ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

APLICACION DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA AL PROCESO DE GRAFICACION DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

MONOGRAFIA

PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

APLICADA AL NIVEL MEDIO

PRESENTADO POR:

TIPAN LUIS

Guayaquil - Ecuador

Marzo - 1994

DIRECTOR DE MONOGRAFIA:

MATEMATICO JORGE MEDINA.

DECLARACION EXPRESA

" La responsabilidad por los hechos ideas y doctrinas expuestas en esta monografía, me corresponden exclu - sivamente, y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profecionales de la ESPOL).

....

Tipán Luis

INTRODUCCION

Esta monografia lo he realizado pensando en que sea zado por estudiantes de nivel secundario en el tramiento e la representación gráfica de funciones de variable real. cando el criterio de la primera y segunda derivada.

El capítulo comienza con teoremas y definiciones de valor o, funciones crecientes y decrecientes, máximos y mínimos. ores críticos, concavidades y puntos de inflexión.

De los teoremas presentados en este trabajo se han ostrado algunos de ellos dejando los restantes para que uestre el estudiante,siendo su demostración en forma ilar. Pienso que está dentro de la capacidad del udiante secundario.

Para cada una de las definiciones y teoremas se ha arrollado ejemplos de representaciones gráficas generales y ticulares, con todos los pasos seguidos hasta llegar a la resentación gráfica de cada función.

CONTENIDO Pag.

1.- APLICACIONES DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA AL PROCESO DE GRAFICACION DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

Una aplicación importante de la primera y segunda derivada es el proceso de graficar una función de variable real cuando su grado es mayor a dos, nos dá información suficiente como para adquirir una buena idea de la gráfica de una función, - trazando el menor número de puntos posibles. Es decir en que intervalos f creciente o decreciente, máximo o mínimo, si tiene concavidad hacia abajo o hacia arriba, como también los puntos de inflexión donde la gráfica cambia de concavidad.

1.1.- DEFINICION DE VALOR MINIMO LOCAL (o RALATIVO) DE UNA FUNCION f.

Sea f una función definida en un intervalo I y $c \in I$, entonces:

i) f(c) es un valor mínimo de f si $f(c) \leq f(x)$ $\forall x \neq c$ en I.

1.2.- DEFINICION DE VALOR MAXIMO LOCAL (o RELATIVO) DE UNA FUNCION f.

Sea f una función definida en un intervalo I y $c \in I$, entonces.

i) f(c) es un valor máximo de f en I si,

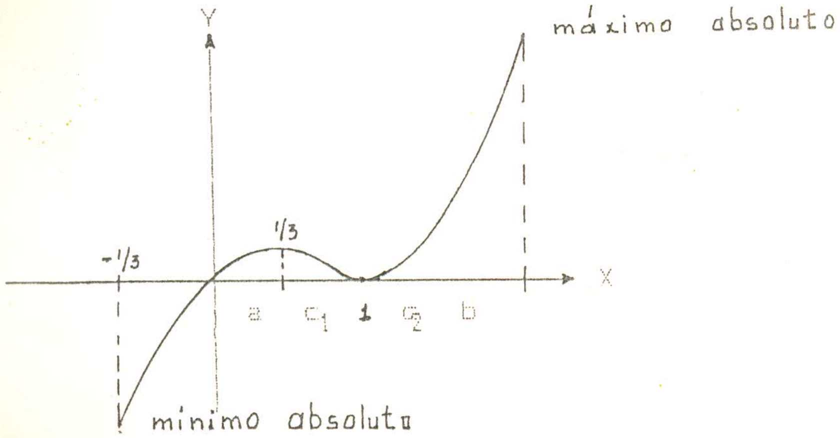
$f(c) \geq f(x)$, $\forall x \neq c$ en I.

1.3.- VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCION f.

Los valores máximos y mínimos de una función en un intervalo I se llaman valores extremos de f.

REPRESENTACION GRAFICA

Fig. 1



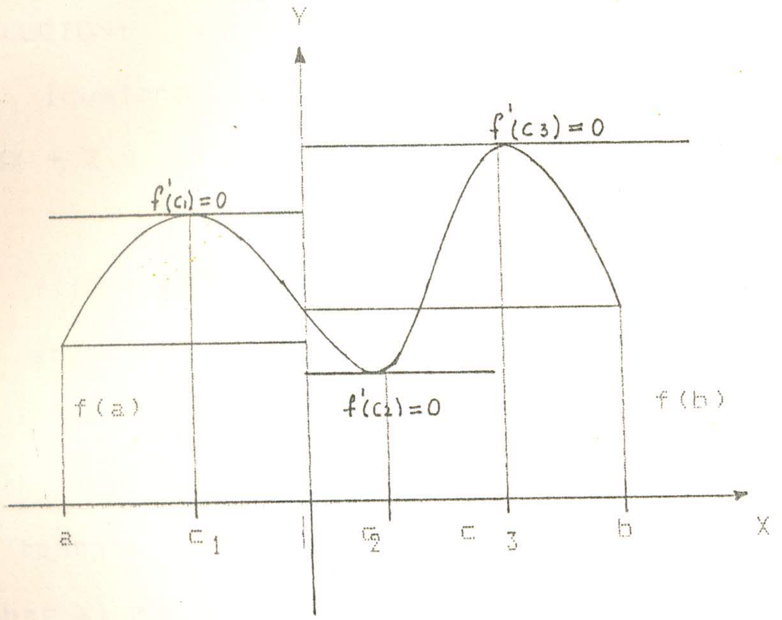
1.4.- TEOREMA DE ROLLE

Sea f continua en [a; b] y derivable en (a;b). si (a)=f(b). entonces existe al menos un número c en (a; b) tal ue $f'(c) = 0$. Realizaremos una representación gráfica de este eorema.

Si la representación gráfica de una función f contínua en [a ; b] con puntos extremos en el eje X, en P(a,0) y)(b,0), y si la curva tiene una recta tangente en cada punto excepto en los puntos extremos entonces debe existir al menos un punto de la curva en el que la recta tangente sea paralela al eje X, como se indica en la figura (2).

Notamos que si se cumple las condiciones del teorema de Rolle, dicho teorema nos garantiza la existencia de al menos un punto en el gráfico. cuya recta tangente sea paralela al eje X, pudiendo haber más de uno de tales puntos.

Fig. (2)



DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE ROLLE

Sea $f(a) = d = f(b) \implies$

Si $f(x) = d$, para todo $x \in [a ; b] \Rightarrow f$ es constante, esto imolica que $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a ; b)$. (la derivada de una constante es agual a cero).

i $f(x) > d$, para algún x del intervalo (a ; b), f tiene lor máximo, en algún c del intervalo, como $f(c) > d$, tal o no ocurre en los puntos terminales, por tanto f tiene alor máximo en el intervalo (a ; b) entonces f(c) es un no relativo, entonces c es un valor crítico de f. como f erivable en c deducimos que $f'(c) = 0$.

Si $f(x) < d$, para algún $x \in (a ; b)$ y procediendo como l paso 2 deducimos que $f'(c) = 0$.

plo: Si $f(x) = X^2 - 3X + 2$

par que $f'(x) = 0$, en algún punto intermedio de ellos.

SOLUCION: es derivable en toda la recta real.

igualando f(x) a cero tenemos que:

$X^2 - 3X + 2 = 0$; => $(X-2)(X-1) = 0$; => $X=2$; $X = 1$; =>

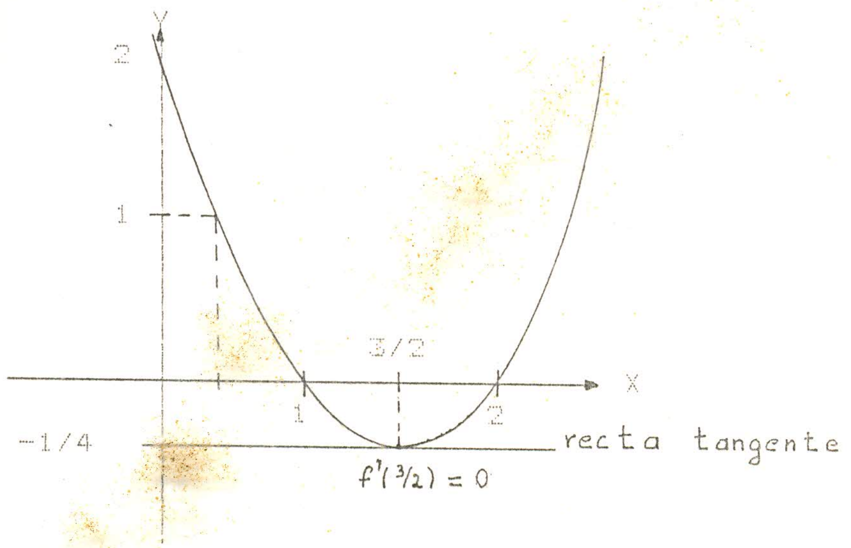
$f(1) = f(2) = 0.$

$f(1) = f(2) = 0$. Para calcular c resolvamos la ecuación $f'(x) = 0$, como sigue.

$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$, puesto que 3/2 está en (1,2) y $f'(3/2) = 0$, concluimos que $c = 3/2$.

ún el teorema de Rolle si f satisface sus condiciones e haber al menos un punto entre a y b donde $f' = 0$. representación gráfica lo podemos observar en la fig.3

fig.3

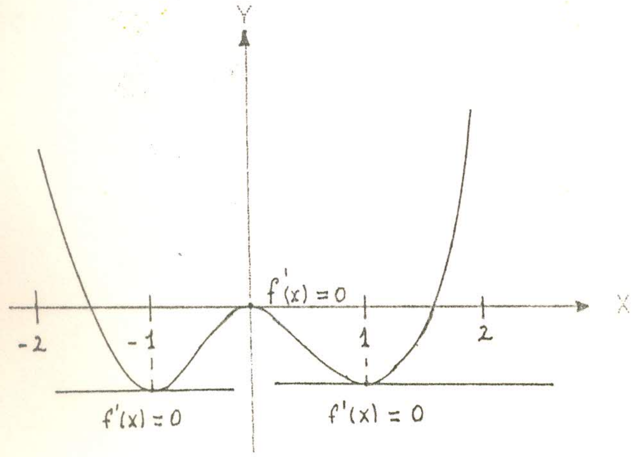


mplo 2. Sea $f(x) = X^4 - 2X^2$. Hallar todas las c en el ervalo (-2,2) tales que $f'(c) = 0$.

SOLUCION. Como $f(-2) = 8 = f(2)$ y F es derivable en), el teorema de Rolle garantiza la existencia de al menos c en (-2,2) tal que $f'(c) = 0$. igualando a cero la derivada tiene.

$x) = 4X^3 - 4X^2 = 0 \Longrightarrow 4X (X -1) = 0 \Longrightarrow X =\{ 0.1,-1\}.$

que el intervalo (-2,2) La derivada es cero en estos 3 os. Su representación gráfica lo podemos observar en la 4. fig 4



1.5 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Sea f una función tal que cumpla las siguientes ndiciones:

- f sea continua sobre el intervalo cerrado [a,b].

- f sea derivable sobre el intervalo abierto (a,b)

existe un número c tal que:

$$a < c < b \quad y \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

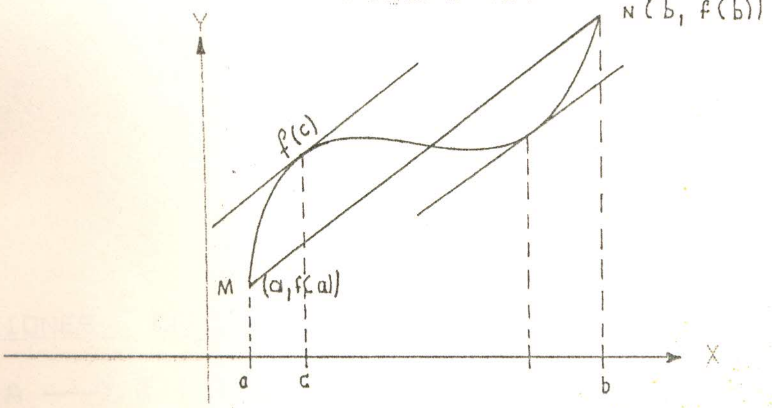
en el teorema de Rolle se anula la hipótesis de que a) = f(b) la conclusión no se cumple, como se indica la figura 5. No existe en ese punto de la curva en ue la recta tangente sea paralela al eje X. Sin em argo podemos observar que el segmento $\overline{MN}$ cuyos extre os son los puntos M[a,F(a)], N[b,F(b)], desempeña un apel semejante al segmento PQ, de la figura 3, entonces debe existir un punto en la representación grá fica de la figura 5 en la que la recta tangente sea paralela al segmento $\overline{MN}$. Puesto que la pendiente del

$\overline{MN}$ es igual a : $\overline{MN} = \dfrac{F(b) - F(a)}{b - a}$ => existe un

o de la gráfica en el cual la pendiente de la tangente

$$\text{es} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Figura (5)



Ejemplo: 2.- Si f está dado por $f(x) = X^2 + 2X + 1$;

$1 < X < 4$

Halle un número c ∈ (1,4) tal que $f'(c) = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$.

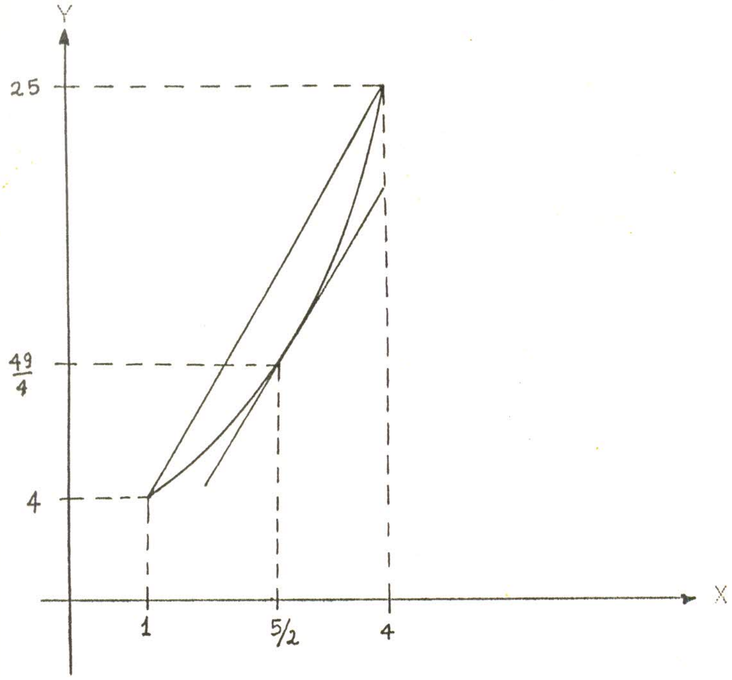
UCION: Note que f satisface las condiciones del teorema 3 bre [1,4], por lo que debe existir el número c. Ahora bién $f'(x) = 2X + 2$. => $f(4) = 25$ y $f(1) = 4$; de ahí que eamos

allar c tal que $2c + 2 = (25 - 4)/3$;

Resolviendo esta ecuación hallamos que $c = 5/2$, que es número con las propiedades requeridas.

REPRESENTACION GRAFICA DE f

Fig.(6)



- <u>FUNCIONES</u> <u>CRECIENTES</u> <u>Y</u> <u>DECRECIENTES</u>

a $f : A \longrightarrow R$ ($A \subset R$) una función real.

$x \longrightarrow y = f(x)$.

INICION 1.6.1- La función real f se dice que es creciente

si y sólo si $\forall\, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

fig.7

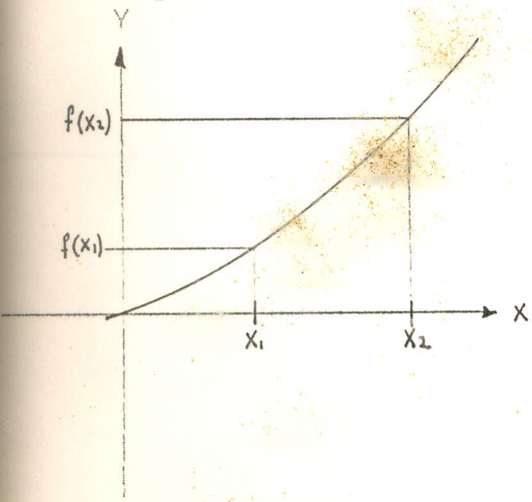
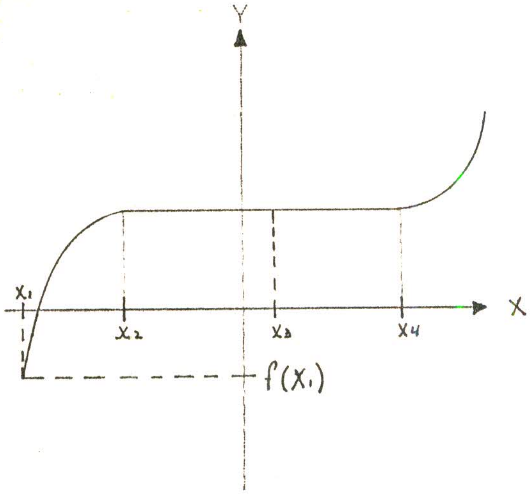


fig.8



FINICION 1.6.2.- La función real f se dice que es:

<u>decreciente</u> en I si y sólo si $\forall\, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

fig.9

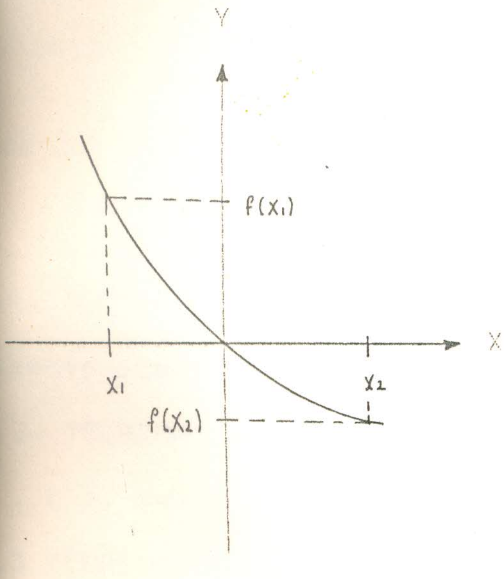


fig. 10

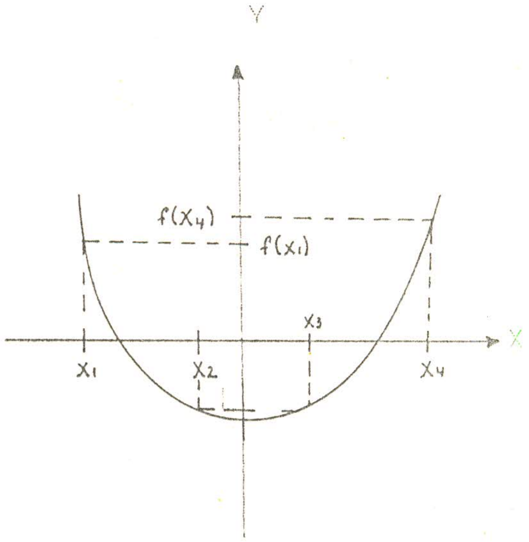
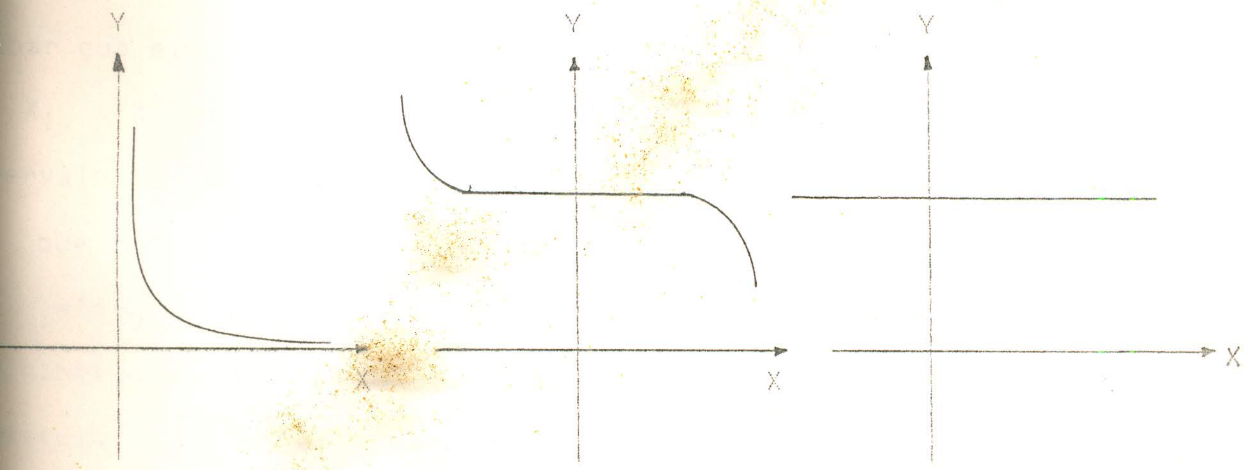


fig. 11



f es decreciente g es decreciente h es decreciente

1.7 FUNCION MONOTONA

INICION 1.7.1.- f se dice que es monótona en I si es ciente o decreciente en I.

.8 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

.1. TEOREMA .- Si $f'(x) > 0$ sobre $(a ; b) \Longrightarrow f$ es ciente sobre el intervalo abierto $(a ; b)$.

.2. TEOREMA .- Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo abierto a , b). $\Longrightarrow f$ es decreciente sobre dicho intervalo.

.3 TEOREMA .- Si $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a; b)$, $\Rightarrow f$ es nstante en $(a ; b)$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.5.1

Para probar que f es creciente en $[a ; b]$ debemos obar que si. $a \leq X_1 < X_2 \leq b \Longrightarrow f(X_1) < f(X_2)$.

i $X_1 < X_2$ aplicando el teorema del valor medio para el tervalo cerrado $[X_1, X_2]$ se tiene que existe un $c \in (X_1, X_2)$ l que $f'(c) = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) \Longrightarrow f'(c).(X_2 - X_1) = f(X_2) - f(X_1)$. Como $X1 < X2$ se tiene que $X2 - X1 > 0$ y r hipótesis $f'(x) > 0$ bara todo $x \in (a ; b)$, como en rticular $c \in (a ; b)$ se tiene entonces que $f'(c) > 0$. tonces $(X_2 - X_1) f'(c) > 0$. de donde $f(X_2) - f(X_1) > 0$. esto plica que $f(X_1 < f(X_2)$.

demostración de este teorema es similar al teorema 1.8.1. n el sentido de la desigualdad invertida.

Para demostrar el teorema1.5.3. que f es constante en todo intervalo [a ; b] se debe probar que:

$f(x) = f(a)$ (o $f(b)$) para todo $x \in (a ; b)$.

a $a < X \leq b$, luego por el teorema del valor medio para el tervalo [a ; x] se tiene que existe un $c \in (a ; x)$ tal e:

$$f'(c) = (f(x) - f(a))/(x - a).$$

mo $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a ; b)$ se tiene que en rticular que $f'(c) = 0$; luego $f(x) - f(a) = 0$ con lo que x) = f(a) para todo $x \in [a ; b]$.

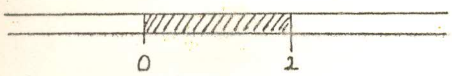
Ejemplo sea la función $f = \{(x,y)/Y = 3X^2 - X^3 \quad x \in R \}$. termine los intervalos sobre los que f es creciente y creciente. Obtener su representación gráfica.

LUCION: Si $f(x) = 3X^2 - X^3 \Rightarrow f'(x) = 6X - 3X^2 = 3X(2-X)$.

– Si $f'(x) > 0 \Rightarrow 3x(2 - x) > 0 \Rightarrow 3x > 0$ y $(2 - x) > 0$ o < 0 y $(2 - x) < 0 \Rightarrow (x > 0$ y $x < 2)$ o $(x < 0$ y $x > 2)$

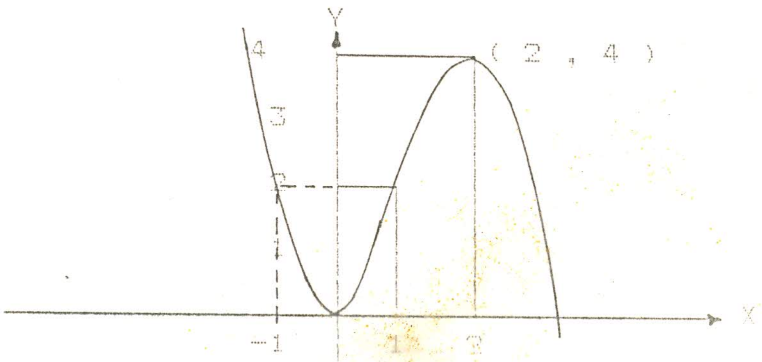
fig.12

sol = $0 < X < 2$ sol = ϕ



por tanto f es creciente en el intervalo (0 ; 2)
creciente en el intervalo ($-\infty$; 0) U (2 ; $+\infty$)
epresentación gráfica esta dada por la fig. 12, puesto que
decreciente sobre ($-\infty$; 0) y creciente sobre [0 ; 2],
xiste entonces intervalo abierto que contenga al cero.
e el que f sea creciente (o decreciente). Por lo tanto f
s ni creciente ni decreciente en cero. Por razones
jantes f no es creciente ni decreciente en 2.

fig. 13



El teorema 1.8.1 que acabamos de demostrar es útil pero
e tiene algunas deficiencias, por ejemplo. en el caso de
unción cuadrática.

$$f(x) = X^2 \implies f'(x) = 2X.$$

Es negativa para $X \in (-\infty , 0)$, 0 para $X = 0$ y

positiva para $X \in (0 , +\infty)$.

y por el teorema 1.8.1 a 1.8.3 podemos asegurar que.

f decrece en ($-\infty$, 0) y crece en (0 , $+\infty$).

Pero los resultados más precisos son.

f decrece en ($-\infty$, 0] y crece [0, $+\infty$).

ra obtener estos resultados necesitamos un teorema que se
ue a intervalos cerrados.

TEOREMA 1.8.5

ea f contínua en un intervalo cerrado I. entoces :

$f'(x) > 0$, $\forall x \in I$. ==> f es creciente en I.

Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$. ==> f es decreciente en I.

Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$. ==> f es constante en I.

demostración es similar a la del teorema 1.8.1.

1.9.- VALORES CRITICOS DE UNA FUNCION f

una función f cuyo dominio es el intervalo I, un valor c
es un valor crítico de f si:

$f'(c) = 0$, o

$f'(c)$ no existe, o

c es un valor extremo del intervalo I.

ecto al punto 3 debemos hacer las siguientes
rvaciones:

Si I = [a ; b] ==> a y b son valores críticos.

Si I = [a ; b) o si I = [a ; $+\infty$) => a es un valor
ico.

Si I = (a ; b] o si S = (− ∞ ; b] => b es un valor crítico.

Si I = (a ; b). a y b no son valores críticos. (los
res extremos de un intervalo abierto no son elementos del
rvalo).

FORMA DE ENCONTRAR LOS VALORES CRITICOS DE f

a encontrar los valores críticos de una función f se
n los siguientes pasos.

Dada la función f se halla la primera derivada $f'(x)$.

Se iguala a cero la primera derivada, $f'(x) = 0$.

El conjunto solución son los valores críticos.

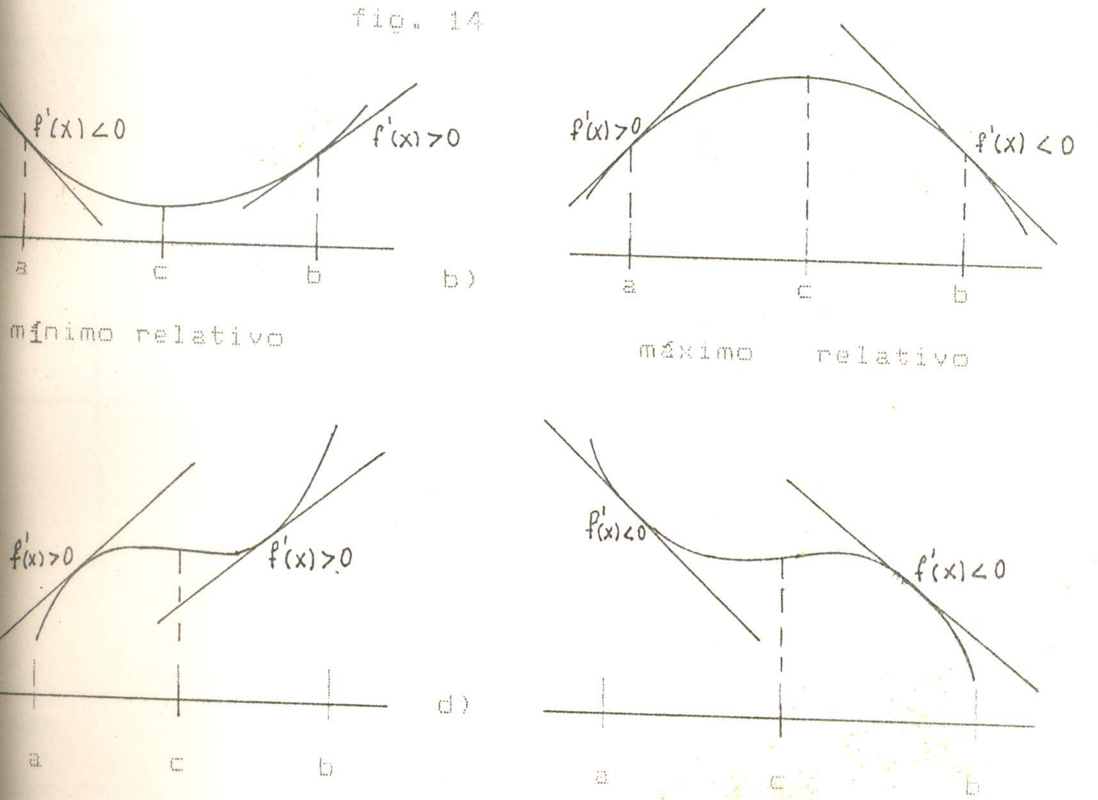
– CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION f.

c un valor crítico de una función f contínua en un
rvalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el
rvalo, exepto a lo sumo en c, f(c) puede clasificarse como
e:

1.10.1 TEOREMA

Si existe un intervalo (c−d ,c + d) tal que $f'(x) > 0$, ∀ x
c − d, c) y $f'(x) < 0$, ∀ x ∈ (c, c + d) ==> f(c) es un
mo local. Si ambas desigualdades se invierten, entonces
es un mínimo local. En la fig. 17 (a), (b) , (c), (d)
a realizado una representación gráfica del teorema.

fig. 14



mínimo relativo

máximo relativo

ni máximo ni mínimo relativo

DEMOSTRACION

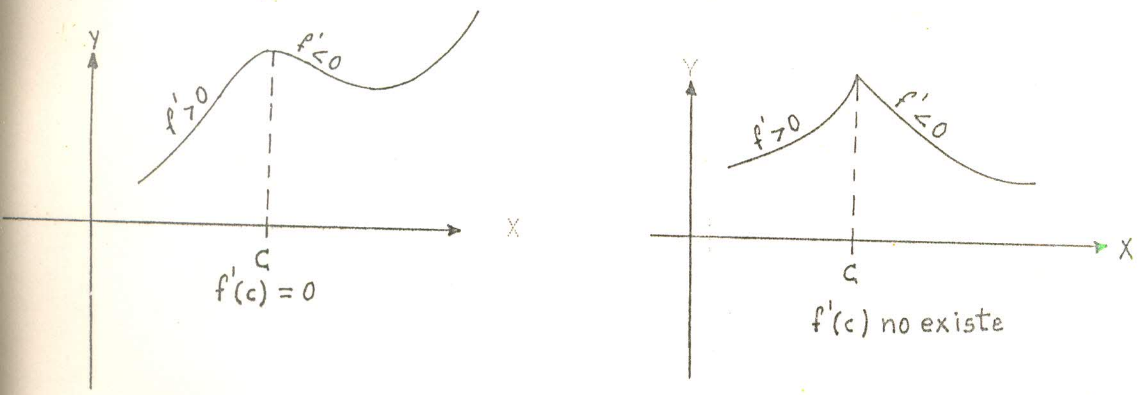
s teoremas 1.8.1. 1.8.2 se tiene que f es creciente en), puesto que $f'(x) > 0$, para todo x tal que $x < c$ y se tiene que es decreciente en (c ; b) pues $f'(x)$ a todo x tal que $x > c$ entonces $f(x) < f(c)$ para todo

con lo que f tiene máximo relativo en c.

nificado geométrico lo podemos observar en la fig.19 nemos graficada la función f que satisface la s.

intervalo (a ; c) la pendiente de las rectas tangentes
positivas y en el intervalo (c ; b) son negativas
ta claro entonces que en c existe el máximo relativo de

fig. 15



Ejemplo 1.- Aplicación del criterio de la primera
ada.

lar todos los máximos y mínimos relativos de la función
x,y)/ $f(x) = x/2 - \text{sen}(x)$, $x \in (0 ; 2\pi)$}.

ION: $f'(x) = 1/2 - \cos x = 0$, hacemos $f' = 0$

$\Rightarrow \cos x = 1/2$.

$\Rightarrow x = \pi/3,\ 5\pi/3$ son los valores críticos

enemos los siguientes intervalos:

rvalo $0 < x < \pi/3$ $\pi/3 < x < 5\pi/3$ $5\pi/3 < x < 2\pi$

si $f'(x) > 0 \Longrightarrow 1/2 - \cos x = 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$.

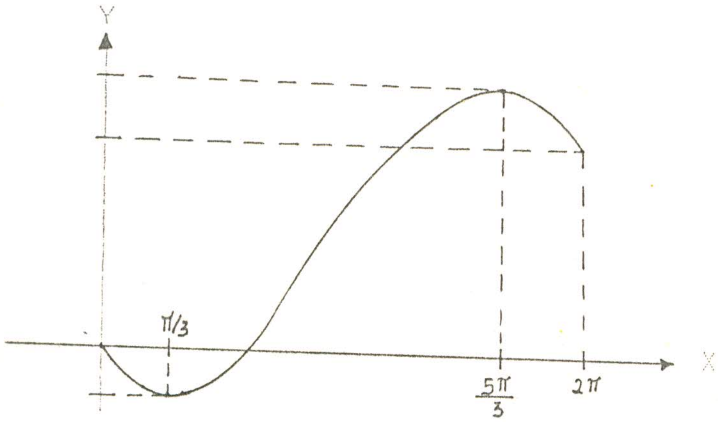
$\forall X \in (0 , \pi/3) \cup (5\pi/3 , 2\pi)$ y $f'(x) < 0$.

$\forall X \in (\pi/3 , 5\pi/3)$

cluimos que hay un mínimo relativo en x = $\pi/3$ y un máximo
tivo en x = $5\pi/3$.

representación gráfica lo podemos observar en la fig. 16

fig. 16



.- CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION f.

.-TEOREMA.- Sea f una función tal que f (c) = 0, tal que
gunda derivada de f exista en un intervalo abierto que
nga a c, entonces.

i $f''(c) > 0$, ==> f(c) es un valor mínimo relativo de f
i $f''(c) < 0$, ==> f(c) es un valor máximo relativo de f
i $f''(c) = 0$, ==> el criterio no decide.

DEMOSTRACION

$f''(c) > 0 \Longrightarrow f''$ es la derivada de $f'(x)$ y por el teorema

valor medio , existe $d > 0$. tal que si: $c - d < X_1 < c <$

$< c + d \Longrightarrow f'(X1) < f'(c) < f'(X_2$ puesto que $f'(c) = 0 \Longrightarrow$

$X) < 0 \ \forall X \in (c - d, c)$, $f'(x) > 0 \ \forall x \in (c, c + d)$

$f(c)$ es un mínimo local.

mplo.− Utilizando el criterio de la segunda derivada.

lar los extremos relativos de $f(x) = -3X^5 + 5X^3$.

UCION. Calculamos primero los valores críticos de f

$f'(x) = -15X^4 + 15X^2 = 15X^2(1 - X^2) = 0$.

onces $X = \{ -1 , 0 , 1 \}$ son los valores críticos.

mo f' existe para todo x, esos son los únicos valores

ticos y aplicando el criterio de la segunda derivada

emos que : $f''(x) = 15(-4 X^3 + 2X)$, entonces.

$''(c) > 0, \Longrightarrow f''(-1) = 30 > 0: \Longrightarrow$ Mínimo relativo

$''(c) > 0, \Longrightarrow f''(0) = 0. \Longrightarrow$ el criterio no decide

$(c) > 0, \Longrightarrow f''(1) = -30 \Longrightarrow f(1)$ es máximo relativo

Puesto que el criterio falla para el punto (0 , 0),

empleamos el criterio de la primera derivada de modo que

(0 , 0) no es extremo relativo.

TA: El criterio de la segunda derivada sólo puede ser

ilizado sí.

− f es dos veces derivable en un intervalo abierto que

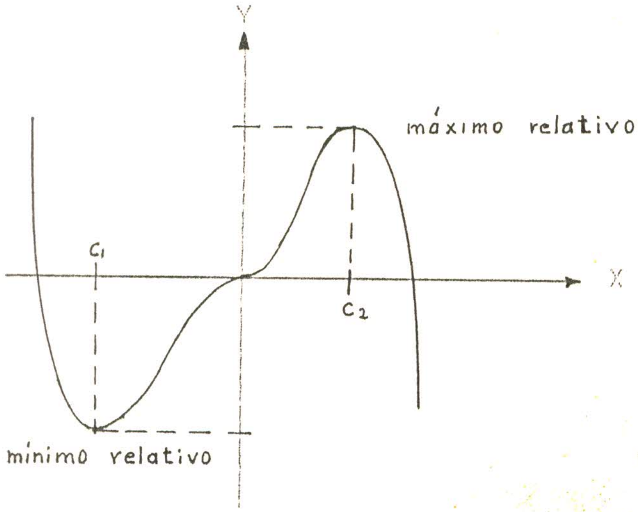
tiene a c.

$f'(c) = 0.$

$f''(c) = 0.$

representación gráfica la podemos observar en la fig.17.

fig. 17

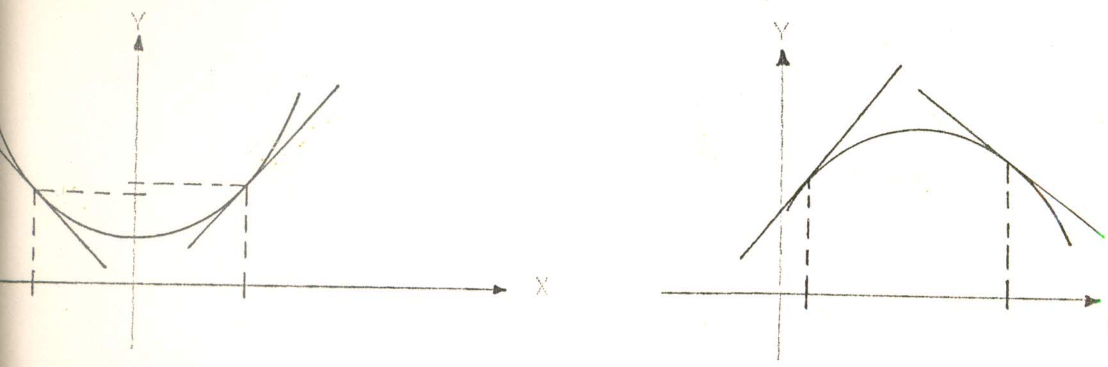


1.12.- CONCAVIDAD

NICION.- Sea f derivable en un intervalo abierto (a;b) mos que la gráfica de f es cóncava hacia arriba si f' es iente en ese intervalo y cóncava hacia abajo si f' es eciente en ese intervalo.

la fig. 18 se ha realizado la interpretación gráfica a nición dada.

fig. 18



CAVA HACIA ARRIBA f´ CRECIENTE

CONÇAVA HACIA ABAJO
f´ DECRECIENTE

la fig. 22 podemos obtener la siguiente interpretación
ica de la concavidad.

Si una curva está por encima de sus rectas tangentes, es
ava hacia arriba.

Si una curva está por debajo de sus rectas tangentes, es
ava hacia abajo.

ontinuación daremos algunos ejemplos de concavidades.

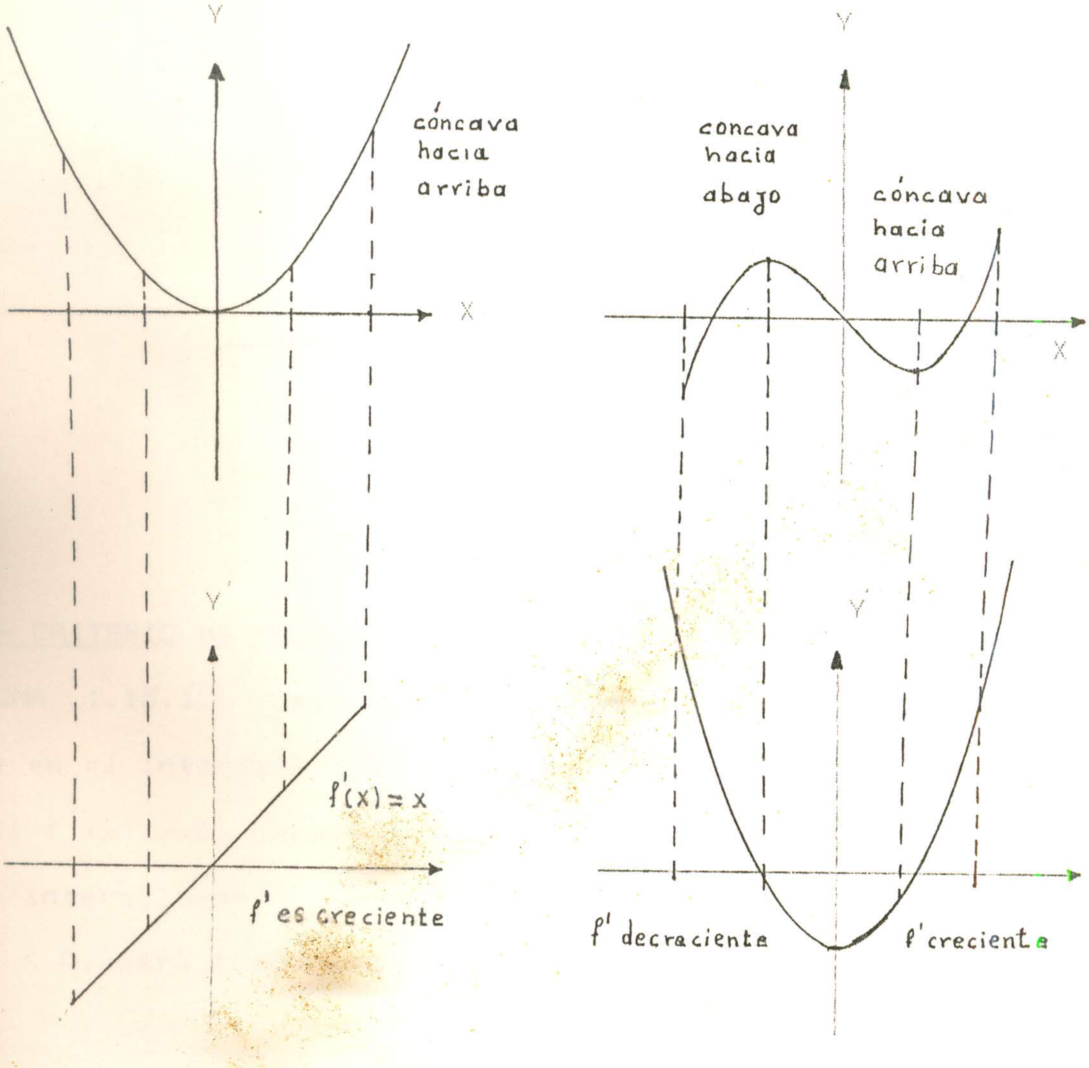
emplo 1.- Comparación de las gráficas de f y f´.

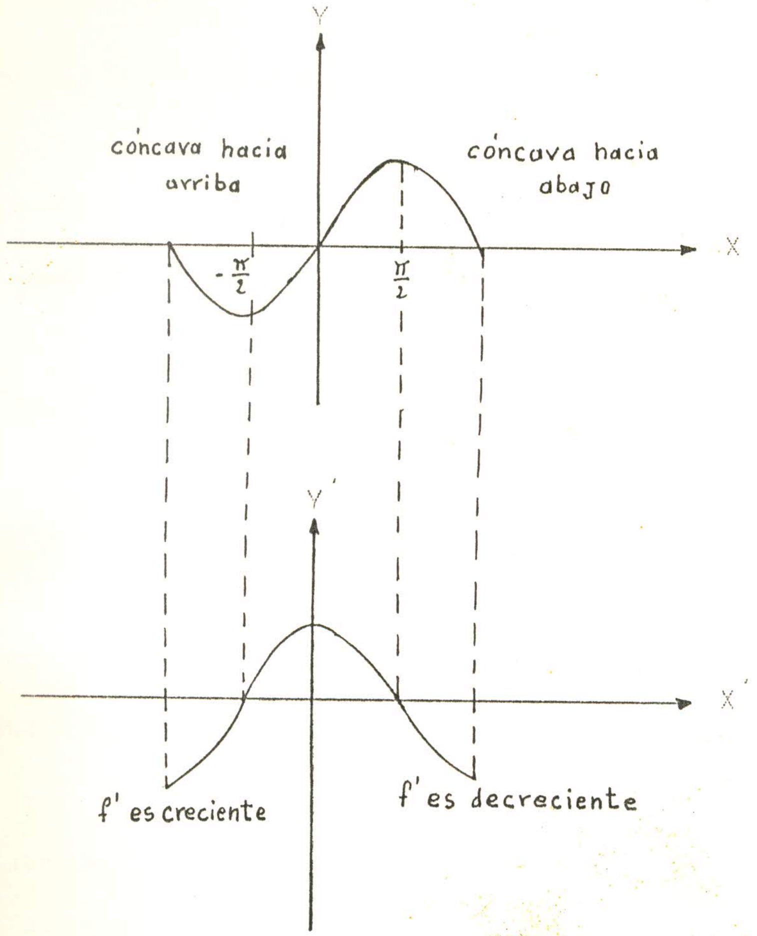
las funciones que se indican, dibujar las gráficas de f y
ara mostrar que f´ es creciente en los intervalos en que la
ica de f es cóncava hacia arriba y que f´ es decreciente en
intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

$x) = X^2/2$ b) $f(x) = (X^3 - 3X)/3$ c) $f(x) = \text{sen } x$.

$x \in R$.

SOLUCION. VER LA fig. 23





13.- CRITERIO DE CONCAVIDAD

EOREMA 1.13.1.- Sea f una función cuya segunda derivada ste en el intervalo abierto (a ; b) entonces:

Si $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a ; b)$ ==> f' es creciente ese intervalo ==> f es cóncava hacia arriba en (a, b).

$(x) < 0$, para todo $x \in (a ; b)$ ==> f es cóncava hacia jo.

DEMOSTRACION

deduce del teorema 3 y 4 sobre las funciones crecientes y crecientes y de la definición de concavidad dada.

tece que no se definio concavidad para rectas, es decir una cta no es cóncava hacia arriba ni hacia abajo.

onclusión.- Si $f''(x) = 0$, para todo $x \in (a ; b)$ entonces f

14.- PUNTO DE INFLEXION

14.1 DEFINICION.- Si la gráfica de una función continua see recta tangente en un punto donde la concavidad cambia de ntido, llamamos a ese PUNTO DE INFLEXION.

orema 1,14.1 : 9.- PUNTOS DE INFLEXION.- Si $(c, f(c))$ es punto de inflexión de la gráfica de f, entonces o es

$f''(c) = 0$, o f'' no esta definida en $X = c$.

Ejemplo: Hacer la representación gráfica de

$f(x) = X^4 + X^3 - 3X^2 + 1$.

LUCION derivando dos veces, tenemos:

$f'(x) = 4X^3 + 3X^2 - 6X$.

$f''(x) = 12X^2 + 6X - 6 . 6(2X - 1)(X + 1)$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow$

s posibles puntos de inflexión son $X = -1$ y $X = 1/2$.

$f''(-1) = 0$ y $f''(1/2) = 0$ concluimos que

ambos son puntos de inflexión, obteniendo los siguientes s $-\infty < X < -1$ $-1 < X < ½$ $½ < X + \infty$

Sobre los que debemos realizar el análisis

$f''(x) > 0 \Longrightarrow (2X - 1)(X + 1) > 0.$

$2X - 1) > 0$ y $(X + 1) > 0$ } o {$(2X - 1) < 0$ y

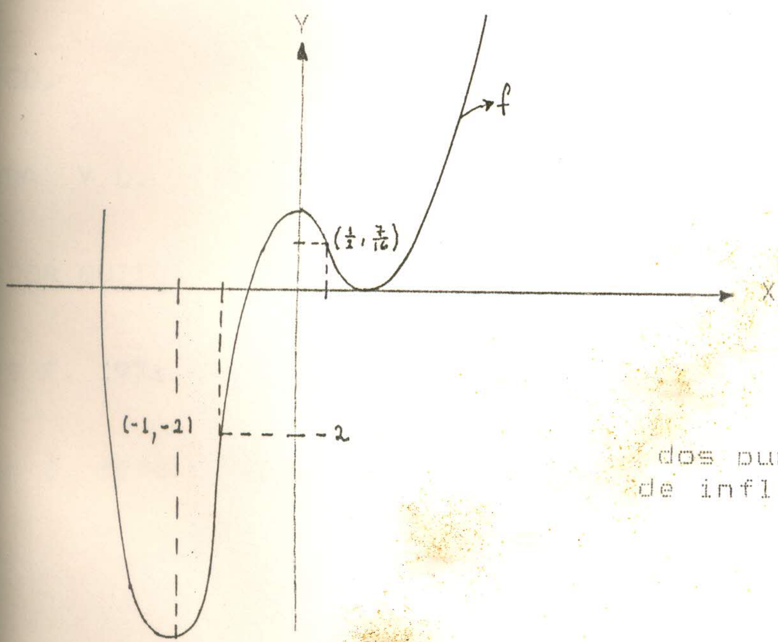
$> 1/2$ U $X > -1$) o ($X < 1/2$ y $X < -1$) $\Longrightarrow$ f es

hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -1)$ U $(1/2, +\infty)$.

cóncava hacia abajo en el intervalo $(-1, 1/2)$

entación gráfica lo podemos observar en la fig.20

fig 20



dos puntos
de inflexión

BILIOGRAFIA

KS W. 1991 CALCULO AVANZADO EDT. LIMUSA MEXICO.

YLOR W. 1981 CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EDT. LIMUSA XICO.

ROBA Y L. 1982 ANALISIS MATEMATICO EDT. U. CENTRAL DEL UADOR QUITO.

RES F. 1976 ANALISIS MATEMATICO EDT. CARVAJAL COLOMBIA.

NAR S. 1976 CALCULUS EDT. REVERTE S.A ESPA\A.