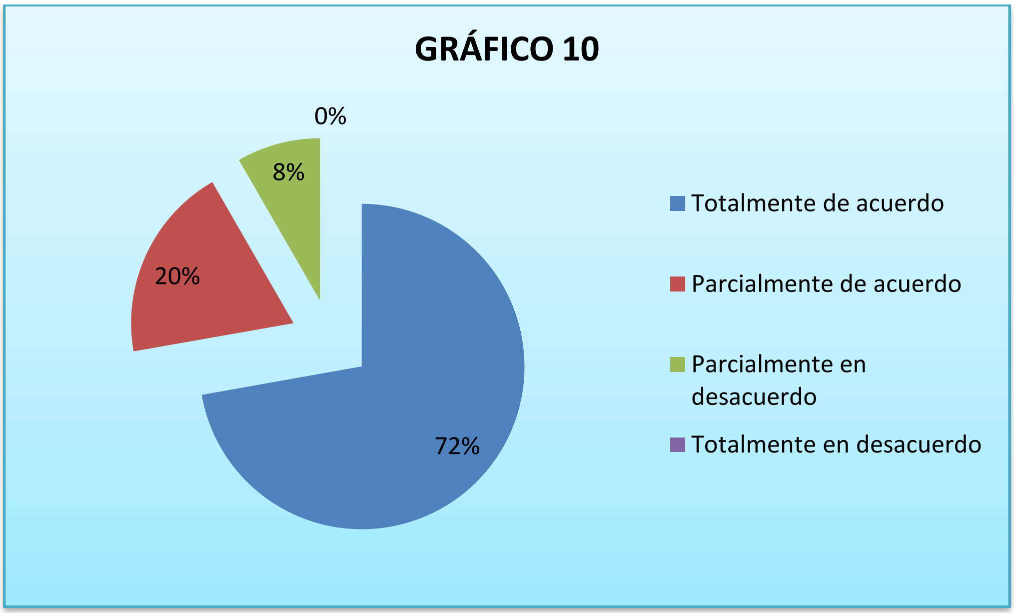
PREGUNTA 10

¿Está de acuerdo en aplicar esta técnica pedagógica en otros temas de estudio?

CUADRO Nº 10

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	26	72,22%
Parcialmente de acuerdo	7	19,44%
Parcialmente en desacuerdo	3	8,33%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

La gran mayoría de estudiantes opina que esta metodología es aplicable para aprender otros temas de estudio.

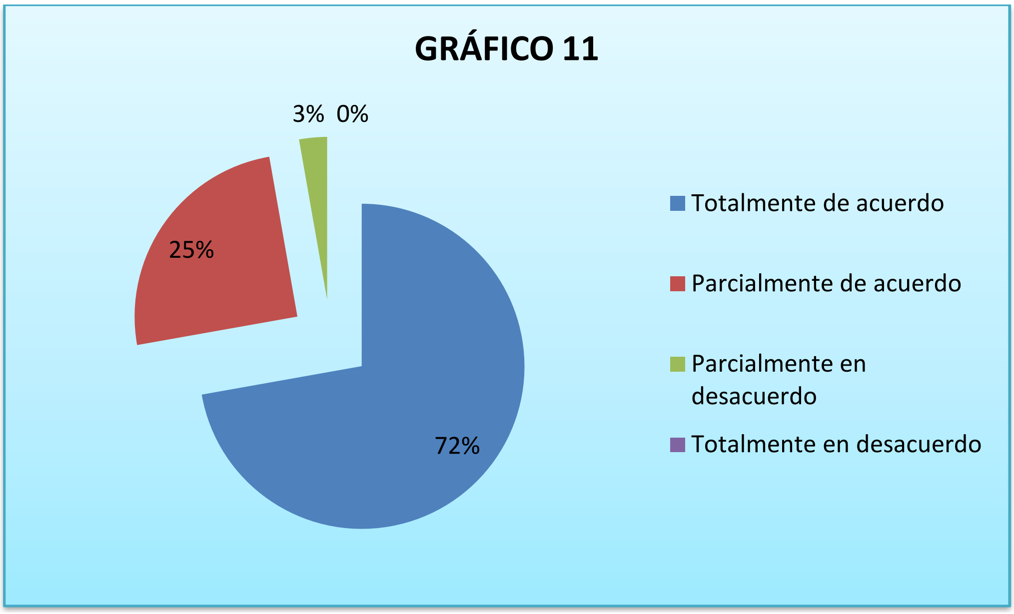
PREGUNTA 11

¿Está de acuerdo en esta forma de mostrar la importancia de las matemáticas?

CUADRO Nº 11

CATEGORÍAS	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Totalmente de acuerdo	26	72,22%
Parcialmente de acuerdo	9	25,00%
Parcialmente en desacuerdo	1	2,78%
Totalmente en desacuerdo	0	0,00%
TOTALES	36	100,00%

Fuente: Estudiantes de 3ero de Bachillerato de un Colegio de Guayaquil
Autores: Lcdo. Régulo Viscarra, Ing. Miguel Angulo



ANÁLISIS

La gran mayoría de estudiantes se han sentido a gusto con la forma como este taller mostró la aplicación de las matemáticas en solución de problemas reales.

4.1 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Al iniciar el taller se realizó una motivación, por la cual cada uno de los estudiantes debía considerarse “presidente de India”, y como tal debían tomar decisiones a largo plazo para el país, y que sus decisiones beneficiarían el futuro de millones de personas.

A los estudiantes se les notó muy motivados ya que cada uno se sintió como un “presidente” de India que tenía que conocer la población de su país en el futuro para planificar políticas en vivienda, salud, educación alimentación, etc.

Se observó que los estudiantes estuvieron motivados con la aplicación de las matemáticas en problemas reales, ya que para estimar la población futura de India, se sirvió de la información de la población anterior, cuyas fuentes son fácilmente verificables a través del Internet.

El taller permitió que reforzaran sus conocimientos de los modelos matemáticos: función lineal, cuadrática, exponencial, logística; y encontraran aplicación a los mismos.

Sirvió además para afianzar sus conocimientos sobre graficación de las funciones mencionadas y entender mejor los parámetros característicos de dichas funciones: intersecciones con los ejes, asíntotas, etc.

Para la obtención de las curvas exponenciales tuvieron que hacer uso de la función logarítmica, lo cual le añade aplicación a los conceptos de logaritmos, que los alumnos interpretan como ajenos a su realidad.

Se notó mayoritariamente el aporte individual y grupal para lograr el objetivo propuesto, es decir, hubo trabajo individual, grupal y cooperativo.
Es de gran importancia el uso de software en la enseñanza de funciones exponenciales y logarítmicas, como lo señalan los resultados de la pregunta 8,

ya que los jóvenes se sienten más a gusto trabajando con medios audiovisuales.

Todos los grupos no tuvieron los mismos resultados, ya que cada grupo en base a sus propios análisis y criterios eligió los puntos que consideraron más adecuados al momento de formular las funciones matemáticas. La buena disposición se debe a que ellos estuvieron más involucrados en la interpretación y solución del problema.

Así, mediante este taller se percibió la matemática como una actividad y no como un conjunto codificado de conocimiento, por lo que sería de gran utilidad aplicar esta metodología en otros campos de estudio ya que fue de mucho interés por parte de los alumnos, quienes afirmaron su gusto por aprender las matemáticas de esta forma.

Es de vital importancia trabajar desde la institución educativa, para quitar de la mente del estudiante con fundamentos válidos la tesis que señala Bidwell (1993) acerca de que la matemática es abstracta y sólo se encuentra en la mente de los profesores y que de esta disciplina ya se ha descubierto prácticamente todo.

CAPÍTULO V

PROPUESTA PEDAGÓGICA

5.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

5.1.1 INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Propuesta: Presentar un video o algún otro material introductorio que sirva como motivación al tema y elaborar una conjunto de preguntas orientado a que los estudiantes empiecen a construir el concepto de función exponencial.

Plan de clase

a) Exponer la leyenda de los granos de trigo:

“Una antigua leyenda cuenta que el rey Sirham, soberano de la India, era inmensamente rico y a la vez envidiado por su poder, sin embargo, su riqueza era tan inmensa como su aburrimiento y, debido a ello, tiranizaba a su pueblo. Un buen día, un sabio brahmán, Lahur Sissa, con el fin de enseñarle a tratar debidamente a sus súbditos, buscó la forma de crear un juego donde el rey, a pesar de ser la pieza principal, nada pudiera hacer sin la ayuda de los demás. Lo llamó, chaturanga y es el antepasado del ajedrez. Sorprendido por la ingeniosidad del chaturanga, Sirham dio su palabra a Sissa de no martirizar más al pueblo y se comprometió a ofrecerle lo que pidiese. Sissa, queriendo darle una nueva lección, pidió que le recompensase con la cantidad de trigo que resultara de poner un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta y así sucesivamente siempre doblando la cantidad. El soberano, estimando que el tablero tenía sesenta y cuatro casillas y que la recompensa no excedería un saco de trigo, le concedió la petición, tan modesta a primera vista. Sin embargo, después de haber hecho los cálculos, resultó que todo el trigo de la India no era suficiente para recompensar a Sissa, pues se necesitaban nada menos que 18.446.744.073.709.551.615 (dieciocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince granos de trigo, resultado de la suma de la progresión geométrica: 2 elevado a 64, menos 1). Si se considera que 21.000 granos pesan un kilo, lo que se debería haber entregado al inventor eran 878.416.384.462 toneladas, cantidad muy superior a la que se podría sembrar considerando toda la superficie de la Tierra. Sissa más tarde fue nombrado primer ministro y dice la leyenda que orientando a su rey con sabios y prudentes consejos y distrayéndolo con ingeniosas partidas de ajedrez, prestó los más grandes servicios a su pueblo”.[10]

b) Plantear las siguientes preguntas: (proponer preguntas que ayuden a construir el concepto de función exponencial)

¿De qué manera se obtuvo la cifra 18.446.744.073.709.551.615?
¿Por qué se obtuvo un valor tan grande?
¿Cuál crees que fue el razonamiento inicial del rey?

5.1.2 DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Consideramos que muchos de los errores que cometen los estudiantes se deben a que no tienen bien clara la definición de función exponencial; la forma tradicional, en forma resumida presenta lo siguiente:

[10] http://paulaflecha.wordpress.com/2007/04/29/leyenda-de-los-granos-de-trigo/

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \to f(x) = a^x;\ a > 0, a \neq 1$

Si $a > 1$, la gráfica de f contiene al punto $(0,1)$ y es creciente.
Si $0 < a < 1$, la gráfica de f contiene al punto $(0,1)$ y es decreciente.

Esta exposición puede producir que en muchos estudiantes la función exponencial carezca de significatividad y no pueda relacionarlo con un modelo matemático aplicable a diversas circunstancias.

Además, si el profesor no formula las preguntas adecuadas, habrá dudas que el estudiante no sabrá resolver cuando tenga que enfrentarse a situaciones concretas.

Propuesta: Construir la definición de función exponencial en base a una tabla de datos y una gráfica correspondiente, en la que el exponente sea la variable independiente. Aclarar en esta definición las características que debe cumplir la base.

<u>Plan de clase:</u>

a) Definición de función exponencial:

La función exponencial f es aquella que tiene una regla de correspondencia:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \to f(x) = a^x;\ a > 0, a \neq 1$

Donde:
a es una base constante.
x es el exponente variable.
Ejemplos:

$f(x) = 2^x$

$f(x) = 3^x$

En ambos casos la base es fija (2 o 3) y exponente (x) es la variable independiente de la función.

Tabulando $f(x) = 2^x$

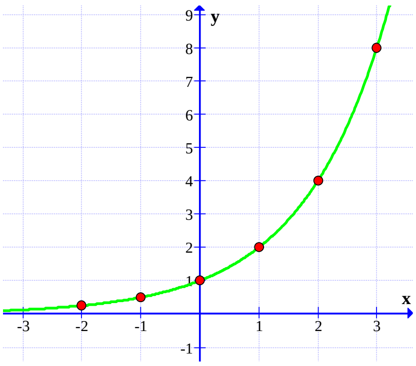
$2^{-2} = 1/4$

$2^{-1} = 1/2$

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$



Los puntos representan las coordenadas de los valores encontrados, pero ya que $x \in \mathbb{R}$ se completan los espacios entre los puntos, obteniéndose la gráfica.

b) El valor de la base no puede ser negativo:

Para valores de x racionales, cuyo denominador sea par no está definida su solución en los reales.

Ejemplo: $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ $\quad No\ esta\ definido\ para\ los\ reales$

Para valores de x, irracionales, es imposible determinar el signo de la función.

Ejemplo: $(-2)^{\pi}$ $\quad No\ es\ posible\ determinar\ el\ signo$

Con estos contraejemplos podemos afirmar que la base no puede ser negativa.

5.1.3 FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Es aquella que tiene como base el número irracional e ($e \approx 2{,}718281$).

Este número se define como el valor al que tiende la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, cuando n tiende $a\ +\ \infty$.

$Si\ \ n = 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$Si\ \ n = 10 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}593742 \ldots$

$Si\ \ n = 100 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704813 \ldots$

$Si\ \ n = 1000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}716923 \ldots$

$Si\ \ n = 10000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2{,}718145 \ldots$

.

.

.

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281 \ldots$

En cursos avanzados se dará la demostración formal.

5.1.4 GRÁFICA PARA BASE $\mathbf{a} > 1$

Propuesta: Tabular la función exponencial para bases mayores que uno, con la ayuda de un software graficador presentar las gráficas de las tres funciones en un mismo plano cartesiano y analizar mediante una lluvia de ideas las características que se aprecien, puntualizando las que no sean evidentes para los estudiantes.

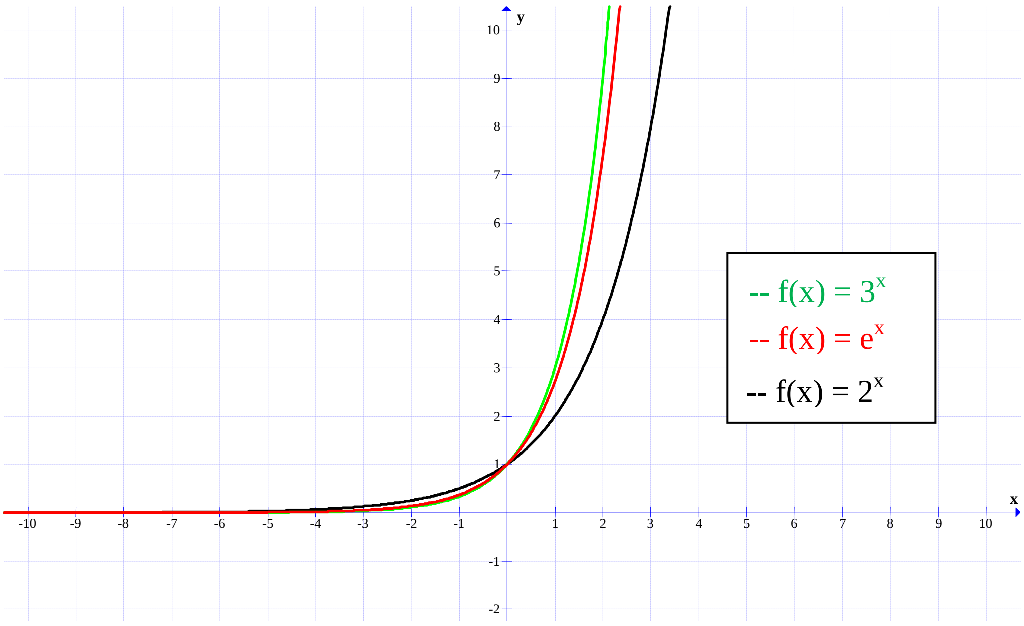
Plan de clase

a) Tabulando $2^x, e^x, 3^x$

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
2^x	0.13	0.25	0.50	1	2	4	8
e^x	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09
3^x	0.04	0.11	0.33	1	3	9	27

b) Graficando tenemos:

Gráfico 12: Gráficas de funciones exponenciales con bases mayores a 1 $(\boldsymbol{a} > 1)$



c) Lluvia de ideas con respecto al gráfico mostrado:

¿Qué encuentra en común en las tres funciones graficadas?

Normalmente responderán:

- Las tres contienen al punto $(0,1)$
- Las tres son crecientes.

¿Qué pasa cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$?

Normalmente responderán:

- Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiende a $+\infty$.
- Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene a 0.

d) Puntualizar

- Se debe aclarar que jamás la función exponencial es igual a 0, pero sí que tiende a 0, por lo que presenta una asíntota horizontal en $y = 0$.
- En la gráfica insistir que se cuide que la función exponencial nunca toca al eje "x" cuando x tiende a $-\infty$ y que mantiene su forma empinada cuando x tiende a $+\infty$.

5.1.5 ¿POR QUÉ LA GRÁFICA DE $\mathbf{f(x) = a^x}$ ES CRECIENTE CUANDO LA BASE $\mathbf{a > 1}$?

Teorema:

Sea f una función con regla de correspondencia $\boldsymbol{f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}}$.

i) Si $a > 1$, → f es estrictamente creciente.

Demostración:

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$\Rightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1$

$\Rightarrow a^{x_1 - x_2} > 1$

$\Rightarrow a^{x_1 - x_2} > a^0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 > 0$

$\Rightarrow x_1 > x_2$ lqqd.

ii) Si $0 < a < 1$, → f es estrictamente decreciente.

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$\Rightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} < 1$

$\Rightarrow a^{x_1 - x_2} < 1$

$\Rightarrow a^{x_1 - x_2} < a^0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 > 0$

$\Rightarrow x_1 > x_2$ lqqd.

5.1.6 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL PARA BASE $\mathbf{a} > 1$

Propuesta: Realizar el análisis de los parámetros de cada una de las funciones llenando el siguiente formato:

PARÁMETROS A EVALUAR EN UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

PARÁMETRO	$\boldsymbol{2^x}$	$\boldsymbol{e^x}$	$\boldsymbol{3^x}$
Dominio			
Rango			
Intersección con el eje "y"			
Intersección con el eje "x"			
Asíntota Horizontal			
Tendencia			
Monotonía			

Plan de clase:

a) Llenar el formato presentado

PARÁMETRO	$\mathbf{2^x}$	$\boldsymbol{e^x}$	$\mathbf{3^x}$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
Intersección con eje "y"	$P(0,1)$	$P(0,1)$	$P(0,1)$
Intersección con eje "x"	No existe	No existe	No existe
Asíntota Horizontal	$y=0$	$y=0$	$y=0$
Tendencia	$Si\ x \to -\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to 0$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$	$Si\ x \to -\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to 0$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$	$Si\ x \to -\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to 0$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$
Monotonía	Creciente $(-\infty,+\infty)$	Creciente $(-\infty,+\infty)$	Creciente $(-\infty,+\infty)$

b) Generalizar a partir de estos ejemplos las características de una función exponencial con base mayor a 1.

5.1.7 GRÁFICA PARA BASE $0 < a < 1$

Propuesta: Tabular la función exponencial para bases mayores que 0 y menores que uno, con la ayuda de un software graficador presentar las gráficas de las tres funciones en un mismo plano cartesiano y analizar mediante una lluvia de ideas las características que se aprecien.

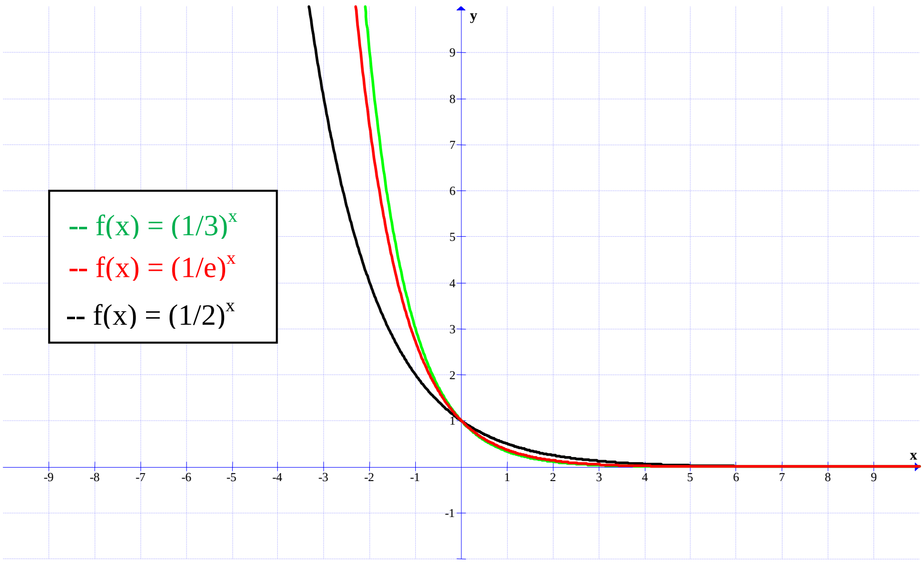
Plan de clase:

a)Tabular $\left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{e}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	0.50	0.25	0.13
$\left(\frac{1}{e}\right)^x$	20.09	7.39	2.72	1	0.37	0.14	0.05
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	0.33	0.11	0.04

b) Graficando tenemos:

Gráfico 13: Gráficas de funciones exponenciales con bases mayores a 0 y menores a 1 $(0 < a < 1)$



c) Lluvia de ideas con respecto al gráfico mostrado:

¿Qué encuentra en común en las tres funciones graficadas?

Normalmente responderán:

- Las tres contienen al punto $(0,1)$
- Las tres son decrecientes.

¿Qué pasa cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$?

Normalmente responderán:

- Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiende a 0.
- Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene a $+\infty$.

5.1.8 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL PARA BASE $0 < a < 1$

Propuesta: Realizar el análisis de los parámetros de cada una de las funciones llenando el siguiente formato:

PARÁMETROS A EVALUAR EN UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

PARÁMETRO	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{e}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
Dominio			
Rango			
Intersección con el eje "y"			
Intersección con el eje "x"			
Asíntota Horizontal			
Tendencia			
Monotonía			

Plan de clase:

a) Llenar el formato presentado

PARÁMETRO	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{e}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
Intersección con eje "y"	$P(0,1)$	$P(0,1)$	$P(0,1)$
Intersección con eje "x"	No existe	No existe	No existe
Asíntota Horizontal	$y=0$	$y=0$	$y=0$
Tendencia	$Si\ x \to -\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to 0$	$Si\ x \to -\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to 0$	$Si\ x \to -\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to 0$
Monotonía	Decreciente $(-\infty,+\infty)$	Decreciente $(-\infty,+\infty)$	Decreciente $(-\infty,+\infty)$

b) Generalizar a partir de estos ejemplos las características de una función exponencial con base mayor a 0 y menor a 1.

5.1.9 FUNCIÓN LOGÍSTICA

"Este modelo es un refinamiento de la función exponencial que expresa analíticamente el fenómeno del crecimiento poblacional. Tanto la especie humana como los animales y vegetales encuentran obstáculos de sobrevivencia, los que aumentan proporcionalmente con relación al exceso de la población total. Esto significa que después de un crecimiento acelerado de la población sobrevendría siempre un período de más lento avance, el que finalmente tendería a estacionarse"[11].

La función logística se define como:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$$
$$x \rightarrow f(x) = \frac{K}{1+Be^{-Ax}}$$

Donde A, B y K son constantes positivas.

Además cumple con las siguientes características:

- Si x tiende a $-\infty$, entonces $f(x)$ tiende a 0; es decir, existe una asíntota horizontal en $y = 0$.

- Si x tiende a $+\infty$, entonces $f(x)$ tiende a K; es decir, existe otra asíntota horizontal en $y = K$.

- $f(x)$ es estrictamente creciente.

En cursos avanzados se dará la demostración formal del modelo.

Para la mejor comprensión del estudiante, se presenta el siguiente ejemplo:

[11] ESPINA MARCONI, L. Serie de Estudios Económicos: El modelo logístico. Santiago de Chile, Enero de 1984.

<u>Problema</u>:

"Cierto día en una universidad asistieron 5000 personas, un estudiante se entero que cierto orador polémico iba a efectuar una presentación no programada. Esta información fue comunicada a algunos amigos quienes a su vez la pasaron a otros. Después de transcurridos x minutos, $f(x)$ personas se habían enterado de la noticia, donde:

$$f(x) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,5x}}$$

a) Bosqueje el gráfico de f.
b) ¿Cuántas personas sabían al inicio $(x = 0)$?
c) ¿Cuántas personas se espera que se enteren de la noticia?"[12]

<u>Solución:</u>

a) Bosqueje el gráfico de f.

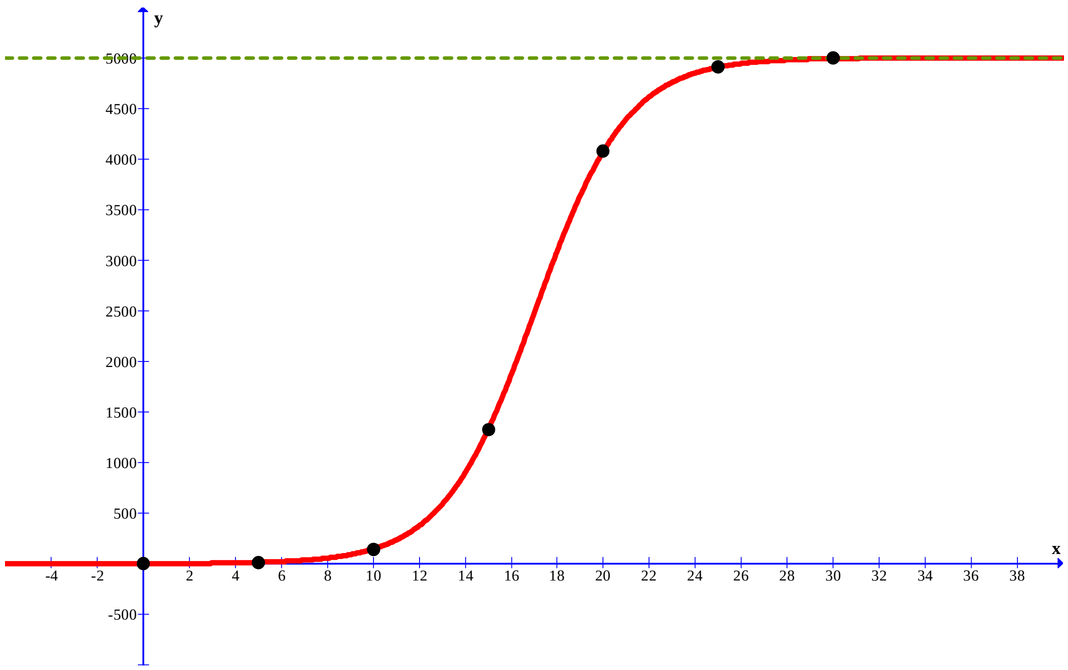
Tabulando algunos valores:

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$	1	12,1	144,1	1328,1	4075,1	4908,5	4992,4

Usando el programa Graph, obtenemos el siguiente gráfico:

[12] LEITHOLD L, Matemáticas previas al cálculo, pag 308 ej. 27

Gráfico 14: Función Logística



b) ¿Cuántas personas sabían al inicio $(x = 0)$?

1 persona

c) ¿Cuántas personas se espera que se enteren de la noticia?

5000 personas, que corresponde a la asíntota horizontal $y = 5000$

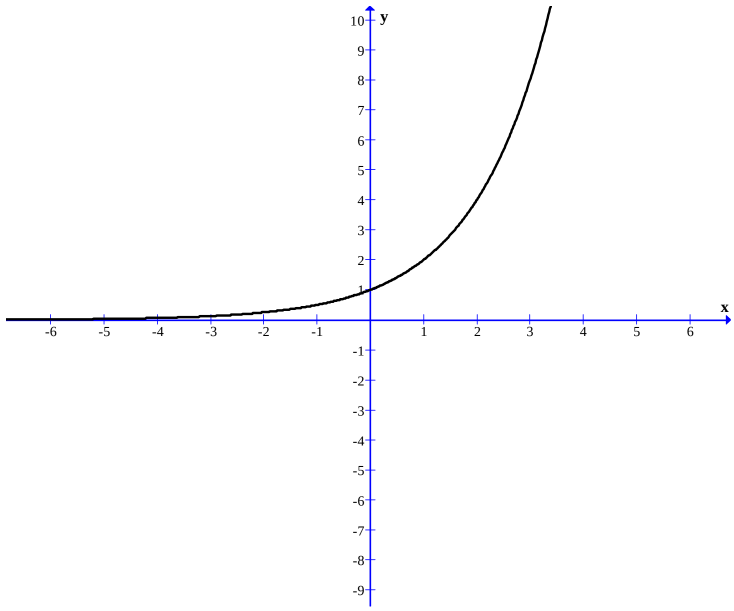
5.1.10 EJERCICIOS DE REFUERZO

Propuesta: Graficar (sin tablas) funciones exponenciales haciendo uso de las técnicas de graficación (cuidando que para obtener los puntos de intersección con los ejes, no se necesite usar logaritmos).

<u>Plan de clase:</u>

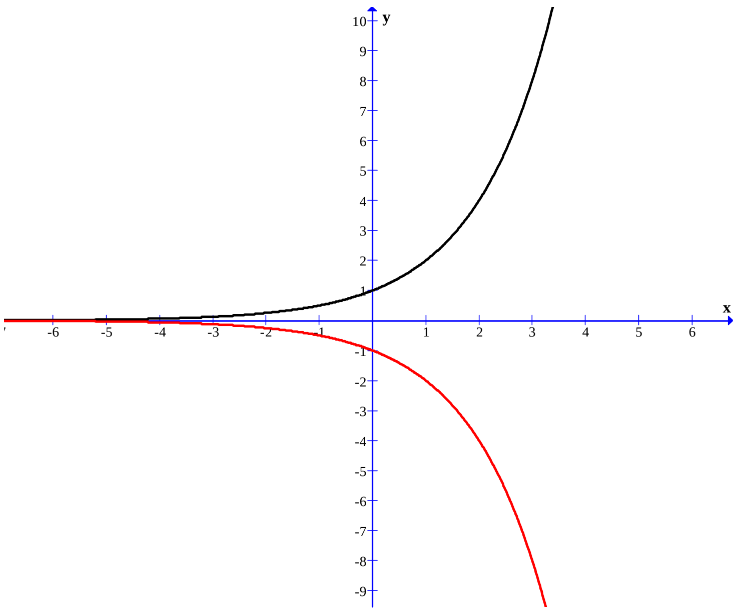
Gráfico 15: Técnicas de graficación para funciones exponenciales

Con respecto a la grafica f de la función $f(x) = 2^x$

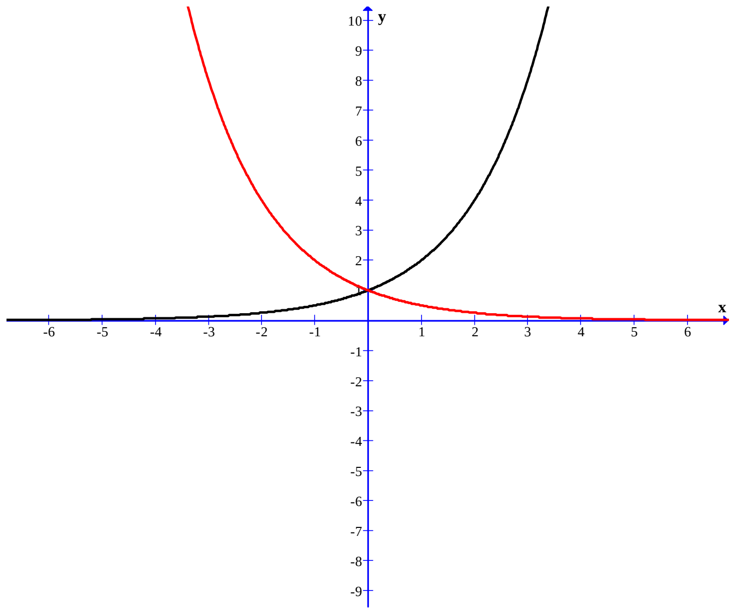


Graficar:

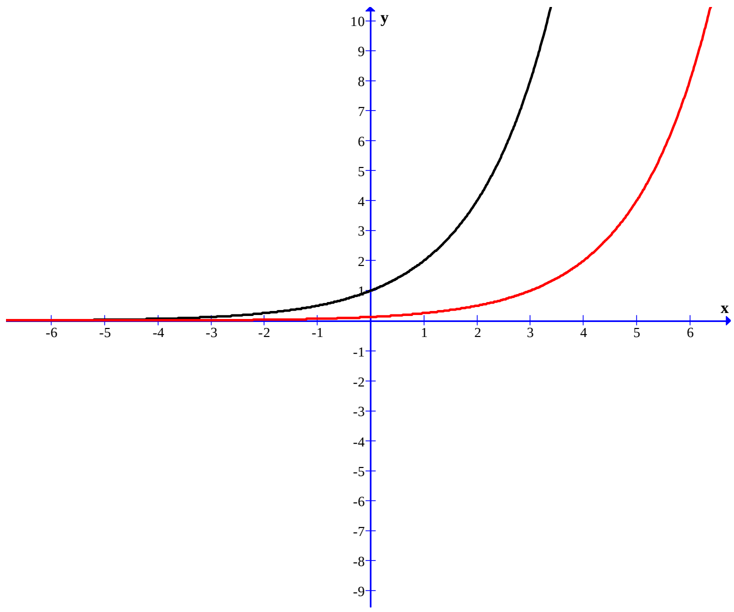
a) $f(x) = -2^x$ Refleja la gráfica f con respecto al eje x.



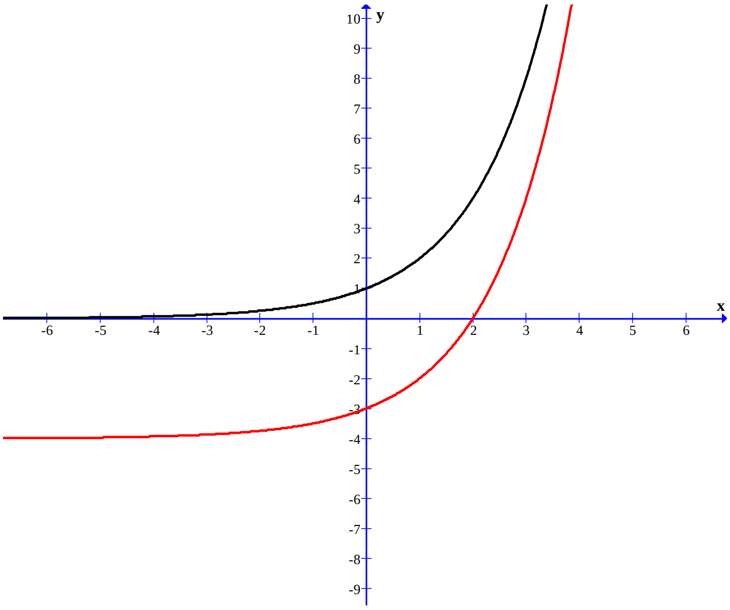
b) $f(x) = 2^{-x}$ Refleja la gráfica f con respecto al eje y.



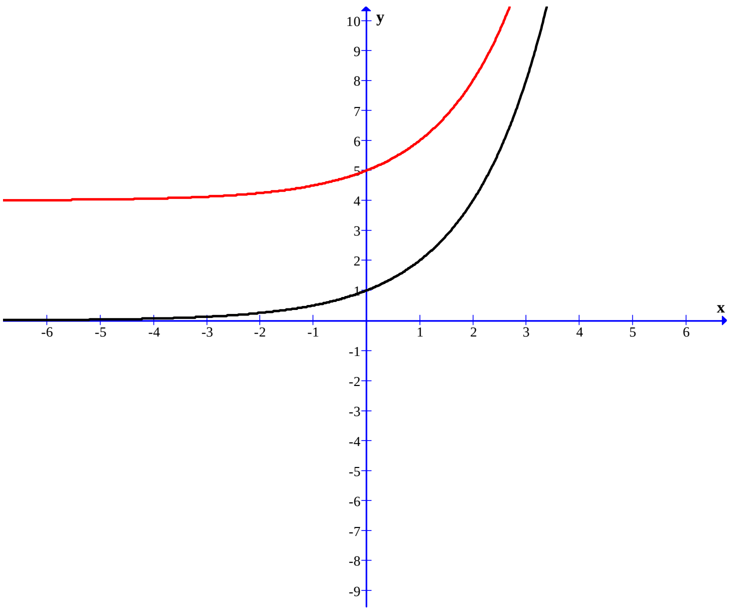
c) $f(x) = 2^{x-3}$ Desplaza la gráfica f 3 unidades hacia la derecha.



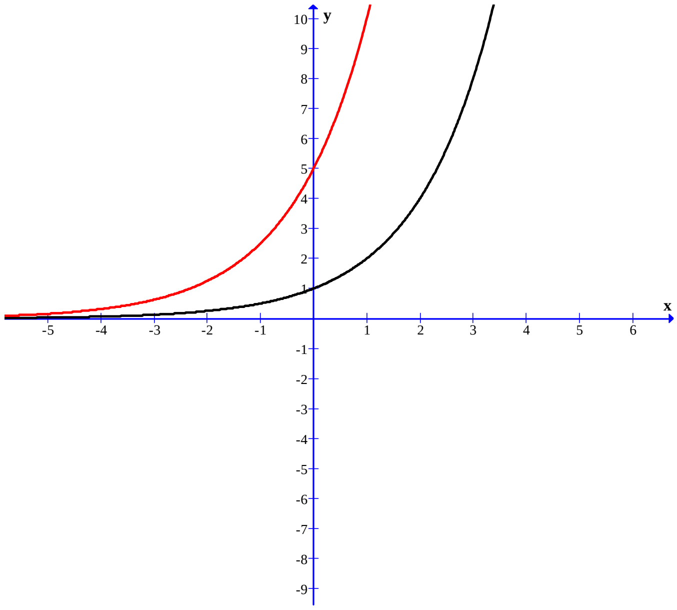
d) $f(x) = 2^x - 4$ Desplaza la gráfica f 4 unidades hacia abajo.



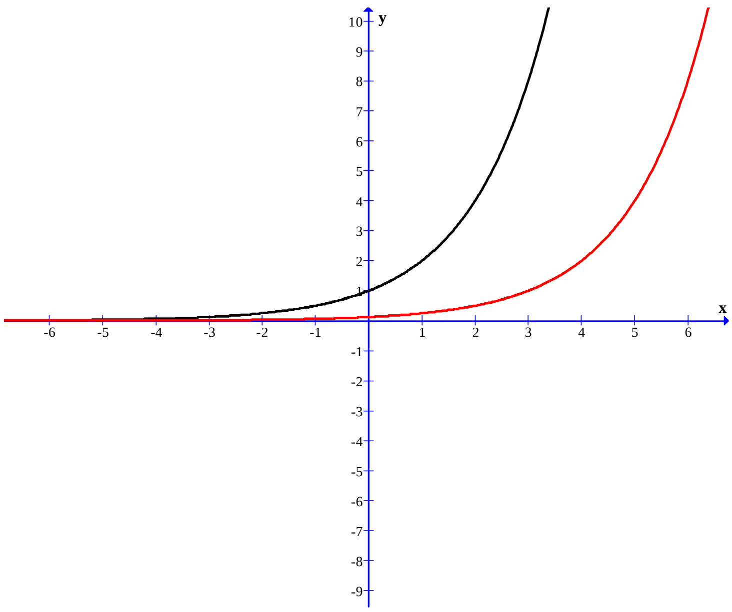
e) $f(x) = 2^x + 4$ Desplaza la gráfica f 4 unidades hacia arriba.



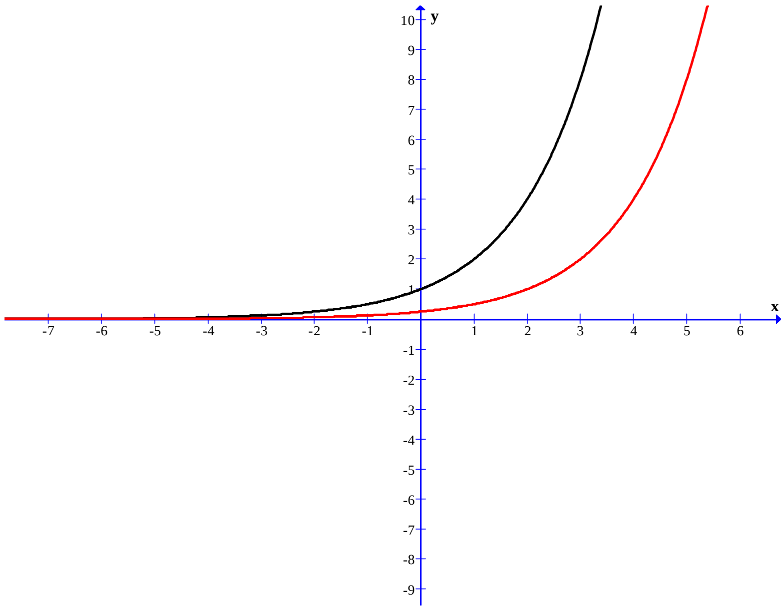
f) $f(x) = 5(2^x)$ Estiramiento de la gráfica f paralelo al eje y.



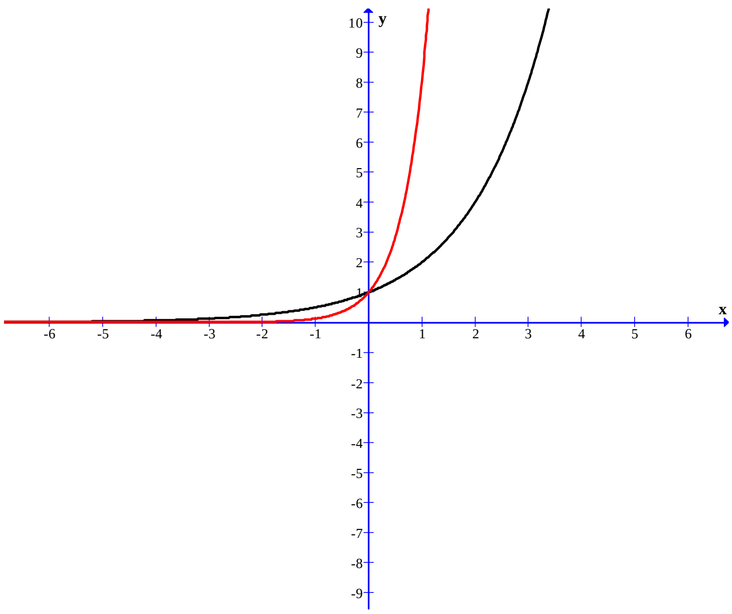
g) $f(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$ Estiramiento de la gráfica f paralelo al eje x.



h) $f(x) = \frac{1}{4}(2^x)$ Contracción de la gráfica f paralela al eje "y".



i) $f(x) = 2^{3x}$ Contracción de la gráfica f paralela al eje "x".



5.2 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

5.2.1 INTRODUCCIÓN A LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Propuesta: Plantear una ecuación exponencial de tal forma que no sea posible desarrollarla con propiedades de exponentes y analizar la situación mediante una lluvia de ideas.

Plan de clase:

a) Hallar el punto de intersección con el eje "x" de la función $f(x) = 2^x - 5$

$y = 2^x - 5$

$0 = 2^x - 5$

$2^x = 5$

b) Lluvia de ideas para hallar con la solución

¿2 elevado a qué exponente es igual a 5?

A partir de este ejemplo, se crea la necesidad de hallar una función inversa a la exponencial.

5.2.2 DEFINICIÓN DE LOGARITMO.

Propuesta: Definir la función logarítmica como inversa de la función exponencial.

Plan de clase:

a) Definición de Logaritmo:

El logaritmo de un número es el exponente al que debemos elevar una base para obtener dicho número.

$f^{-1}: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$

$x \to f^{-1}(x) = \log_a x ;\ \ x > 0; a > 0, a \neq 1$

LOGARITMO: INVERSA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

x	$f(x) = 2^x$	$y = f(x)$		x	$f^{-1}(x) = \log_2 x$	$y = f^{-1}(x)$
1	2^1	2		2	$\log_2 2$	1
2	2^2	4		4	$\log_2 4$	2
x	2^x	5		5	$\log_2 5$	x
2.5	$2^{2.5}$	$\sqrt{32}$		$\sqrt{32}$	$\log_2 \sqrt{32}$	2.5
3	2^3	8		8	$\log_2 8$	3

5.2.3 GRÁFICA PARA BASE a > 1

Propuesta: Tabular la función Logarítmica para bases mayores que uno, con la ayuda de un software graficador presentar las gráficas de las tres funciones en un mismo plano cartesiano y analizar mediante una lluvia de ideas las características que se aprecien, puntualizando las que no sean evidentes para los estudiantes.

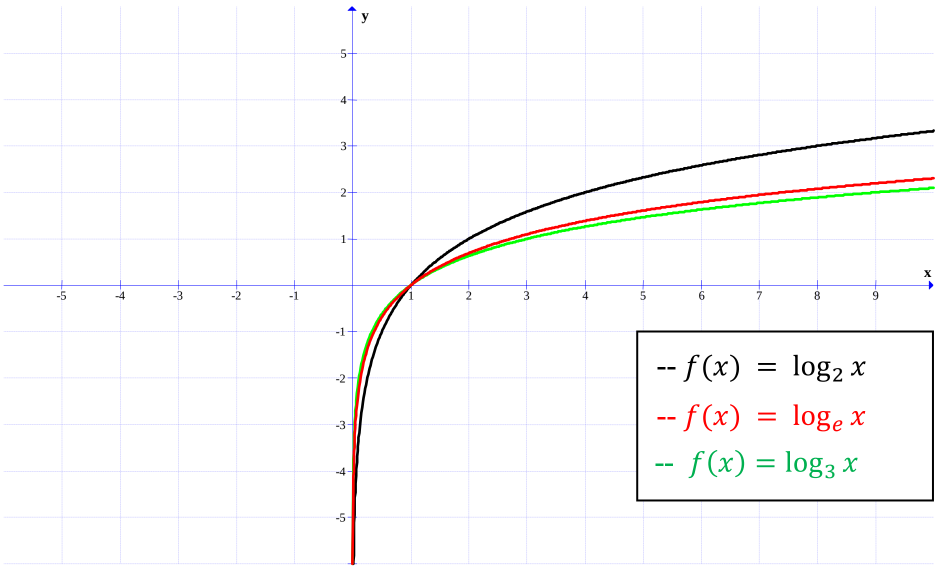
Plan de clase:

a) Tabular $\log_2 x, \log_e x, \log_3 x$

x	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$\log_e x$	-1.39	-0.69	0	0.69	1.39	2.08	2.77
$\log_3 x$	-1.26	-0.63	0	0.63	1.26	1.89	2.52

b) Graficando tenemos:

Gráfico 16: Gráficas de funciones logarítmicas con bases mayores a 1 $(a > 1)$



c) Lluvia de ideas con respecto al gráfico mostrado:

¿Qué encuentra en común en las tres funciones graficadas?

Normalmente responderán:

- Las tres funciones contienen al punto $(1{,}0)$
- Las tres funciones son crecientes.
- El dominio de las tres funciones son los reales positivos.

¿Qué pasa cuando x tiende a 0?

Normalmente responderán:

- Cuando x tiende a 0 la función tiende a $-\infty$.

d) Puntualizando:

¿Por qué x no puede ser menor o igual que 0, como se aprecia en las tres gráficas?

- Generalmente nadie puede explicar en forma conveniente.

Aclaración del profesor con ayuda de la siguiente tabla:

-1 -1 -1 -1 -1

.	.	.	2^{-2}	2^{-1}	2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	.	.	.
.	.	.	¼	½	1	2	4	8	.	.	.

÷ 2 ÷ 2 ÷ 2 ÷ 2 ÷ 2

$y = \log_2 x \;\Rightarrow\; 2^y = x$

¿Es posible que 2 elevado a algún exponente de resultado negativo o cero?

No es posible, por lo tanto los valores de x sólo pueden ser positivos.

5.2.4 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA PARA BASE $\mathbf{a} > 1$

Propuesta: Realizar el análisis de los parámetros de cada una de las funciones llenando el siguiente formato:

PARÁMETROS A EVALUAR EN UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

PARÁMETRO	$\log_2(x)$	$ln(x)$	$\log_3(x)$
Dominio			
Rango			
Intersección con el eje "y"			
Intersección con el eje "x"			
Asíntota horizontal			
Tendencia			
Monotonía			

<u>Plan de clase:</u>

a) Llenar formato presentado

PARÁMETRO	$\log_2(x)$	$ln(x)$	$\log_3(x)$
Dominio	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
Rango	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Intersección con eje "y"	No existe	No existe	No existe
Intersección con eje "x"	P(1,0)	P(1,0)	P(1,0)
Asíntota Vertical	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$

Tendencia	$Si\ x \to 0,$ $\Longrightarrow f(x) \to -\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Longrightarrow f(x) \to +\infty$	$Si\ x \to 0,$ $\Longrightarrow f(x) \to -\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Longrightarrow f(x) \to +\infty$	$Si\ x \to 0,$ $\Longrightarrow f(x) \to -\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Longrightarrow f(x) \to +\infty$
Monotonía	$Creciente$ $(0, +\infty)$	$Creciente$ $(0, +\infty)$	$Creciente$ $(0, +\infty)$

b) Generalizar a partir de estos ejemplos las características de una función logarítmica con base mayor a 1.

5.2.5 GRÁFICA PARA BASE $0 < a < 1$

Propuesta: Tabular la función Logarítmica para bases entre 0 y 1, con la ayuda de un software graficador presentar las gráficas de las tres funciones en un mismo plano cartesiano y analizar mediante una lluvia de ideas las características que se aprecien, puntualizando las que no sean evidentes para los estudiantes.

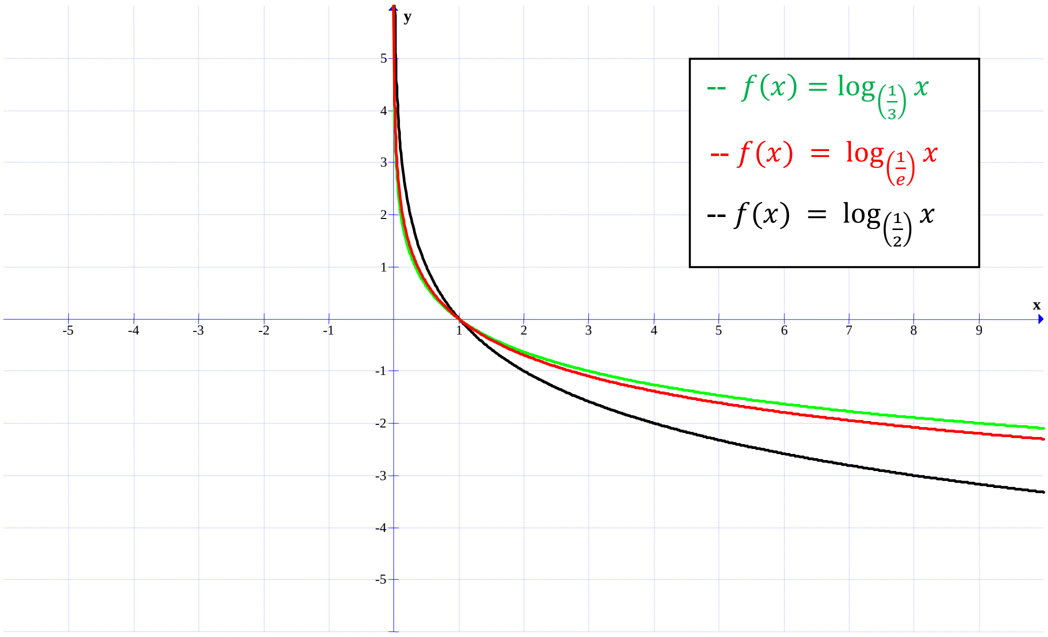
<u>Plan de clase:</u>

a) Tabular $\log_{1/2}(x), \log_{1/e}(x), \log_{1/3}(x)$

x	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**
$\log_{1/2}(x)$	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$\log_{1/e}(x)$	1.39	0.69	0	-0.69	-1.39	-2.08	-2.77
$\log_{1/3}(x)$	1.26	0.63	0	-0.63	-1.26	-1.89	-2.52

b) Graficando tenemos:

Gráfico 17: Gráficas de funciones logarítmicas con bases mayores a 0 y menores a 1 $(0 < a < 1)$



c) Lluvia de ideas con respecto al gráfico mostrado:

¿Qué encuentra en común en las tres funciones graficadas?

Normalmente responderán:

- Las tres funciones contienen al punto $(1{,}0)$
- Las tres funciones son decrecientes.
- El dominio de las tres funciones son los reales positivos.

¿Qué pasa cuando x tiende a 0?

Normalmente responderán:

- Cuando x tiende a 0 la función tiende a $+\infty$.

5.2.6 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA PARA BASE $0 < a < 1$

Propuesta: Realizar el análisis de los parámetros de cada una de las funciones llenando el siguiente formato:

PARÁMETROS A EVALUAR EN UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

PARÁMETRO	$\log_{1/2}(x)$	$\log_{1/e}(x)$	$\log_{1/3}(x)$
Dominio			
Rango			
Intersección con el eje "y"			
Intersección con el eje "x"			
Asíntota horizontal			
Tendencia			
Monotonía			

<u>Plan de clase:</u>

a) Llenar el formato presentado

PARÁMETRO	$\log_2(x)$	$ln(x)$	$\log_3(x)$
Dominio	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
Rango	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Intersección con eje "y"	No existe	No existe	No existe
Intersección con eje "x"	$P(1,0)$	$P(1,0)$	$P(1,0)$
Asíntota Vertical	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$

Tendencia	$Si\ x \to 0,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to -\infty$	$Si\ x \to 0,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to -\infty$	$Si\ x \to 0,$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty,$ $\Rightarrow f(x) \to -\infty$
Monotonía	$Decreciente$ $(0, +\infty)$	$Decreciente$ $(0, +\infty)$	$Decreciente$ $(0, +\infty)$

b) Generalizar a partir de estos ejemplos las características de una función logarítmica con base mayor a 0 y menor a 1.

5.2.7 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Propuesta: Demostrar las propiedades de logaritmos.

Propiedades de logaritmos

1) $\log_a a = 1$
   Demostración:
   $\log_a a = 1$; por definición $a^1 = a$

2) $\log_a 1 = 0$
   Demostración:
   $\log_a 1 = 0$; por definición $a^0 = 1$

3) $a^{\log_a x} = x;\ x > 0$
   Demostración:
   Si $a^y = x$, entonces por definición de logaritmo
   $y = \log_a x$
   Reemplazando “y” en la expresión original tenemos:
   $a^{\log_a x} = x$

4) $\log_a(u.v) = \log_a u + \log_a v\,; \quad u > 0 \wedge v > 0$

Demostración:

Si $p = \log_a u$ y $q = \log_a v$,

entonces escribiendo en forma exponencial

$a^p = u$ y $a^q = v$

Multiplicamos miembro a miembro las dos igualdades

$$\begin{array}{c} a^p = u \\ \underline{a^q = v} \\ a^{p+q} = u.v \end{array}$$

Escribiendo en forma logarítmica

$p + q = \log_a(u.v)$, reemplazando p y q

$\log_a u + \log_a v = \log_a(u.v)$

5) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v\,; \quad u > 0 \wedge v > 0$

Demostración:

Si $p = \log_a u$ y $q = \log_a v$,

entonces escribiendo en forma exponencial

$a^p = u$ y $a^q = v$

Dividimos miembro a miembro las dos igualdades

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{u}{v}$$

$$a^{p-q} = \frac{u}{v}$$

Escribiendo en forma logarítmica

$p - q = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$, reemplazando p y q

$\log_a u - \log_a v = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$

6) $\log_a(u^n) = \text{n}.\log_a u;\ n \epsilon \mathbb{R}$

Demostración:

Si $\quad p = \log_a u$

entonces escribiendo en forma exponencial

$a^p = u$

Elevando los dos miembros de la igualdad a la potencia n

$(a^p)^n = u^n$

$a^{n.p} = u^n$

Escribiendo en forma logarítmica

$n.p = \log_a(u^n)$, reemplazando p

$n.\log_a u = \log_a(u^n)$

7) $\log_u v = \frac{\log_a v}{\log_a u}\ ;\ u > 0\ \wedge v > 0$

Demostración:

Si $\quad p = \log_u v$

entonces escribiendo en forma exponencial

$u^p = v$

Aplicando logaritmo en base “a“ a los dos miembros

$\log_a(u^p) = \log_a v$ Aplicando logaritmo de una potencia

$p.\log_a u = \log_a v$ Despejando p

$p = \frac{\log_a v}{\log_a u}$ reemplazando p

$\log_u v = \frac{\log_a v}{\log_a u}$

5.2.8 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Propuesta: presentar las formas de solución a problemas tipo que involucren funciones exponenciales y logarítmicas.

a) Ecuaciones exponenciales

Definición: Ecuación exponencial es una igualdad en la que la variable o incógnita se encuentra como exponente por lo menos en un término.

Tipos de ecuaciones exponenciales

Tipo 1: Los dos lados de la ecuación pueden ser expresados como una potencia de la misma base.

$a^x = a^y \Rightarrow x = y$

Ejemplo:

$3^x \,.\, 3^{x+1} = 3^{3x-2}$

$x + x + 1 = 3x - 2$

$x = 3$

$2^{5y^2-6y} = 256$

$2^{5y^2-6y} = 2^8$

$5y^2 - 6y = 8$

$(y-2)(5y+4) = 0$

$y = 2 \lor y = -\frac{4}{5}$

Tipo 2: Cuando los dos lados de la ecuación no se pueden expresar como potencias de la misma base.

$a^x = b,\ a \neq b; a > 0 \wedge b > 0$

Aplicando logaritmo de base “a” a ambos lados de la ecuación:

$\log_a a^x = \log_a b$

$x = \log_a b$

$x = \frac{\log b}{\log a}$

Ejemplo:

$5^{3x} = 7$ Aplicando logaritmo de base 5 a ambos miembros

$\log_5 5^{3x} = \log_5 7$ Aplicando logaritmo de una potencia

$3x = \log_5 7$

$x = \frac{\log_5 7}{3}$

$x \approx 0.4030$

<u>Tipo 3</u>: En la que se debe aplicar cambio de variable:

$a(p^x)^2 + b(p^x) + c = 0$

$p^x = y$ reemplazando

$ay^2 + by + c = 0$ y se convierte en una ecuación cuadrática que se resuelve por cualquier método conocido.

Regresamos a la variable inicial:

$x = \log_p y$ en caso exista.

Ejemplo:

$4e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$

Cambio de variable $e^x = y$, reemplazando

$4y^2 - 5y - 6 = 0$

$(y-2)(4y+3) = 0$

$y = 2 \lor y = -\frac{3}{4}$

Regresamos a la variable inicial:

$e^x = 2 \quad \lor \quad e^x = -\frac{3}{4}$

$x = \ln 2$ No existe

b) Ecuaciones logarítmicas

<u>Definición</u>: Ecuación logarítmica es una igualdad en la que la variable se encuentra como base o argumento en una expresión logarítmica.

<u>Tipos de ecuaciones logarítmicas</u>

<u>Tipo 1</u>: Cuando la variable se encuentra en la base del logaritmo.

$\log_{ax} b = c$ Expresado en forma exponencial

$(ax)^c = b$

$x = \frac{b^{\frac{1}{c}}}{a}$

Ejemplo

$\log_x 49 - \log_x 7 = 4$

$2\log_x 7 - \log_x 7 = 4$

$\log_x 7 = 4$

$x^4 = 7$

$|x| = (7)^{\frac{1}{4}}$

$x = (7)^{\frac{1}{4}} \quad \vee \quad x = -(7)^{\frac{1}{4}}$

<u>Tipo 2</u>: Cuando la variable se encuentra en el argumento del logaritmo.

Para su solución hay que aplicar las propiedades de los logaritmos.

Ejemplos:

1) $\mathbf{p(x)}: \mathbf{\log(x^2+4) - \log(x+2) = 3 + \log(x-2)}, \ \boldsymbol{Re} = (\mathbf{2}, +\infty)$

$\log(x^2+4) - [\log(x+2) + \log(x-2)] = 3$

Aplicando logaritmo de un producto:

$\log(x^2+4) - \log(x+2)(x-2) = 3$

Aplicando logaritmo de un cociente:

$\log\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right) = 3$ Escribiendo de forma exponencial

$10^3 = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

$1000x^2 - 4000 = x^2 + 4$

$999x^2 = 4004$

$|x| = \left(\frac{4004}{999}\right)^{\frac{1}{2}}$

$x = \left(\frac{4004}{999}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \vee \quad x = -\left(\frac{4004}{999}\right)^{\frac{1}{2}}$

$x \approx 2{,}0020 \qquad \vee \qquad x = -2{,}0020 \; (\,no\ es\ solución)$

$Ap(x) = \left\{ \left(\frac{4004}{999}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$

2) $\boldsymbol{q(x)}\text{: } \mathbf{log}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}) = (\mathbf{log}\, \boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}; \boldsymbol{x} > 0$

Aplicando logaritmo de una potencia

$2\log x = (\log x)^2$

Igualando a cero

$0 = (\log x)^2 - 2\log x$

Factor común

$0 = \log x\,(\log x - 2)$

$\log x = 0 \qquad \vee \qquad \log x = 2$

$x = 1 \qquad\qquad x = 100$

$Aq(x) = \{1{,}100\}$

Evalúe x en términos de y

$r(x)\text{: } y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \neq 0$

Cambiando a exponente positivo

$y = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}}$ Simplificando

$y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ Despejando

$y\,(e^{2x} - 1) = e^{2x} + 1$ Reagrupando términos

$e^{2x}(y - 1) = y + 1$ Despejando x

$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$

$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$; para $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

5.2.9 MODELOS MATEMÁTICOS: INTERÉS COMPUESTO

Propuesta: Poner énfasis en entender el comportamiento del interés compuesto debido a su importancia económica.

Introducción al Interés compuesto

Cuando se deposita dinero en una póliza, la Institución financiera paga un cierto interés.

¿Cuánto dinero se obtendrá después de un cierto número de años, si al final de cada año no se retira el interés ganado sino que se agrega al capital?

Definamos los parámetros que intervienen en el problema.

P: El dinero depositado al inicio en la póliza.
r: El interés anual que paga la Institución Financiera, dada en porcentaje.

t: Número de años.

A: Monto total compuesto por el depósito inicial más los intereses ganados en t años.

Demostración de la fórmula del Interés Compuesto

<u>Al inicio del depósito:</u>

$A = P$

<u>Después de 1 año</u>:

$A = P + rP$

$A = P(1+r)$

<u>Después de 2 años</u>:

$A = P(1+r) + r[P(1+r)]$

$A = P(1+r)(1+r)$

$A = P(1+r)^2$

<u>Después de 3 años</u>:

$A = P(1+r)^2 + r[P(1+r)^2]$

$A = P(1+r)^2(1+r)$

$A = P(1+r)^3$

.

.

.

<u>Después de t años</u>:

$A = P(1+r)^t$

Respuesta:

Después de t años el total de dinero obtenido será: $A = P(1+r)^t$

Si en lugar de capitalizar (capital + interés ganado) cada año, se escogen periodos de tiempo más cortos. ¿Cómo sería el comportamiento de la fórmula del interés compuesto?

<u>Si es semestral</u>

La tasa de interés se tiene que dividir entre 2 y el tiempo de capitalización será $2t$ (En 1 año hay 2 semestres)

La nueva fórmula del interés compuesto será:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}$$

VARIACIÓN DE LA FÓRMULA DEL INTERÉS COMPUESTO SEGÚN EL PERÍODO DE CAPITALIZACIÓN

PERIODO DE CAPITALIZACIÓN DEL INTERÉS	**VARIACIÓN DE LA FÓRMULA DEL INTERÉS COMPUESTO**
Semestral	$A = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}$
Trimestral	$A = P\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4t}$
Mensual	$A = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$
Semanal	$A = P\left(1 + \frac{r}{52}\right)^{52t}$
Diario	$A = P\left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365t}$
n veces	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

Entonces, la fórmula para el interés compuesto cuando se capitaliza n veces en el año es:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Esta fórmula puede reescribirse como:

$$A = P\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}.r.t}$$

Cambiando $m = \frac{n}{r}$ quedaría:

$$A = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Es decir, si m tiende a ser un valor grande, entonces podemos escribir la fórmula como función exponencial natural.

$$A = Pe^{rt}$$

Como observaremos más adelante, un sinnúmero de funciones exponenciales de los problemas de aplicación utiliza la base e.

5.2.10 MODELOS MATEMÁTICOS

Propuesta: Presentar problemas sobre funciones exponenciales y logarítmicas de la vida real.

Tipos de problemas de aplicación:

- Intensidad de un sismo (Energía liberada)
- Decaimiento radioactivo
- Crecimiento poblacional (personas, bacterias, procesos infecciosos)
- Decrecimiento de sustancias
- Depreciación de vehículos.
- Enfriamiento de un cuerpo.
- Intensidad del sonido.
- PH

5.3 PROPUESTA PEDAGÓGICA BASADA EN TALLERES

Nuestra propuesta es: a partir de la solución de problemas reales que involucren el uso de funciones exponenciales y logarítmicas, complementar y/o construir los conceptos asociados a dichas funciones.

5.3.1 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Planteamiento del Problema 1: Tendencias Demográficas en India[13]

Objetivo: Investigar las distintas funciones que modelizan más adecuadamente la población de India de 1950 a 2010.

POBLACIÓN EN INDIA

AÑOS	"x" **TIEMPO (en años)**	"y" **POBLACIÓN (millones de habitantes)**
1950	0	370
1960	10	445
1970	20	554
1980	30	685
1990	40	838
2000	50	1004
2010	60	1173

La población de India, es tomada de una Oficina del Censo de EEUU[14].

[13] Ver pág. 46
[14] http:/ /www.census.gov/cgibin/ipc/idbsum.pl?cty= IN.

1. Defina los parámetros y variables pertinentes. Sitúe los puntos dados en una gráfica.
2. ¿Qué tipo de funciones podrían modelizar el comportamiento de la gráfica? Explique sus elecciones.
3. Determine analíticamente las funciones que se ajustan a los puntos de la gráfica.
4. Analice sobre el grado de ajuste de los modelos obtenidos con respecto a los datos originales.
5. Haga un análisis comparativo de las implicaciones de cada uno de los modelos en lo que respecto al crecimiento de la población de India en el futuro.

5.3.2 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 1:

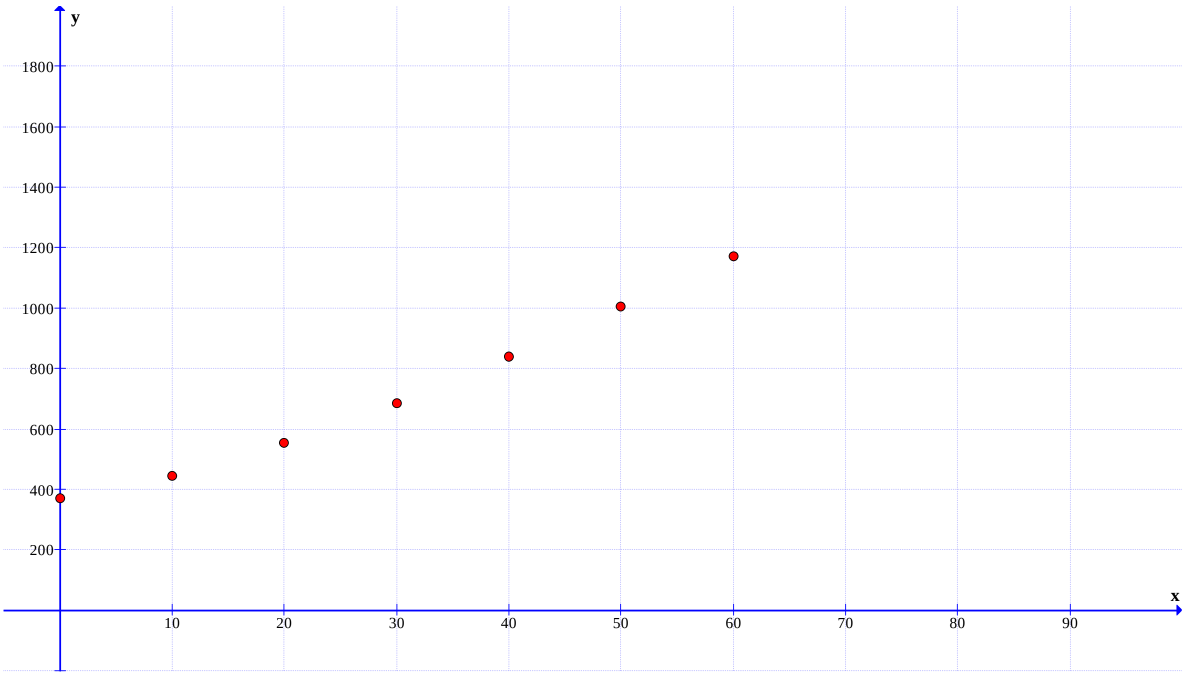
1. **Defina los parámetros y variables pertinentes. Sitúe los puntos dados en una gráfica.**

<u>Variables</u>

El eje de las abscisas “x” representa el tiempo transcurrido en años tomando 1950 como año 0.

El eje de las ordenadas "y" representa la población de India en millones de habitantes.

Gráfico 18: Población de India



2. **¿Qué tipo de funciones podrían modelizar el comportamiento de la gráfica? Explique sus elecciones.**

   De acuerdo a la tendencia de la gráfica vamos a modelizar las funciones: lineal, cuadrática, exponencial y logística porque son las que se ajustan al gráfico anterior.

3. **Determine analíticamente las funciones que se ajustan a los puntos de la gráfica.**

   Modelizando como una función lineal

   Se escogen de la tabla 2 puntos significativos: $A(10{,}445)$; $B(50{,}1004)$.

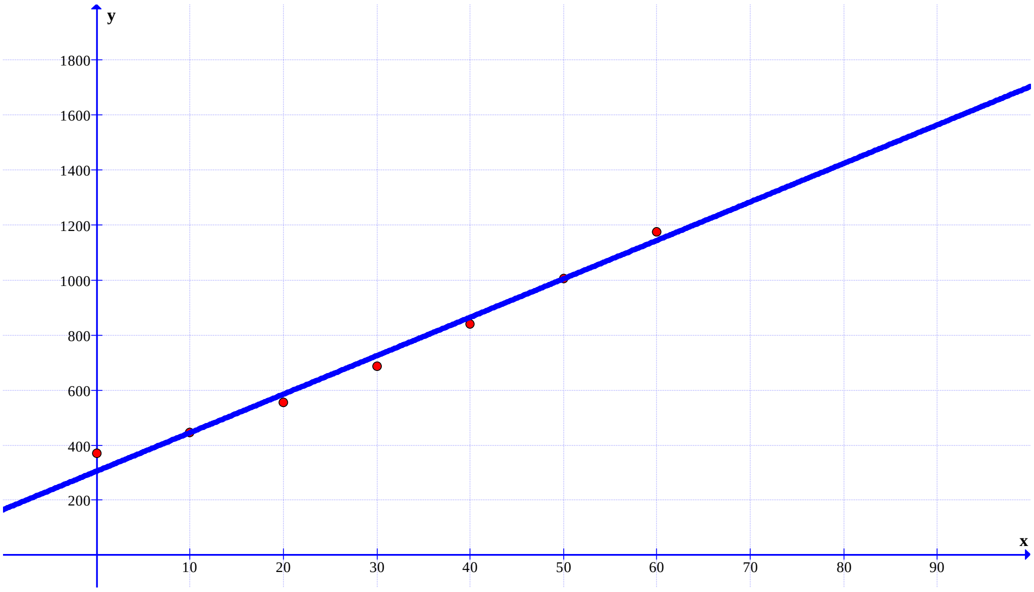
   Siendo la ecuación de la función lineal: $y = ax + b$
   Obtenemos los valores de a y b resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

   $10a + b = 445$
   $50a + b = 1004$

   $a = 13.975$
   $b = 305.25$

   La función lineal es: $y = 13.975\,x + 305.25$
   Utilizando el programa Graph, se obtiene su gráfica:

Gráfico 19: Modelo Lineal de la Población de India



<u>Modelizando como una función cuadrática</u>

Se escoge de la tabla 3 puntos significativos: $A(0,370)$; $B(30,685)$; $C(60,1173)$.

Siendo la ecuación de la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$
Obtenemos los valores de a, b y c resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$c = 370$

$900a + 30b + c = 685$

$3600a + 60b + c = 1173$

$a = 0.0961$

$b = 7.6166$

$c = 370$

La función cuadrática es: $y = 0.0961x^2 + 7.6166x + 370$

Utilizando el programa Graph, se obtiene su gráfica:

Gráfico 20: Modelo Cuadrático de la Población de India

<u>Modelizando como una función exponencial</u>

Se escogen de la tabla 2 puntos significativos: $A(0{,}370)$; $B(50{,}1004)$.

Siendo la ecuación de la función exponencial: $y = a\,(b)^x$

Obtenemos los valores de a y b resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$370 = a\,(b)^0$

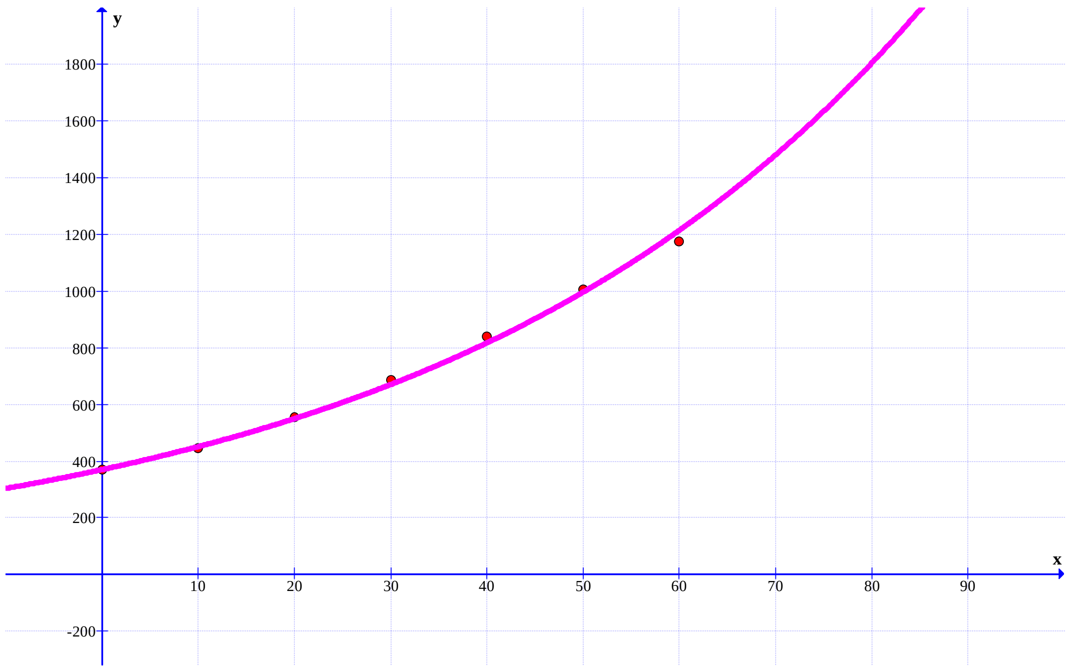
$1004 = a\,(b)^{50}$

$a = 370$

$b = 1.02$

La función exponencial es: $y = 370\,(1.02)^x$, siendo su gráfica:

Gráfico 21: Modelo Exponencial de la Población de India



<u>Modelizando como una función Logística</u>

$$y = \frac{K}{1 + Be^{-At}}$$

Donde:

K: Máximo valor posible que puede alcanzar la población

B: Constante de integración que depende en cada caso del conjunto de datos

A: Cambio del crecimiento.

Para hallar los parámetros A, K, B; elegimos tres puntos equidistantes.

$P0\ (0{,}370)$

$P1\ (30{,}685)$

$P2\ (60{,}1173)$

Las constantes A, B y K se obtienen de la siguiente manera:[15]

El valor de A se calcula de la solución de la expresión:

$e^{-Ah} = \frac{y_0(y_2-y_1)}{y_2(y_1-y_0)}$; $\quad h = t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = 30$

$A = 0{,}0258$

El valor de K se calcula de la solución de la siguiente expresión:

$K = \frac{(e^{-Ah}-1)y_0y_1}{y_1e^{-Ah}-y_0}$

$K = 2\,999{,}2188$

El valor de B se calcula de la solución de la siguiente expresión:

$B = \frac{K}{y_0} - 1$

$B = 7{,}3312$

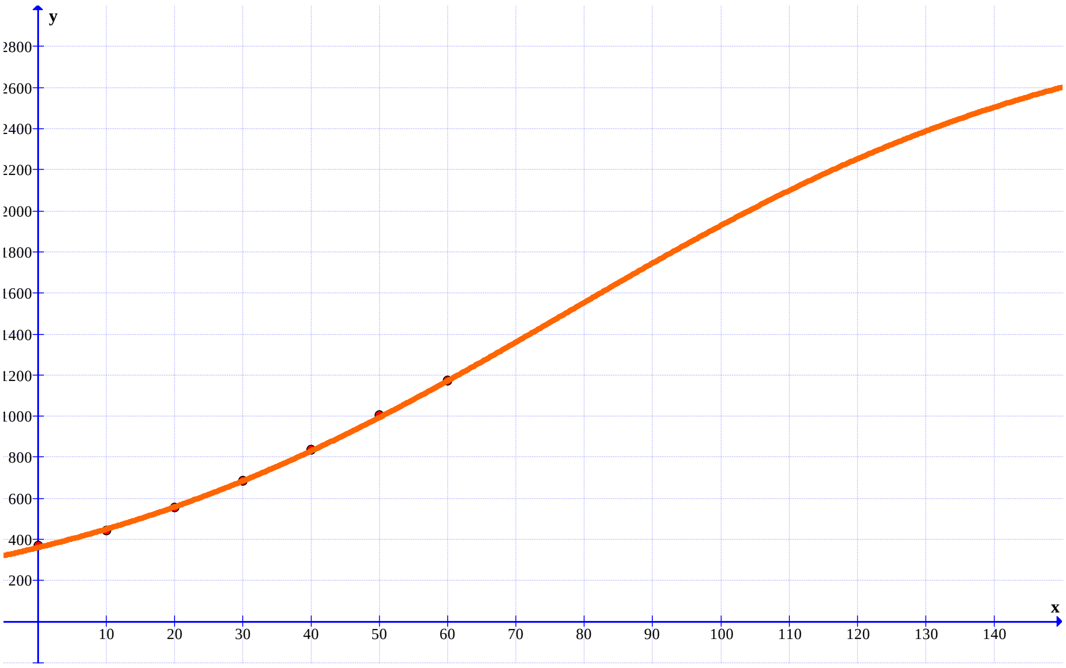
Entonces la función logística para la población de la India es:

$y = \frac{2\,999{,}2188}{1+7{,}3312e^{-0{,}0258\,t}}$

Su gráfica obtenida con Graph.

[15] ESPINA MARCONI, L. Serie de Estudios Económicos: El modelo logístico. Santiago de Chile, Enero de 1984, pp. 11 - 12

Gráfico 22: Modelo Logístico de la Población de India



4. **Analice sobre el grado de ajuste de los modelos obtenidos con respecto a los datos originales.**

<u>Modelo: Función Lineal</u>

Si analizamos su monotonía, la función lineal es creciente desde $-\infty$ hasta $+\infty$; puesto que se trata de una población, su monotonía no se ajusta a la realidad porque no existe una población negativa y tampoco podría haber una población infinita ya que existen límites al crecimiento.

<u>Modelo: Función Cuadrática</u>

El gráfico de la función cuadrática se ajusta mejor a los datos reales; sabemos que su tendencia hacia $+\infty$ es estrictamente creciente, por lo que sólo es válida para predecir en un corto plazo.

Modelo: Función Exponencial

Esta función se ajusta a la realidad porque supone un crecimiento desde un valor mínimo, que tiende a cero; sin embargo al analizar a futuro su tendencia es hacia $+\infty$. Sería un modelo confiable si se pudiera asegurar crecimientos continuos; al tratarse del número de habitantes de India, no se puede asegurar un continuo crecimiento debido a los desastres naturales, epidemias, etc.

Modelo: Función Logística

La función logística es un refinamiento de la función exponencial, que considera un crecimiento amortiguado tomando en cuenta posibles catástrofes, epidemias, falta de alimentos etc.

Esta función gráficamente se ajusta bien a los datos reales, por lo que es válida para predecir a mediano y largo plazo.

5. **Haga un análisis comparativo de las implicaciones de cada uno de los modelos en lo que respecta al crecimiento de la población de India en el futuro.**

Gráfico 23: Comparación de los 4 modelos propuestos para la Población de India

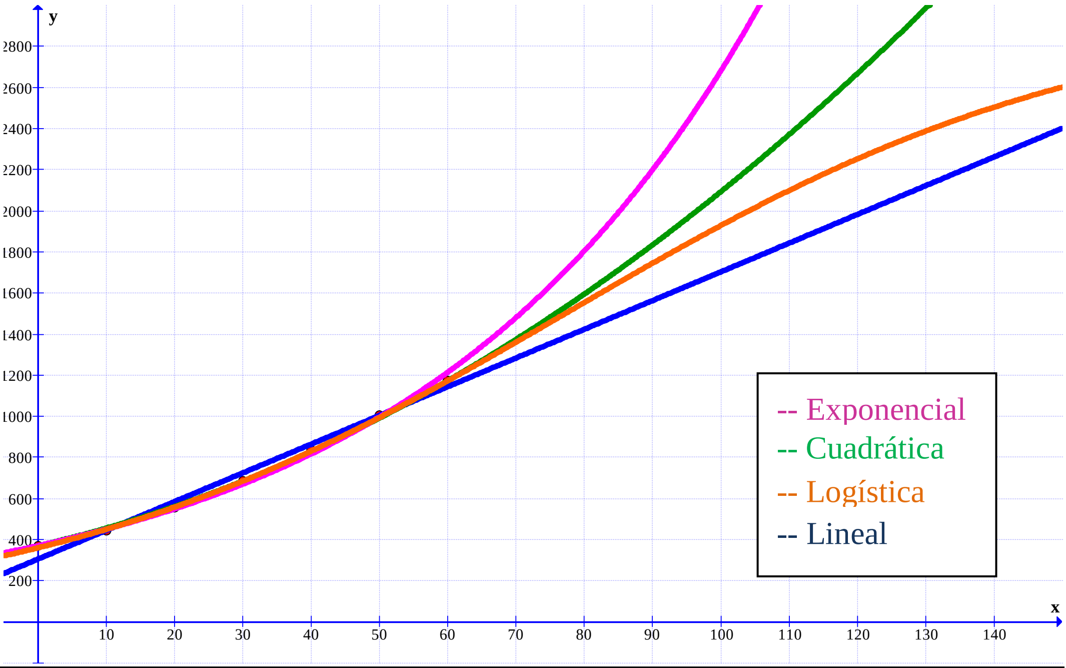


TABLA COMPARATIVA DE LAS FUNCIONES FORMULADAS PARA LA POBLACIÓN DE INDIA

Año	x	REAL	LINEAL	CUADRÁTICA	EXPONENCIAL	LOGÍSTICA
1950	0	370	305,3	370,0	370,0	360,0
1960	10	445	445,0	455,8	451,0	450,1
1970	20	554	584,8	560,8	549,8	557,9
1980	30	685	724,5	685,0	670,2	684,6
1990	40	838	864,3	828,4	817,0	830,3
2000	50	1004	1004,0	991,1	995,9	993,8
2010	60	1173	1143,8	1173,0	1214,0	1172,0

Para poder elegir el modelo que mejor se ajusta al conjunto de datos utilizaremos el método de la suma de los cuadrados residuales (SCR).

"La mejor curva de ajuste se considera como aquella que minimiza la suma de las desviaciones (residuales) al cuadrado (SCR)."[16]

Residuos:

$e_t = y_t - \hat{y}_t$

y_t: $Valor\ observado$

$\hat{y}_t$: $Valor\ calculado$

Bondad de ajuste

$$SCR = \sum_{t=1}^{n} {e_t}^2$$

TABLA COMPARATIVA DE LA SUMA DE CUADRADOS RESIDUALES

Año	x	LINEAL	CUADRÁTICA	EXPONENCIAL	LOGÍSTICA
1950	0	4192,6	0,0	0,0	100,0
1960	10	0,0	116,1	36,3	25,6
1970	20	945,6	45,9	17,6	15,1
1980	30	1560,3	0,0	218,9	0,1
1990	40	689,1	91,7	442,1	58,8
2000	50	0,0	166,9	65,8	105,0
2010	60	855,6	0,0	1679,5	1,1
Suma		8243,0	420,6	2460,2	**305,7**

Análisis comparativo

Como política gubernamental conviene poder predecir el incremento poblacional de un país en un horizonte de 40 o 50 años para planificar y

[16] http://es.wikipedia.org/wiki/Regresi%C3%B3n_no_lineal

tomar decisiones de políticas sociales a mediano y largo plazo como son: vivienda, alimentación, salud, plazas de trabajo, educación, proyectos energéticos, etc.

De acuerdo a la tabla comparativa de la suma de cuadrados residuales, la gráfica que mejor se ajusta a los datos reales es la que corresponde a la función logística; la cual consideraremos como base para próximas predicciones.

PREDICCIÓN DE LA POBLACIÓN DE INDIA

AÑO	x	LOGÍSTICA
2020	70	1360,4
2030	80	1553,5
2040	90	1744,7
2050	100	1928,1

COMPARACIÓN DE LA ESTIMACIÓN DE LAS PREDICCIONES DE LA FUNCIÓN LOGÍSTICA CON LOS OTROS MODELOS PLANTEADOS

Comparación: Función Logística vs Función Lineal

AÑO	x	LOGÍSTICA	LINEAL
2020	70	1360,4	1283,5
2030	80	1553,5	1423,3
2040	90	1744,7	1563,0
2050	100	1928,1	1702,8

Comparación: Función Logística vs Función Cuadrática

AÑO	x	LOGÍSTICA	CUADRÁTICA
2020	70	1360,4	1374,1
2030	80	1553,5	1594,4
2040	90	1744,7	1833,9
2050	100	1928,1	2092,7

Comparación: Función Logística vs Función Exponencial

AÑO	x	LOGÍSTICA	EXPONENCIAL
2020	70	1360,4	1479,8
2030	80	1553,5	1803,9
2040	90	1744,7	2199,0
2050	100	1928,1	2680,5

Como se puede observar después de 40 años las estimaciones de las predicciones de las otras funciones modeladas se alejan considerablemente de las predicciones obtenidas con la función logística, que es la que mejor se ajusta a los datos.

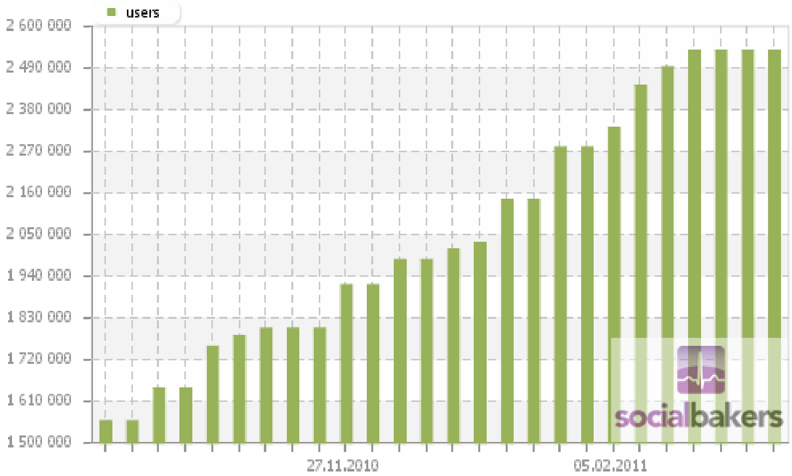
5.3.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 2: MEDICIÓN DEL CRECIMIENTO DEL NÚMERO DE USUARIOS DE FACEBOOK EN ECUADOR

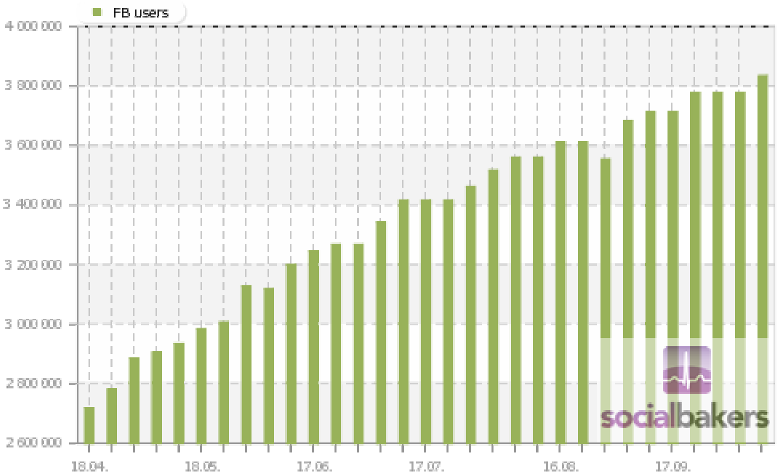
Objetivo: Investigar las distintas funciones que modelizan más adecuadamente el número de usuarios de Facebook en Ecuador.

USUARIOS DE FACEBOOK EN ECUADOR

Periodo	"x" **TIEMPO (en meses)**	"y" **POBLACIÓN (millones de usuarios)**
Sep 2010	0	1.56
Oct 2010	1	1.76
Nov 2010	2	1.84
Dic 2010	3	1.99
Ene 2011	4	2.15
Feb 2011	5	2.46
Mar 2011	6	2.53
Abr 2011	7	2.71
May 2011	8	2.95
Jun 2011	9	3.24
Jul 2011	10	3.41
Ago 2011	11	3.61
Set 2011	12	3.72

Gráfico 24: Ecuador Facebook Statistics





El número de usuarios de Facebook, es tomado de la página de Social Backers[17]

1. Defina los parámetros y variables pertinentes. Sitúe los puntos dados en una gráfica.
2. ¿Qué tipo de funciones podrían modelizar el comportamiento de la gráfica? Explique sus elecciones.

[17] http://www.socialbakers.com/facebook-statistics/ecuador#chart-intervals

3. Determine analíticamente las funciones que se ajustan a los puntos de la gráfica.
4. Analice sobre el grado de ajuste de los modelos obtenidos con respecto a los datos originales.
5. Haga un análisis comparativo de las implicaciones de cada uno de los modelos en lo que respecto al crecimiento de los usuarios de Facebook en Ecuador.
6. Con el mejor modelo obtenido haga una proyección del número de usuarios de Facebook para diciembre del 2012.

5.3.4 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2:

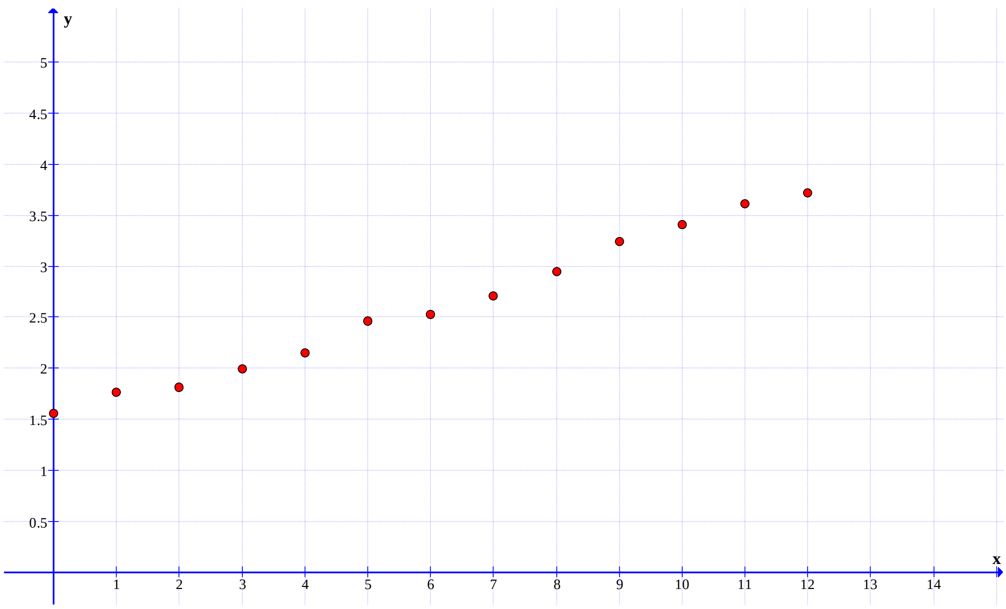
1. **Defina los parámetros y variables pertinentes. Sitúe los puntos dados en una gráfica.**

<u>Variables</u>

El eje de las abscisas "x" representa el tiempo transcurrido en meses tomando septiembre del 2010 como año 0.

El eje de las ordenadas "y" representa el número de usuarios del Facebook en Ecuador en millones.

Gráfico 25: Usuarios de Facebook en Ecuador



2. **¿Qué tipo de funciones podrían modelizar el comportamiento de la gráfica? Explique sus elecciones.**

   De acuerdo a la tendencia de la gráfica vamos a modelizar las funciones: lineal, cuadrática, exponencial y logística porque aparentemente son las que se ajustan mejor al gráfico anterior.

3. **Determine analíticamente las funciones que se ajustan a los puntos de la gráfica.**

   <u>Modelizando como una función lineal</u>

   Se escogen de la tabla 2 puntos significativos: $A(0{,}1.56)$; $B(12{,}3.72)$.
   Siendo la ecuación de la función lineal: $y = ax + b$

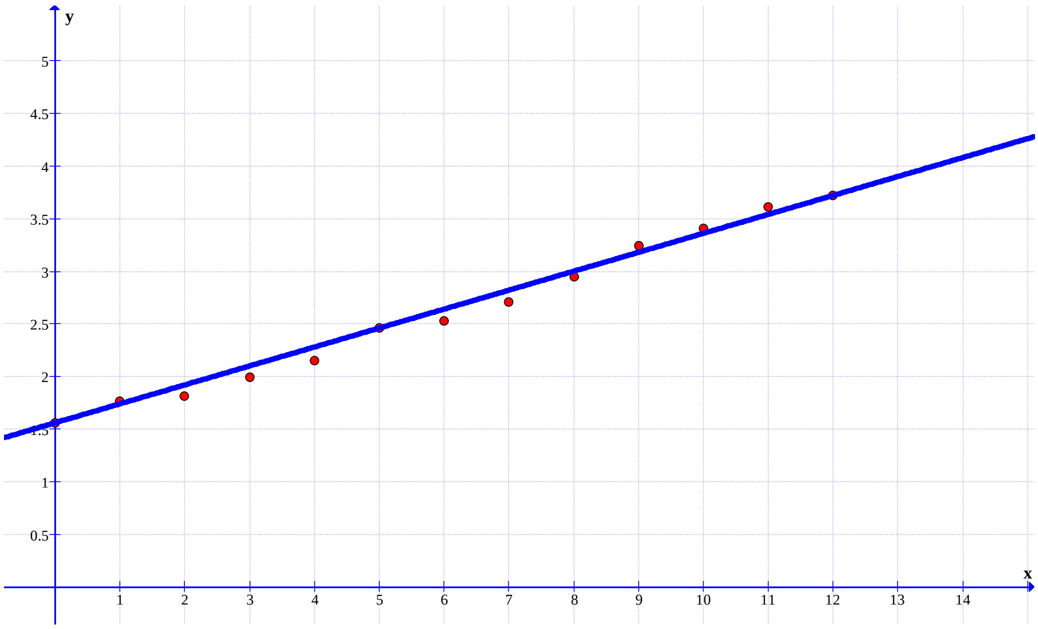
   Obtenemos los valores de a y b resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

   $0a + b = 1.56$
   $12a + b = 3.72$

   $a = 0.18$ y $b = 1.56$

   La función lineal es: $y = 0.18\,x + 1.56$

Gráfico 26: Modelo Lineal de los usuarios de Facebook en Ecuador



<u>Modelizando como una función cuadrática</u>

Se escoge de la tabla 3 puntos significativos: $A(0{,}1.56)$; $B(6{,}2.53)$; $C(12{,}3.72)$.

Siendo la ecuación de la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$

Obtenemos los valores de a, b y c resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$c = 1.56$

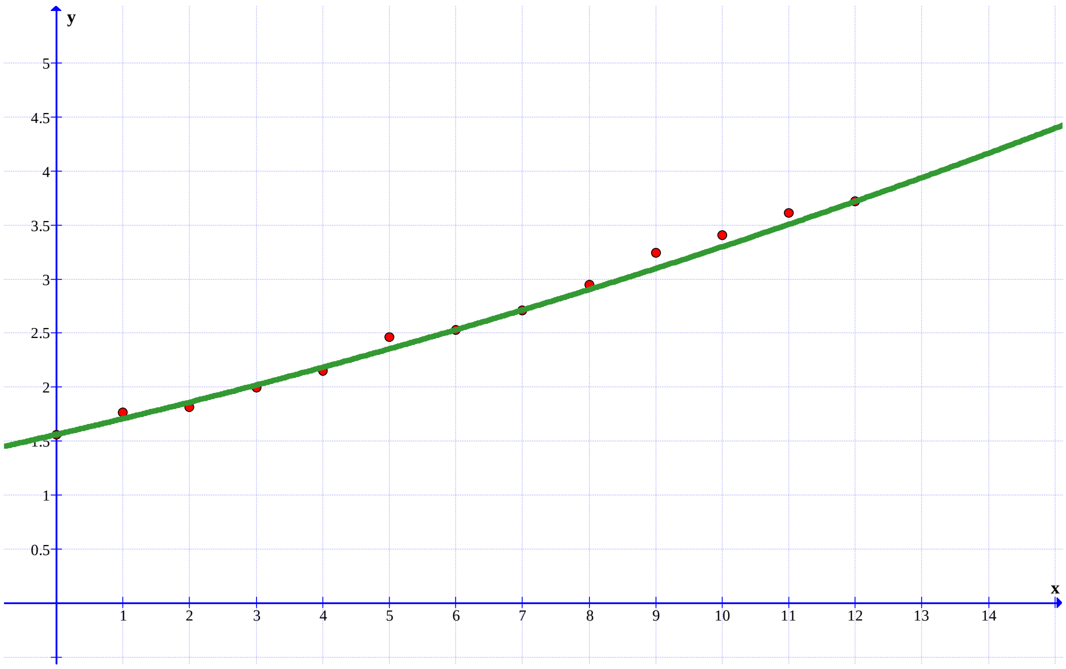
$36a + 6b + c = 2.53$

$144a + 12b + c = 3.72$

$a = 0.00305 \quad b = 0.14333 \quad c = 1.56$

La función cuadrática es: $y = 0.00305x^2 + 0.14333x + 1.56$

Gráfico 27: Modelo Cuadrático de los usuarios de Facebook en Ecuador



Modelizando como una función exponencial

Se escogen de la tabla 2 puntos significativos: $A(1{,}1.76)$; $B(11{,}3.61)$.

Siendo la ecuación de la función exponencial: $y = a\,(b)^x$

Obtenemos los valores de a y b resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$1.76 = a\,(b)^1$

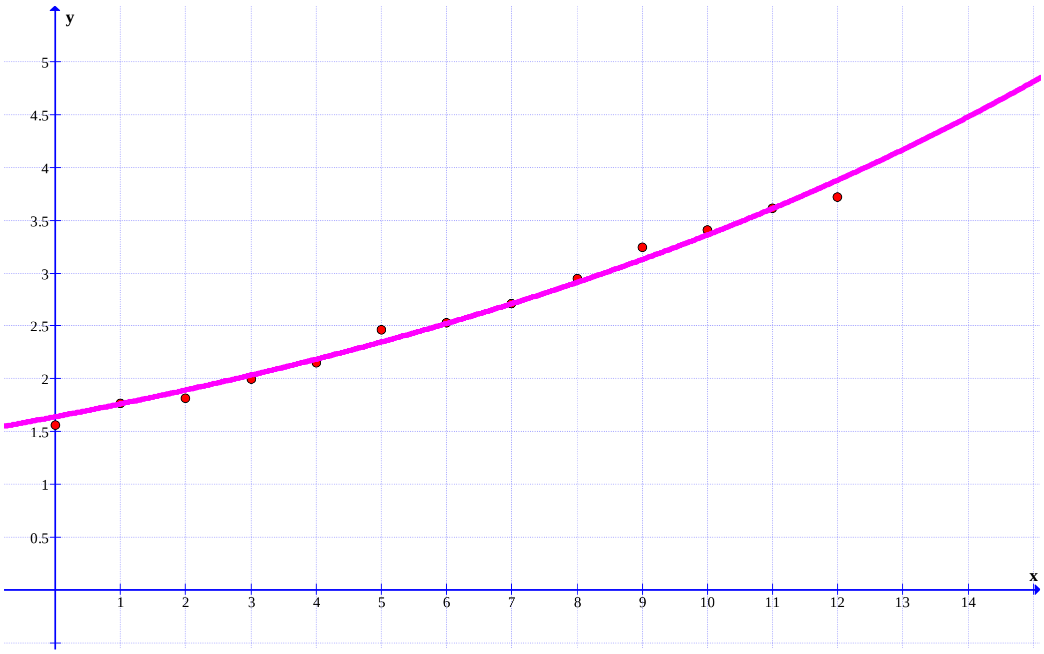
$3.61 = a\,(b)^{11}$

$a = 1.63800$

$b = 1.07448$

La función exponencial es: $y = 1.63800\,(1.07448)^x$, siendo su gráfica:

Gráfico 28: Modelo Exponencial de los usuarios de Facebook en Ecuador



Modelizando como una función Logística

$$y = \frac{K}{1 + Be^{-At}}$$

Donde:

K: Máximo valor posible que puede alcanzar la población
B: Constante de integración que depende en cada caso del conjunto de datos
A: Cambio del crecimiento.
t: Periodo de tiempo

Para hallar los parámetros A, K, B; elegimos tres puntos equidistantes.
$P0\ (0,1.56)$
$P1\ (6,2.53)$
$P2\ (12,3.72)$

El valor de A se obtiene de la solución de la expresión:

$$e^{-Ah} = \frac{y_0(y_2-y_1)}{y_2(y_1-y_0)}\,; \qquad h = t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = 6$$

$$A = 0.11077$$

El valor de K se obtiene de la solución de la siguiente expresión:

$$K = \frac{(e^{-Ah}-1)y_0y_1}{y_1e^{-Ah}-y_0}$$

$$K = 7.41618$$

El valor de B se obtiene de la solución de la siguiente expresión:

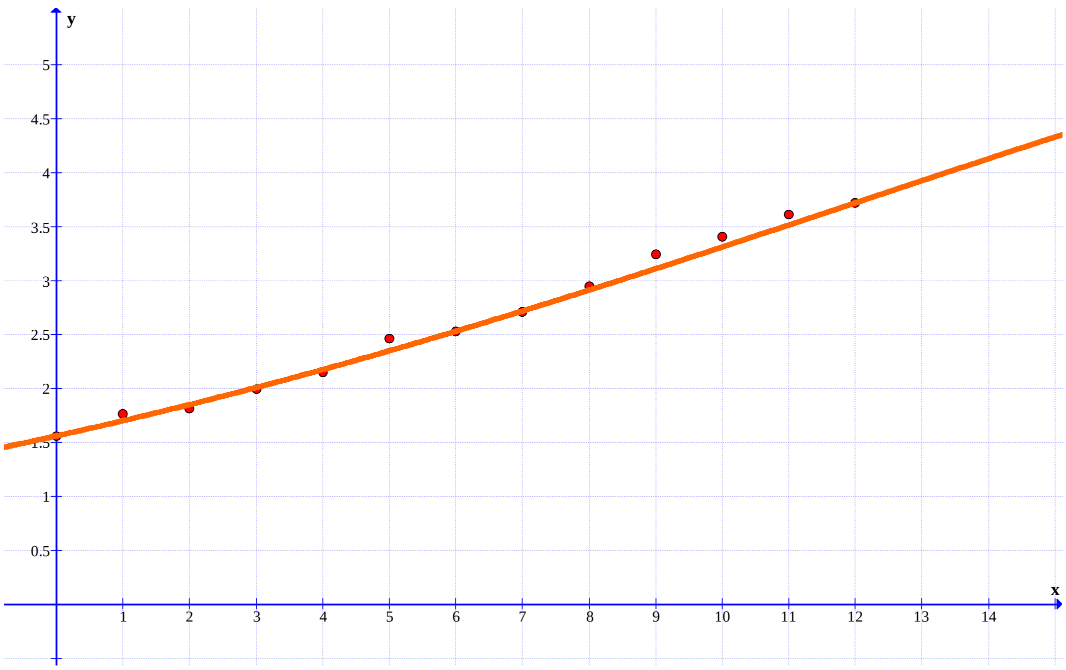
$$B = \frac{K}{y_0} - 1$$

$$B = 3.75396$$

Entonces la función logística para los usuarios de Facebook en Ecuador es:

$$y = \frac{7.41618}{1+3.75396e^{-0.11077\,t}}$$

Gráfico 29: Modelo Logístico de los usuarios de Facebook en Ecuador



4. Analice sobre el grado de ajuste de los modelos obtenidos con respecto a los datos originales.

Modelo: Función Lineal

Del gráfico se puede deducir que este modelo no se ajusta bien al conjunto de datos; además se observa que la recta sólo pasa por tres de los puntos originales.

Modelo: Función Cuadrática

El gráfico de la función cuadrática se ajusta mejor a los datos reales; sabemos que su tendencia hacia $+\infty$ es estrictamente creciente, por lo que sólo es válida para predecir en un corto plazo.

Modelo: Función Exponencial

Esta función se ajusta a la realidad porque supone un crecimiento desde un valor mínimo, que tiende a cero; sin embargo al analizar a futuro su tendencia es hacia $+\infty$. Sería un modelo confiable si se pudiera asegurar crecimientos continuos; al tratarse del número de usuarios de Facebook en Ecuador el tope máximo corresponde a la población ecuatoriana que bordea los 14 millones de habitantes.

Modelo: Función Logística

La función logística considera un crecimiento amortiguado de la población tomando en cuenta factores que limitan su crecimiento. Esta función gráficamente se ajusta bien a los datos reales y predice mejor a largo plazo.

5. Haga un análisis comparativo de las implicaciones de cada uno de los modelos en lo que respecta al crecimiento del número de usuarios en Ecuador en el futuro.

Gráfico 30: Comparación de los 4 modelos propuestos para el número de usuarios de Facebook en Ecuador

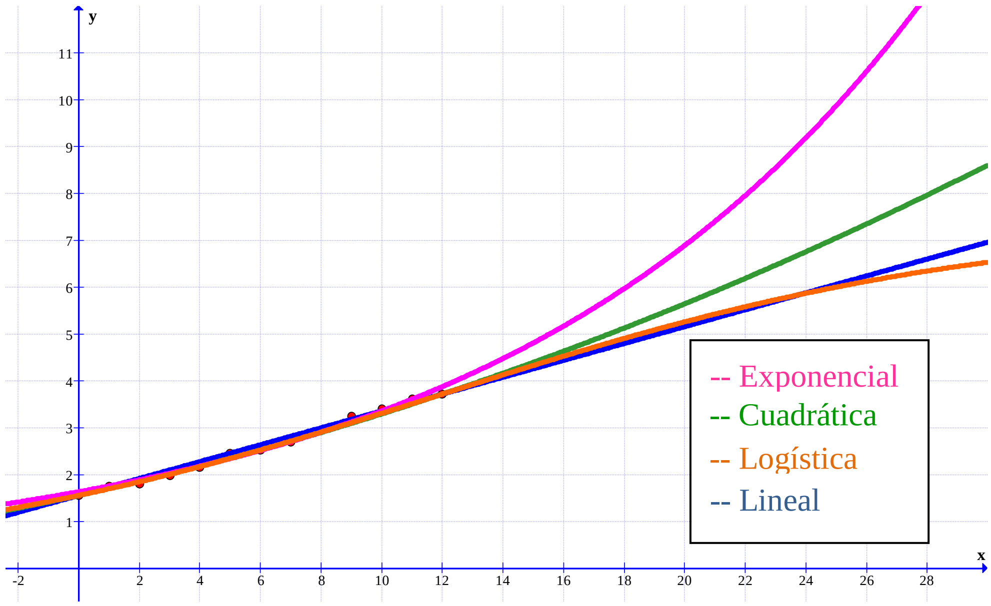


TABLA COMPARATIVA DE LAS FUNCIONES FORMULADAS PARA EL NÚMERO DE USUARIOS DE FACEBOOK EN ECUADOR

MESES	x	REAL	LINEAL	CUADRÁTICA	EXPONENCIAL	LOGÍSTICA
sep-10	0	1,56	1,56	1,56	1,64	1,56
oct-10	1	1,76	1,74	1,71	1,76	1,70
nov-10	2	1,84	1,92	1,86	1,89	1,85
dic-10	3	1,99	2,10	2,02	2,03	2,01
ene-11	4	2,15	2,28	2,18	2,18	2,17
feb-11	5	2,46	2,46	2,35	2,35	2,35
mar-11	6	2,53	2,64	2,53	2,52	2,53
abr-11	7	2,71	2,82	2,71	2,71	2,72
may-11	8	2,95	3,00	2,90	2,91	2,91
jun-11	9	3,24	3,18	3,10	3,13	3,11
jul-11	10	3,41	3,36	3,30	3,36	3,31
ago-11	11	3,61	3,54	3,51	3,61	3,51
sep-11	12	3,72	3,72	3,72	3,88	3,72

Para poder elegir el modelo que mejor se ajusta al conjunto de datos utilizaremos el método de la suma de los cuadrados residuales (SCR).

TABLA COMPARATIVA DE LA SUMA DE CUADRADOS RESIDUALES

MESES	x	LINEAL	CUADRÁTICA	EXPONENCIAL	LOGÍSTICA
sep-10	0	0,000	0,000	0,006	0,000
oct-10	1	0,000	0,003	0,000	0,004
nov-10	2	0,006	0,000	0,003	0,000
dic-10	3	0,012	0,001	0,002	0,000
ene-11	4	0,017	0,001	0,001	0,001
feb-11	5	0,000	0,011	0,013	0,012
mar-11	6	0,012	0,000	0,000	0,000
abr-11	7	0,012	0,000	0,000	0,000
may-11	8	0,002	0,002	0,002	0,002
jun-11	9	0,004	0,020	0,013	0,017
jul-11	10	0,003	0,012	0,003	0,010
ago-11	11	0,005	0,011	0,000	0,009
sep-11	12	0,000	0,000	0,025	0,000
Suma		0,074	0,063	0,067	0,055

Análisis comparativo

Como política empresarial a Facebook le interesa poder predecir el incremento del número de usuarios ya que de ello depende sus ingresos por publicidad.

De acuerdo a la tabla anterior, la gráfica que mejor se ajusta a los datos reales es la que corresponde a la función logística; la cual consideraremos como base para próximas predicciones.

6. Con el mejor modelo obtenido haga una proyección del número de usuarios del Facebook para diciembre del 2012.

PREDICCIÓN DEL NÚMERO DE USUARIOS DEL FACEBOOK EN ECUADOR PARA DICIEMBRE DEL 2012

MES	x	LOGÍSTICA
Dic 2012	27	6,24

COMPARACIÓN DE LA ESTIMACIÓN DE LAS PREDICCIONES DE LA FUNCIÓN LOGÍSTICA CON LOS OTROS MODELOS PLANTEADOS

MES	x	LOGÍSTICA	LINEAL
Dic 2012	27	6,24	6,42
		LOGÍSTICA	**CUADRÁTICA**
Dic 2012	27	6,24	7,65
		LOGÍSTICA	**EXPONENCIAL**
Dic 2012	27	6,24	11,39

Como se puede observar para diciembre del 2012 las estimaciones de las predicciones de las otras funciones modeladas se alejan considerablemente de las predicciones obtenidas con la función logística, que es la que mejor se ajusta a los datos.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Han pasado ya algunos meses desde que empezamos a elaborar la tesis, la experiencia ha sido enriquecedora, pues a pesar de nuestros años como profesores de matemáticas nos hemos dado cuenta de que siempre hay una nueva arista desde donde enfocar el proceso de enseñanza – aprendizaje; nos ha servido además para reforzar los paradigmas conocidos.

El enfoque constructivista, desde el punto de vista del sujeto que enseña como del que aprende ha sido nuestro norte. En el taller pedagógico propuesto se van analizando y discutiendo todos los detalles del proceso, para culminar con la generación de un modelo que interprete matemáticamente el problema que plantea dicho taller.

Podemos concluir y recomendar:

CONCLUSIONES

- Según la opinión de expertos en lenguaje y comunicación recogida en esta tesis, la lectura crítica es una condición “sine qua non” para poder entender y resolver problemas en general y de funciones exponenciales y logarítmicas en particular.

- De acuerdo al material bibliográfico al que hemos recurrido, cuando se trata de resolver problemas de aplicación, los estudiantes tienen dificultades en la traducción del lenguaje común al matemático.

- En el taller propuesto, el trabajar con datos de problemas reales, fácilmente verificables, hizo que los estudiantes se involucraran con el problema planteado y les permitió comprender e interpretar mejor los parámetros de las funciones que analizaron.

- El trabajar con este taller pedagógico, le da al descubrimiento del conocimiento el valor agregado de: alegría, competitividad, deseos de participación, curiosidad, ansiedad, satisfacción, frustración; es decir, se vuelve un proceso ameno y dinámico.

- Los talleres en grupo resultaron ser muy eficaces para debatir las propuestas sobre el modelo que mejor se ajusta para solucionar la problemática planteada.

- El uso del software Graph, con el que se presentaron los gráficos de las funciones formuladas, resultó ser una herramienta para mostrar de forma atractiva los modelos que los mismos estudiantes generaron. La incorporación de la informática como soporte para resolver problemas es una motivación adicional para el aprendizaje ya que los jóvenes se identifican con estos medios.

- La metodología propuesta tuvo, según la encuesta realizada a los estudiantes (pregunta 11), un 97% de aceptación; por lo que podemos concluir que ésta cumplió con el objetivo planteado; los estudiantes que han participado de este proyecto han desarrollado habilidades cognitivas que se manifiestan por un aprendizaje comprensivo y analítico de las matemáticas.

- Con la implementación de esta propuesta pedagógica se mostró a la matemática como una actividad y no como un conjunto codificado de conocimientos; por lo que, sería de gran utilidad aplicar esta metodología en otros campos de estudio; los datos de la encuesta (pregunta 10) reflejan que más del 90% de estudiantes afirmaron su gusto por aprender las matemáticas de esta forma.

RECOMENDACIONES

Siguiendo las conclusiones obtenidas, recomendamos:

- Que las instituciones educativas deberían implementar como política institucional, con mayor énfasis que la actual, la lectura comprensiva y crítica desde los primeros años de estudio, puesto que esta es imprescindible para el estudio de las ciencias en general y de la matemática en particular.

- La metodología propuesta apunta a que los estudiantes lleguen a los últimos niveles de la taxonomía de Bloom que son: análisis, síntesis y evaluación; por lo que sería recomendable implementar esta propuesta pedagógica para la enseñanza de funciones exponenciales y logarítmicas en las unidades educativas que deseen apostar por este enfoque constructivista.

- Al desarrollar los talleres pedagógicos, se debe tomar en cuenta que algunos estudiantes pueden tener deficiencias en conocimientos de álgebra básica, graficación, lectura comprensiva, por lo que el profesor debe estar atento para atender a estos casos particulares, involucrando a los otros compañeros del grupo para que ayuden a cubrir estos vacios cognitivos.

- Que los centros educativos inviertan en equipos informáticos orientados a la educación y se brinde la debida capacitación a los profesores; ya que en el contexto actual, el uso de las TICs facilita el aprendizaje en los estudiantes.

- A los investigadores en educación, el desarrollo de propuestas pedagógicas similares para otros modelos matemáticos e incluso para otras ciencias.

BIBLIOGRAFIA

- CASCANTE FLORES, N. Motivación en el Ámbito Docente de la Educación Superior. Departamento de Docencia Universitaria. Costa Rica. 2005.

- ESPINA MARCONI, L. Serie de Estudios Económicos: El modelo Logístico. Santiago de Chile, Enero de 1984.

- GONZÁLEZ RIVERO, B. Talleres Curriculares basados en el enfoque histórico cultural. Centro para el Perfeccionamiento de la Educación Superior – Universidad de La Habana, Cuba.

- LARIOS OSORIO, V., “Constructivismo en tres patadas”, Revista Gaceta COBAQ. Año XV, no. 132 (1998).

- LEITHOLD, L., Matemáticas Previas al Cálculo.

- MANTEROLA PACHECO, M., Psicología Educatica-Conexiones con la sala de clases. Ediciones Universidad Católica Cardenal Raúl Silva Henríquez. Chile.

- MINISTERIO DE EDUCACIÓN – ECUADOR. Curso de lectura crítica: Estrategias de comprensión lectora (Plan Decenal de Educación 2006-2015 – Política 7).

- RIVIERI, Á., Problemas y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva cognitiva. Madrid, 1990.

- SANTROCK J,. Psicología de la Educación. Editorial Mc Graw Hill.

- SWOKOWSKI, E., Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.

Citas de Internet:

- BUSTAMANTE, M., Propuesta de evaluación basada en la teoría constructivista, http://www.foroswebgratis.com/mensaje-propuesta_de_evaluaci%C3%93n_basada_em_la_teor%C3%8Da_constructivista-24070-110936-1-829685.htm

- OLAZÁBAL, A. y CAMARENA, P., Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto, http://www.congresoretosyexpectativas.udg.mx/Congreso%204/Mesa%202a/m2a20.pdf

- VÁSQUEZ–REINA, M., Mejorar la comprensión lectora, http://www.consumer.es/web/es/educacion/extraescolar/2009/01/23/182909.php

- Academia de Ciencias Luventicus. Lectura Comprensiva, http://www.luventicus.org/articulos/02A001/lectura_comprensiva.html

- ICE (Institut de Ciencies de´lEducació), GIAC (Grupo de interés en Aprendizaje Cooperativo). Artículo: Formas de Aprendizaje Cooperativo, http://giac.upc.es/pag/giac_cas/giac_como_es_formas.htm

- Universidad los Llanos. El concepto del Taller, http://acreditacion.unillanos.edu.co/contenidos/dis_ambientes_metodos_pedagogicos/Memoria1/conceptotalle-Presentacion.pdf

- El modelo contructivista en la enseñanza de la matemática. http://es.scribd.com/doc/22331757/EL-MODELO-CONSTRUCTIVISTA-EN-LA-ENSENANZA-DE-LA-MATEMATICA.

- Suma de Cuadrados Residuales
  http://es.wikipedia.org/wiki/Regresi%C3%B3n_no_lineal

- Datos de la población de India.
  http://www.census.gov/cgibin/ipc/idbsum.pl?cty=IN

- Datos de usuarios de Facebook en Ecuador.
  http://www.socialbakers.com/facebook-statistics/ecuador#chart-intervals

- American academy of child and adolescent psychiatry (AACAP). http://www.educar.org.