ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE MATEMATICA

POST-GRADO EN EDUCACION MATEMATICA

MONOGRAFIA PREVIA LA OBTENCION DEL TITULO:

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

TEMA:

RESOLUCION DE ECUACIONES POLINOMICAS UTILIZANDO PROGRAMACION EN PASCAL

ALUMNO:

SIMON BOLIVAR KUONQUI MERA

DIRECTOR:

ING. LUIS RODRIGUEZ OJEDA

1993 - 1994

GUAYAQUIL - ECUADOR

D E D I C A T O R I A :

A Lupe:

De quien recibí todo el apoyo que una persona pueda desear para llegar con éxito a su meta.

A Christian y Serguei:

Quienes despiertan en mí el gran deseo de ser siempre mejor.

A G R A D E C I M I E N T O :

Quiero hacer llegar mis sinceros agradecimientos a todas las personas e instituciones que de una u otra forma han hecho posible la realización de este Post-grado.

A **FILANBANCO**, por su gran aporte económico en beneficio de la educación del país.

A la **ESPOL**, que con su personal docente altamente calificado, supieron inyectar sus conocimientos con mística de verdaderos **MAESTROS**.

Al **MINISTERIO DE EDUCACION**, Institución gracias a la cual fue posible que este proyecto inicie, se desarrolle y culmine con el exito que todos habíamos deseado.

Quiero hacer un reconocimiento especial al M.C. Gaudencio Zurita, mentalizador y coordinador de este Post-grado, El, supo realizar un trabajo titánico, aceptó y ganó el reto que se había trazado, aunque yo pienso que ese no era su objetivo, ganar el reto, sino el de empezar a transformar la educación en el país, transformación que se la necesita desde hace mucho tiempo pero que no hemos tenido decisión ni apoyo para misión de tanta envergadura.

DECLARACION EXPRESA

La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la **ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL.**

(Reglamento de exámenes y títulos profesionales)

I N D I C E

CAPITULO I

INTRODUCCION. 7

.- FUNCIONES POLINOMICAS Y RACIONALES. 8

1.1.- ECUACION ENTERA RACIONAL. 8

1.2.- POLINOMIOS DE GRADO N. 8

1.3.- COCIENTE DE POLINOMIOS. 9

1.3.1.- División Larga. 9

1.3.2.- División Sintética. 10

1.4.- TEOREMA DEL RESIDUO. 11

1.5.- TEOREMA DEL FACTOR. 12

1.6.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA. 13

1.7.- CEROS DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES REALES. . . . 16

1.8.- CEROS RACIONALES DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS. 17

1.9.- CEROS REALES DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES REALES. 18

1.10.- FUNCIONES RACIONALES. 21

INTRODUCCCION

presente trabajo de investigación monográfica ha sido alizado con el propósito de aportar en algo a la ucación Media en el área de la Matemática y concretamente la resolución de Ecuaciones Polinómicas.

dividido este trabajo en dos capítulos: El primero está dicado estrictamente a la parte algebraica y, el segundo la aplicación de la Programación en Pascal para hallar raíces de las ecuaciones polinómicas.

a tema tratado será ilustrado con un sencillo ejemplo, a dar así una mejor interpretación del mismo, y de esta ma ir preparando el terreno del capítulo segundo.

empezar el segundo capítulo haré previamente una tesis sobre Lenguaje de Programación y Turbo Pascal. El odo de Bairstow para hallar las raíces de polinomios tratado con mayor atención en vista de que es una cación directa de lo revisado en el primer capítulo.

izaré una correlación entre la parte algorítmica, la ramática y el diagrama de flujo.

lmente ilustraré algunas prueba de corridas del rama Bairstow.

o igualmente que este pequeño aporte ayude a descifrar d. cualquier inquietud que haya tenido previamente.

CAPITULO I

FUNCIONES POLINOMICAS Y RACIONALES

..- ECUACION ENTERA RACIONAL.-

inición.- Una ecuación entera racional de grado n en la iable x es una expresión de la forma

$^{n}+A_1X^{n-1}+A_2X^{n-2}+\ldots+A_{n-1}X+A_n=0$ donde n es un entero no ativo y los A_i son constantes reales o complejas; $A_0=0$.

a forma de expresar la ecuación anterior es:

$P_1X^{n-1}+P_2X^{n-2}+\ldots+P_{n-1}X+P_n = 0$. al dividir por $A_0=0$.

nplos:

$-2X^2+3X-5=0$ es racional entera de grado 3

$2X+4=0$ es racional entera de grado 2

$3X-8=0$ es racional entera de grado 4

rvese que en cada una de las ecuaciones los exponentes X son enteros positivos y los coeficientes de las ables son constantes (reales o complejas).

- POLINOMIOS DE GRADO N.-

ición.- Un polinomio de grado n en la variable X es función de X de la forma

$A_0X^n+A_1X^{n-1}+A_2X^{n-2}+\ldots+A_{n-1}X+A_n$, $A_0=0$; donde n es un o no negativo y las A_i constantes reales o complejas. ces $f(x)=0$ es una ecuación racional entera de grado n

X.

mplos.-

$f(x)= 3X^3+X^2+5X-6$, se tiene $f(-2)=3(-2)^3+(-2)^2+5(-2)-$
$\Longrightarrow$ $f(-2)=-36$.

$f(x) = X^2 + 2X - 8$, se tiene $f(\ 5)=(\ 5)^2+2(\ 5)-8$ $\Longrightarrow$
$5)=2 \ 5-3$. Todo valor de X que anule a f(x) recibe el
bre de raíz de la ecuación $f(x)=0$.

mplo:

s una raíz de la ecuación $f(x)=3X^3-2X^2-5X-6=0$, ya que:
$)=24-8-10-6=0$.

.- COCIENTE DE POLINOMIOS.-

.1.- División larga.-

rema:- Sean dos polinomios cualesquiera P(x) y D(x),
de el grado de D(x) < grado de P(x) y D(x)=0, entonces
sten los polinomios R(x) y Q(x), tales que:
$)=D(x)Q(x)+R(x)$ donde el grado de R(x) < grado de D(x) o
n $R(x)=0$ y la suma de los grados de D(x) y Q(x) es
al al grado de P(x).

ecuación $P(x) = D(x)Q(x)+R(x)$ es una consecuencia
ecta de la ecuación que resulta de la división de:

$$\frac{x)}{x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

de a P(x) se le llama dividendo; D(x) se le llama
sor; Q(x) se le llama cociente y a R(x) se le llama
duo o resto.

mplo:

n $P(z)=2Z^4-Z^3+7Z^2-2Z-2$ y $D(z)=2Z^2-Z+1$. Encontrar $Q(z)$ y
).

$$
\begin{array}{l|l}
{}^{4}-Z^3+7Z^2-2Z-2 & 2Z^2-Z+1 \\
\cline{2-2}
{}^{4}+Z^3-Z^2 & Z^2+3 \\
\cline{1-1}
\quad 6Z^2-2Z-2 & \\
\quad -6Z^2+3Z-3 & \\
\cline{1-1}
\qquad Z-5 &
\end{array}
$$

$Q(z) = Z^2+3$

$R(z) = Z-5$

$P(z) = Q(z)D(z)+R(z)$

2.- División Sintética.-

livisión sintética es un método abreviado de efectuar la sión de cualquier polinomio por un polinomio de la na (x+r). Por este método podemos determinar los icientes del cociente y tambien el residuo.

nplo:

$P(x) = 3X^5-4X^4-5X^3-8X+25$

$= X-2$

ar $Q(x)$ y $R(x)$.

escriben los coeficientes de $P(x)$, sustituyendo con s los terminos cuyas potencias de X faltan, es decir:

$$3 \quad -4 \quad -5 \quad +0 \quad -8 \quad +25$$

ntinuación y en forma de división clásica se escribe el ndo termino de D(x) cambiando su signo.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 3 & -4 & -5 & +0 & -8 & +25 & 2 \\ \cline{7-7} \end{array}$$

rimer coeficiente de P(x) se escribe en el primer lugar na tercera fila y se le multiplica por el divisor 2.

producto 6 se coloca en la segunda fila bajo el segundo eficiente de P(x) y se suma a este, obteniendo 2, que se ne en la columna correspondiente.

e 2 se multiplica por el 2 del divisor y el producto 4 suma a -5, dando -1 y así sucesivamente.

último número de la tercera fila es el resto y todo los eros a su izquierda son los coeficientes del cociente.:

-4	-5	+0	-8	+25	¦	2
+6	+4	-2	-4	-24	¦	
+2	-1	-2	-12	+1		residuo

ficientes de Q(x)

o P(x) es de quinto grado y D(x) de primer grado, onces Q(x) es de cuarto grado.

solución es: $3X^4+2X^3-X^2-2X-12+\frac{1}{X-2}$

o P(x) = Q(x)D(x)+R, entonces:

$-4X^4-5X^3-8X+25=(3X^4+2X^3-X^2-2X-12)(X-2)+\frac{1}{X-2}$

.- TEOREMA DEL RESIDUO.-

un polinomio P(x), de grado n>0, se divide entre X-r, onces el residuo R es una constante y es igual al inomio cuando se sustituye r por X: es decir P(r)=R.

ostración.-

Q(x) es el cociente, por definición de división se ne:

) = Q(x)(x-r)+R(x)

o el grado R(x)<grado (x-r) ===> R es constante.

o $P(x) = Q(x)(x-r)+R(x)$ se cumple para cualquier valor

X, entonces se cumple también:

$) = Q(r)(r-r)+R$

$) = Q(r).0+R$

$) = R$

mplo:

lar por división sintética Q(x) y R, de dividir :

$) = X^4-2X^2+3X-2$ entre $D(x) = X+2$. Utilizar el resultado

a calcular P(-2).

ución:

$) = X^4-2X^2-3X-2$

$) = X+2 = X-(-2)$ y $r = -2$

+0	-2	+3	-2	¦	-2
-2	+4	-4	+2	¦	
-2	+2	-1	+0		

$) = X^3-2X^2+2X-1$, y $R = 0$

$2) = 0$

.- TEOREMA DEL FACTOR.-

Teorema del Residuo nos conduce al Teorema del Factor

dice:

polinomio P(x) de grado $n > 0$ es divisible por (x-r), es

ir (x-r) es un factor de P(x), si y solamente si r es un

o de P(x)

ostración:

$P(x) = Q(x)(x-r)+R$

r es un cero de P(x), entonces $P(r)=0$ y como $P(r)=R$

onces $P(x) = Q(x)(x-r)+0$

$P(x) = Q(x)(x-r)$ Luego x-r es un factor de P(x)

iprocamente:

x-r es un factor de P(x), entonces:

$) = Q(x)(x-r)$

$) = Q(r)(r-r) = Q(r).0 = 0$

tanto, r es un cero de P(x)

mplo:

trar que X-1 es un factor de $P(x) = 14X^{99}-65X^{56}+51$

ución:: Se calcula el residuo de dividir P(x) entre X-1.

ta calcular según el Teorema del Residuo, P(1)

$) = 14(1)^{99}-65(1)^{56}+51$

$= 14-65+51 = 0$

o $P(1) = 0$, 1 es un cero de P(x) y por el Teorema del tor, (x-1) es un factor de P(x).

.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Teorema del Factor establece que si r es un cero de P(x) ndo $P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...+A_1X+A_0$, donde n>0, entonces $x) = A_nX^{n-1}+...+q_0$ tal que $P(x) = (x-r)Q(x)$.

e teorema se aplica cuando se conoce algo acerca de los os de P(x).

sabemos encontrar los ceros de polinomios de primero y undo grado, pero no se ha dicho nada acerca de los inomios de grado mayor.

siguiente teorema no dice como encontrar los ceros de un inomio, pero si garantiza la existencia de estos.

taremos la validez de este teorema, ya que su stración es demasiada complicada para incluirla aquí.

ema:

$P(x)$ es de grado $n > 0$ entonces existe un r real o lejo tal que $P(r) = 0$. En otras palabras, todo $P(x)$ de mayor que 0, tiene al menos un cero.

ngamos: $P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...+A_1X+A_0$ donde el grado entonces existe un r de $P(x)$. Luego, por el Teorema del or, tenemos:

$x) = A_nX^{n-1}+...+q_1$ tal que $P(x) = (x-r_1)Q_1(x)$ **(1)**

$-1 > 0$ se puede aplicar el Teorema Fundamental del ora a $Q_1(x)$ para ver que existe un r_2 tal que $Q_1(r_2)=0$ nces por el Teorema del Factor:

$x) = A_nX^{n-2}+...+q_2$ tal que $Q_1(x) = (x-r_2)Q_2(x)$ **(2)**

plazando **(2)** en **(1)**:

$= (x-r_1)(x-r_2)Q_2(x)$ **(3)**

el grado $Q_2(x)$ es positivo, entonces $Q_2(x)$ tiene un r_3, así que:

$) = A_nX^{n-3}+...+q_3$ tal que $Q_2(x) = (x-r_3)Q_3(x)$ **(4)**

eemplazamos la ecuación **(4)** por la **(3)**, tenemos:

$= (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)Q(x)$

puede continuar este proceso hasta que el grado del omio cociente sea cero, esto es, después de n pasos. timo polinomio cociente es:

$= A_nX^{n-n} = An$, y por consiguiente:

$= (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n)A_n$

laro determinar que los números $r_1, r_2, r_3,...,r_n$ son samente los ceros de $P(x)$, entonces $P(x)$ tiene ctamente n ceros no necesariamente diferentes.

ervaciones:

- El teorema ya se ha verificado para $n = 1$ y $n = 2$.

s si $P(x) = ax + b$ y r es un cero, entonces:

) = $a(x-r)$ porque $r = -b/a$, y si $P(x) = ax^2 + bx + c$

un polinomio de segundo grado, con ceros r_1 y r_2,

onces: $P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$.

.- De la ecuación $P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)$,

ro que los números $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ son precisamente los

os de $P(x)$. Por tanto, $P(x)$ tiene exactamente n ceros no

esariamente diferentes.

).- Si $P(x)$ se representa como el producto de factores

eales y $(x-r)$ ocurre m veces, entonces r se llama un

o de multiplicidad m.

.- El Teorema Fundamental del Algebra asegura la

stencia de solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

mplo:

3 es un cero doble de $P(x) = X^4-12X^3+55X^2-114X+90$,

ribir a $P(x)$ como un producto de factores lineales.

ución: Como 3 es un cero doble de $P(x)$, entonces:

) $= (x-3)^2 Q(x)$

$= (X^2-6X+9)Q(x)$

a hallar $Q(x)$ dividimos $P(x)$ entre (X^2-6X+9), nos da:

) $= X^2-6X+10$.

ndo: $X = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en $X^2-6X+10$ obtenemos los

os: $(3+i)$ y $(3-i)$.

› $P(x) = (x-3)^2 [x-(3+i)][x-(3-1)]$.

.- CEROS DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES REALES.-

rema.-

$P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...A_1X+A_0$ un polinomio de grado con coeficientes reales. Si r es un cero de), entonces su conjugado r también es un cero de P(x).

ostración.-

r es un cero de P(x), entonces:

$) = A_nr^n+ A_{n-1}r^{n-1}+...A_1r+A_0 = 0$

ando el conjugado a los dos lados de la ecuación, emos:

$) = A_nr^n+A_{n-1}r^{n-1}+...+A_1r+A_0 = 0$

el conjugado de la suma de dos o más términos es la de los conjugados de los términos y 0 = 0, tenemos:

$+A_{n-1}r^{n-1}+...A_1r+A_0 = 0$

el conjugado del producto de dos o más factores es el ducto de los conjugados de los factores, nos da:

$+A_{n-1}r^{n-1}+...+A_1r+A_0 = 0$

el conjugado de un número real es el mismo número real omo los coeficientes de P(x) son reales, se puede ibir:

$+A_{n-1}r^{n-1}+...+A_1r+A_0 = 0$ o

$= 0$. Es decir, r es un cero de P(x).

plo:

-i es un cero de $P(x) = X^3-4X^2-2X+20$. Hallar dos ceros de P(x) y luego descomponer P(x) en producto de ores lineales.

ución.- Si 3-i es un cero, entonces su conjugado, 3+i
bién lo es, y tenemos: [x-(3-i)] y [x-(3+i)],

$$\Rightarrow \frac{X^3-4X^2-2X+20}{[X-(3-i)][X-(3+i)} = \frac{X^3-4X^2-2X+20}{X^2-6X+10} = X+2$$

$\Rightarrow P(x) = [X-(3-i)][X-(3+i)](X+2)$

.- CEROS RACIONALES DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS.-

todos los coeficientes de P(x) C **Z**, entonces por medio siguiente teorema se pueden encontrar todos los ceros ionales de P(x), si existen.

rema:

b/c,C Q, c=0 en su mínima expresión, es un cero del inomio $P(x) = A_nX^n+A_{n-1}X^{n-1}+...+A_1X+A_0$, donde A_i son os enteros, entonces b es un factor de A_0 y c es un tor de A_n.

mplo:- Hallar todos los posibles ceros racionales del inomio $P(x) = 2X^3+3X^2+2X+3$

b/c C Q, c=0, es un cero racional de P(x), entonces debe un factor de $A_0 = 3$ y c de $A_n = 2$

unos valores de b serán: 1, -1, 3, -3

unos valores de c serán: 1, -1, 2, -2

onces los posibles valores de b/c serán: 1, -1, 3, - 1/2, -1/2, 3/2, -3/2.

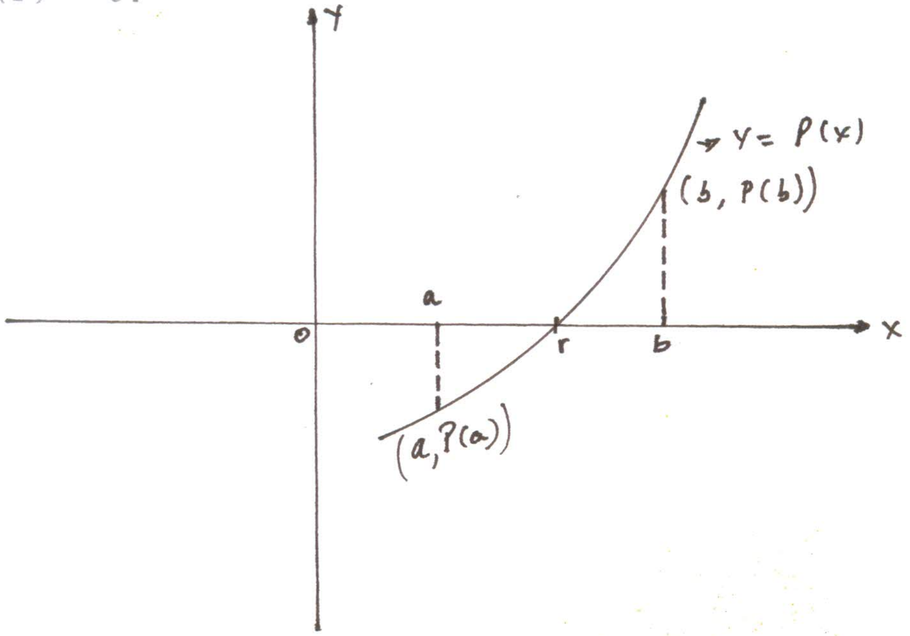
bando estos valores se halla que P(-3/2) = 0.

onces el único cero de P(x) es -3/2.

- CEROS REALES DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES REALES.-

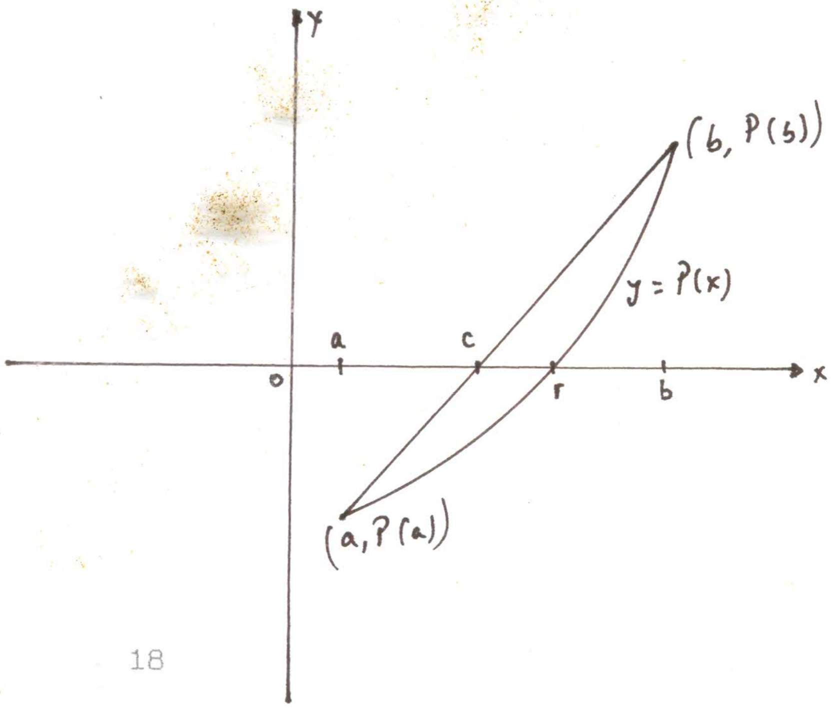
ema:

P(x) un polinomio con coeficientes reales; a y b dos ros tales que a < b. Si los dos números P(a) y P(b) en signos opuestos, entonces hay un número r entre a y que P(r) = 0.



ero real de un polinomio se puede aproximar de la ente manera:

figura se muestra un arco del gráfico de un polinomio



s números P(a) y P(b) tienen signos opuestos, y r es un
ro de P(x) que está entre a y b. Tomamos un punto c
roximado a r y que a su vez intersecta al eje X.

a encontrar a c procedemos de la siguiente manera:

pendiente del segmento (a, P(a)) hasta (b, P(b)) está
a por el cociente:

$$\frac{b) - P(a)}{b - a} \quad \textbf{(1)} \quad \text{y también por} \quad \frac{0 - P(a)}{c - a} \quad \textbf{(2)}$$

alando **(1)** con **(2)**, y desarrollando tenemos:

$$\frac{) - P(a)}{b - a} = \frac{0 - P(a)}{c - a}$$

$$> (c-a)P(b) - (c-a)P(a) = -(b-a)P(a)$$

$$> cP(b) - aP(b) - cP(a) + aP(a) = - bP(a) + aP(a)$$

$$> cP(b) - cP(a) = aP(b) - bP(a)$$

$$> c[P(b) - P(a)] = aP(b) - bP(a)$$

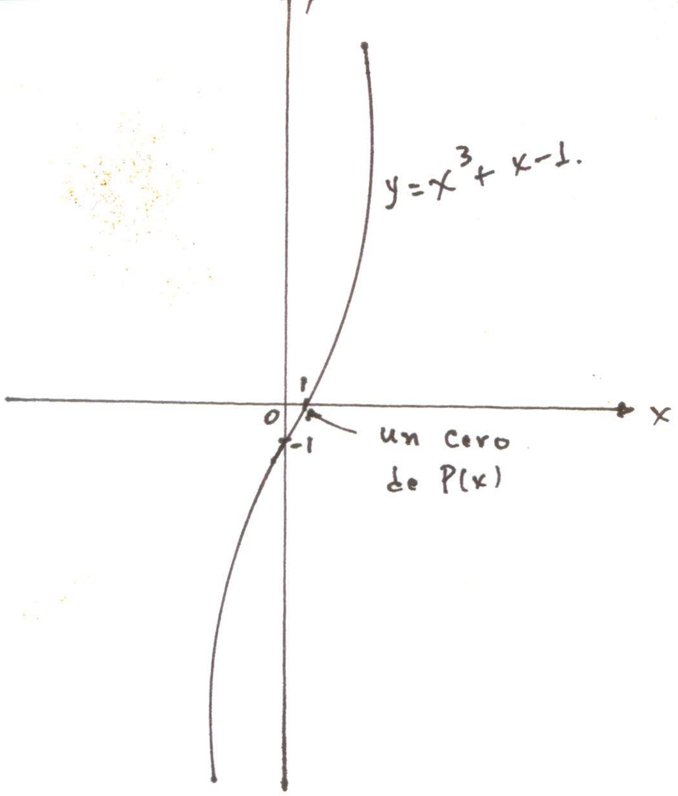
$$> c = \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)}$$

ando el número c como una aproximación de cero r:

$$r \simeq \frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)}$$

mplo:

siderar el gráfico del polinomio $P(x) = X^3+X-1$ para
erminar los ceros reales de P(x).



puede observar que el gráfico de P(x) tiene un cero e 0 y 1. Examinando un poco más observamos que el cero ncuentra entre (0,P(0)) y (1,P(1)) o sea entre (0,-1) y) que se encuentran en lados opuestos del eje X, nces el gráfico de P(x) debe intersectar el eje X en n punto entre 0 y 1.

ráfico de P(x) sugiere que el cero de P(x) > 1/2.

endo algunos cálculos observamos que:

$$5) = (0.6)^3 + 0.6 - 1 = -0.184$$

$$7) = (0.7)^3 + 0.7 - 1 = 0.043$$

estos dos números tienen signos opuestos, podemos mar que nuestro cero es un número entre 0.6 y 0.7 y podemos ir consiguiendo mejores aproximaciones.

cero de P(x) que este entre 0.6 y 0.7 es ximadamente:

$$\frac{aP(b) - bP(a)}{P(b) - P(a)} \simeq \frac{(0.6)(0.043) - (0.7)(-0.184)}{0.043 - (-0.184)} \simeq 0.681$$

se quiere una mejor aproximación se podrían calcular

381), P(0.682), P(0.679),... hasta encontrar dos
ros con signos opuestos.

- FUNCIONES RACIONALES.-

laman funciones racionales a las funciones que son
ntes de polinomios.

xpresiones: $f(x) = \dfrac{X^2-16}{X+4}$; $X = -4$

$= \dfrac{X^2}{X+1}$; $X = -1$ $\qquad h(x) = \dfrac{3X}{X-1}$; $X = 1$

$= \dfrac{4X^3-5X+1}{X^2-1}$; $X^2 = 1$ $\qquad k(x) = \dfrac{8}{3X^2}$; $X = 0$, son

ones racionales.

ominio de una función racional $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no
ene los ceros de la función polinómica g ya que la
ión entre cero no tiene sentido.

número real a es un cero de ambas funciones f y g en

$= \dfrac{f(x)}{g(x)}$, es decir si:

$= 0$ y $g(a) = 0$, entonces por el Teorema del Factor
ene:

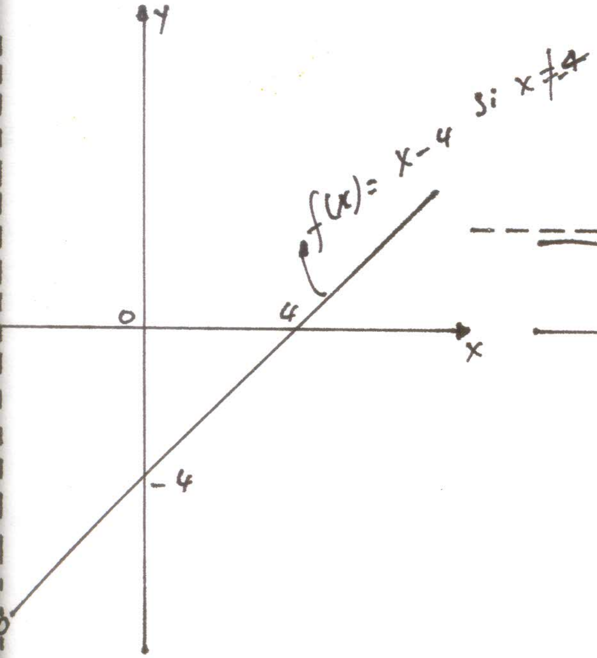
$$= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \text{ si } X = a$$

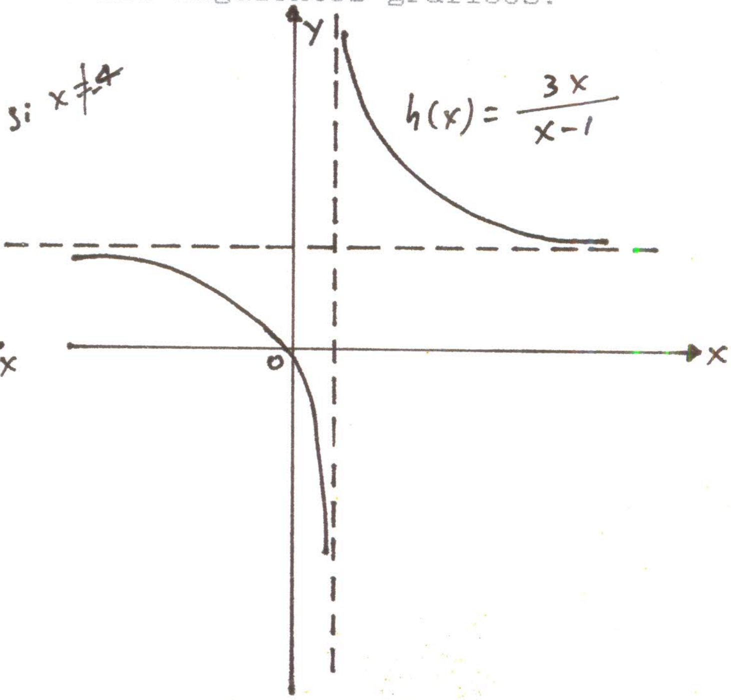
lo:

n: $f(x) = \dfrac{X^2-16}{X+4} = \dfrac{(x+4)((X-4)}{X+4} = X - 4$ si $X = -4$

$h(x) = \dfrac{3X}{X-1}$ si $X = 1$

las funciones dadas obtenemos los siguientes gráficos:





ervándolos detenidamente concluimos que:

La función $f(x) = \dfrac{X^2-16}{X+4}$ no está definida cuando el

minador $X+4$ es 0, es decir cuando $X = -4$. Esta ricción origina en el gráfico un punto perdido (o un co) puesto que tanto el numerador como el denominador simultaneamente cero cuando $X = -4$.

Para la función $h(x) = \dfrac{3X}{X-1}$, la restricción en el

minador origina que no solo no está definida cuando $X=1$ que también es infinitamente grande en valor absoluto do X se aproxima a 1.

to ocurre porque solamente el denominador es 0 cuando

1, no así el numerador que en este caso es 3.

i) $X = -4$ no es asíntota para $f(x) = \dfrac{X^2-16}{X+4}$, mientras

$X = 1$ sí lo es para $h(x) = \dfrac{3X}{X-1}$.

general, concluímos que:

$) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ si

$) = 0$ y si $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right|$ se hace infinitamente grande

ndo X se aproxima a **a**. Esta situación se presenta cuando

$) = 0$ y $f(a) = 0$.

CAPITULO II

ICACION DE TURBO PASCAL EN LA RESOLUCION DE ECUACIONES POLINOMICAS

liminares.-

es de dar inicio al presente capítulo creo de ortancia hacer notar los siguientes aspectos acionados con el **TURBO PASCAL.**

.- LENGUAJE DE PROGRAMACION

programa en computadora es una secuencia de rucciones nada ambiguas que toman datos, los manipulan cierta manera y regresan datos. Estas instrucciones en ser específicas porque una computadora entiende las rucciones como secuencias de interruptores de endido-apagado que no permiten ambiguedades.

lenguaje de alto nivel consiste en palabras que son les de reconocer y recordar para un ser humano, en r de las secuencias de ceros y unos.

siste de palabras como WRITE, PROGRAM, BEGIN Y END. do un programa se compila, cada palabra de alto nivel traduce en muchas cadenas de ceros y unos, que esentan instrucciones y datos. Hoy en día los endidos y apagados son interruptores electrónicos que la utadora fija por ella misma para responder a los ciados de sus programas.

lenguajes de alto nivel varían mucho en que "tan altos" En el nivel más bajo esta el lenguaje ensamblador, e cada palabra corresponde a una instrucción del esador de la PC.

lenguaje ensamblador es útil cuando se necesita pular la computadora directamente y cuando sabe exacta ecisamente lo que quiere hacer.

poco más arriba están los lenguajes como **C**, que son nas veces usados para escribir compiladores y sistemas ativos. **C** proporciona más ayuda que el ensamblador, da un acceso significativo a las funciones de bajo l de la computadora.

vía más arriba están los lenguajes como Pascal, que inan instrucciones fáciles de recordar, algún acceso de nivel, y por lo menos algunas funciones de seguridad el programador novato.

- TURBO PASCAL

lenguaje Pascal fue diseñado por Niklaus Wirth en el io de los años 70 como una forma de enseñar las ideas rogramación estructurada a los estudiantes de ciencias utacionales, y hasta hoy, todavía exhibe su ascendencia tica.

Pascal es un lenguaje de programación de propósitos ral que es adecuado para un amplio rango de aciones. Proporciona capacidades de alto nivel al ma operativo y a la CPU. Pascal tambien está diseñada enseñar métodos de programación estructurada que hacen fácil la depuración y modificación de los programas.

Pascal, como una forma distintiva de Pascal, también oporte a la programación orientada a objetos, que ende con mucho las capacidades proporcionadas por la ramación estructurada.

- PROPOSICIONES DE CONTROL EN PASCAL

THEN..ELSE: Se usa cuando el programa debe ramificarse una dirección u otra, basándose en la condición cificada en la cláusula IF. La cláusula ELSE es onal.Enunciados IF..THEN..ELSE múltiples pueden ser ados para manejar múltiples alternativas.

..END: Usado cuando el programa deba ramificarse en una e varias direcciones, dependiendo de los valores bidos en múltiples casos.Los enunciados CASE son una a más fácil de manejar muchas alternativas que con los ciados IF anidados. Turbo Pascal extiende el enunciado permitiendo la adición de una cláusula ELSE E..ELSE..END) para manejar situaciones en las que un r no esté implementado en ninguno de los casos. Los ores CASE deben ser constantes del tipo ordenal, a rencia de los valores de una cláusula IF, que pueden variables y tipos de datos no ordinales.

I:= M TO N DO: Uselo cuando el programa debe repetir un ciado una cierta cantidad de veces; aquí, I es la able de control del ciclo, **M** es el valor inicial, y **N** el valor final. Más de un enunciado puede repetirse si enlazan en un solo enunciado compuesto usando N..END. La variable de control es incrementada máticamente en cada pasada por el ciclo.

ILE..DO: Es utilizada cuando el programa debe repetir un
inciado basándose en que la condición del ciclo sea
rdadera, pero a) no se sabe si la condición será
rdadera alguna vez, y b) no se sabe por adelantado
intas veces se tendrá que ejecutar el ciclo. La condición
ciclo es evaluada antes de que el ciclo se ejecute,
que si es falsa cuando el programa alcance el ciclo
LE, entonces el ciclo nunca se ejecutará. Se pueden
etir muchos enunciados si se enlazan en un solo
nciado compuesto con BEGIN..END.

EAT..UNTIL: Debe usarse cuando un programa tenga que
etir un enunciado basándose en que una condición sea
dadera, pero a) el ciclo debe ejecutarse por lo menos
vez, y b) no se sabe por adelantado cuántas veces se
ne que repetir dicho enunciado. La condición del ciclo
evaluada después de que se ejecuta el ciclo, así que,
importar el valor de la condición del ciclo cuando el
grama alcance el enunciado REPEAT, el ciclo se ejecutará
lo menos una vez. Más de un enunciado puede ser
luido entre REPEAT y UNTIL sin tener que utilizar
IN..END.

.-PASOS EN EL DESARROLLO DE PROGRAMAS

- Establezca en una oración lo que el programa debe
r.

- Divida la tarea principal en subtareas hasta que cada
sea un claro paso lógico. Olvídese de los detalles del
uaje.

).- Decida los detalles generales, como las variables
bales y locales, las estructuras de datos, etc. Esconda
más que pueda dentro de subrutinas; cree el marco
eral del programa.

- Codifique y pruebe cada subrutina por separado antes
olocarla en el marco general del programa. Asegúrese de
cualquier variable externa usada por una subrutina sea
arada como parámetro.

Coloque todas las subrutinas en el marco general del
rama y pruebe el programa bajo una veriedad de
iciones.

- **PROGRAMACION ESTRUCTURADA**

es el nombre que se da al enfoque general de usar
los, es decir, delegar subtareas y emplear alguna forma
rogramación descendente con refinamiento por pasos.

la programación descendente se empieza haciendo un
uejo del cuerpo principal en seudocódigo, y si es muy
licado será necesario trazar varios bosquejos del
po principal, en donde cada uno irá completando cada
más detalles.

regresando a la programación estructurada podemos
r que su meta es producir programas que sean más
les: i) de escribir, ii) de corregir, iii) de leer y
de modificar.

resumen, Turbo Pascal es un lenguaje de programación
ñado para enseñar métodos de programación estructurada
hacen más fácil la depuración y modificación de los
ramas.

.- METODO DE BAIRSTOW PARA HALLAR LAS RAICES DE POLINOMIOS

establece en primer término que todo polinomio de grado de coeficientes A_i reales

$$) = x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0 \quad \textbf{(1)}$$

ple con las siguientes propiedades:

- Tienen **n** raíces ya sean reales o complejas, únicas o etidas.

- Las raíces complejas siempre aparecen en parejas plejas conjugadas.

.- Satisface la regla de los signos de Descartes.

método a utilizar para encontrar las raíces de la ación polinomial es el de **BAIRSTOW**, el mismo que nos ite factorizar un polinomio de segundo grado de la na $x^2 + px + q$ o partir de un polinomio P(x) de grado siendo $n > 2$, es decir:

$$) = Q(x)(x^2 + px + q) \quad \textbf{(2)}$$

raíces reales o complejas a y b del polinomio x^2+px+q a su vez raíces de P(x) o sea:

$$) = Q(x)(x-a)(x-b) \quad \textbf{(3)}$$

tiendo el método para el polinomio Q(x), se obtienen s dos raíces de p(x); y así sucesivamente hasta rminar las n raíces de la ecuación **(1)**.

continuación veremos una descripción del método de stow:

la ecuación polinomial **(1)**, si el polinomio p(x) se de entre x^2+px+q, se obtiene:

$$= (x^2 + px + q)Q(x) + Rx + S \quad \textbf{(4)}$$

le Rx + S es el residuo y Q(x) se puede expresar como:

$= x^{n-2} + B_1x^{n-3} + \ldots + B_{n-3}x + B_{n-2}$ (5)

el residuo Rx + S es nulo, entonces $x^2 + px + q$ es el

or de P(x) deseado. Ahora el objetivo es reducir R y S

ro para obtener los valores de p y q.

s a obtener R y S como funciones de p y q.

ituyendo la ecuación (5) en la (4):

$= (x^2+px+q)(x^{n-2}+B_1x^{n-3}+\ldots+B_{n-3}x+B_{n-2}) + Rx + S$

tuando el producto nos queda:

$= x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+B_1x^{n-1}+B_1px^{n-2}+B_1qx^{n-3}+B_2x^{n-2}+$

$x^{n-3}+B_2qx^{n-4}+\ldots+B_{n-3}x^3+B_{n-3}px^2+B_{n-3}qx+B_{n-2}x^2+B_{n-2}px+$

$_2q+Rx+S$

pando términos de la misma potencia:

$= x^n+x^{n-1}(p+B_1)+x^{n-2}(q+B_1p+B_2)+x^{n-3}(B_1q+B_2p)+$

$^{4}(B_2q)+\ldots+x^3(B_{n-3})+x^2(B_{n-3}p+B_{n-2})+x(B_{n-3}q+B_{n-2}p+R)+$

$_2q+S$

parando con la ecuación (1):

$= B_1 + p$ (6)

$= B_2 + pB_1 + q$ (7)

...

$= B_k + pB_{k-1} + qB_{k-2}$ $k=3,4.5,\ldots n-2$ (8)

...

$= R + pB_{n-2} + qB_{n-3}$ (9)

$= S$ (10)

se definen $B_0 = 1$ y $B_{-1} = 0$, y además B_n y B_{n-1} tales

: $R = B_{n-1}$ (11) $S = B_{n-1}$ (12)

ecuaciones (6) a (10) se pueden escribir en términos de

fórmula iterativa única.

= $B_k + pB_{k-1} + qB_{k-2}$ $\qquad k = 1,2,\ldots,n$ **(13)**

sérvese que de la fórmula **(6)** se puede determinar B_1 en rminos de p y A_1 conocida.

stituyendo esta B_1 en **(7)**, se puede determinar B_2 en rminos de A_1 yA_2 conocidas, así como p y q.

ntinuando en esta forma, se pueden determinar B_{n-1} y B_n términos de p y q, así como de las A_i conocidas.

stituyendo B_{n-1} y B_n en las ecuaciones **(11)** y **(12)** se cuentran R y S como funciones de p y q.

no se desea que el residuo de la ecuación **(4)** sea nulo, deben determinar p y q tales que se cumplan las uaciones:

= $f_1(p,q) = 0$ **(14)**

= $f_2(p,q) = 0$ **(15)**

s ecuaciones **(14)** y **(15)** forman un sistema de ecuaciones lineales en p y q, que se puede resolver por el método Newton-Raphson para funciones de dos variables.

expresión iterativa de Newton-Raphson que da la roximación x_{k+1} de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en a variable, es:

$$_{+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ta expresión de Newton-Raphson, se puede escribir:

$$f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f'(x_k) = 0 \qquad \textbf{(16)}$$

nde x_k es la aproximación anterior de la raíz.

expresión iterativa de Newton-Raphson para determinar el nto (x,y) en el cual la función de dos variables $f(x,y)$ e cero, se puede escribir tomando los primeros términos desarrollo en serie de Taylor para funciones de dos iables y bajo ciertas suposiciones.

$$k, y_k)+(x_{k+1}-x_k)f_x(x_k,y_k)+(y_{k+1}-y_k)f_y(x_k,y_k) = 0 \qquad (17)$$

de $f_x(x_k,y_k)$ representa la derivada parcial de $f(x,y)$ respecto a x evaluada en el punto de la k-esima oximación(x_k,y_k). En esta ecuación, (x_{k+1},y_{k+1}) resenta la nueva aproximación a la raíz en términos de aproximación anterior (x_k,y_k), así como la función ,y) y sus dos derivadas parciales evaluadas en (x_k,y_k). icando la ecuación **(17)** a las funciones **(14)** y **(15)**:

$$p_k,q_k) + pf_{1p}(p_k,q_k) + qf_{1q}(p_k,q_k) = 0 \qquad (18)$$

$$p_k,q_k) + pf_{2p}(p_k,q_k) + qf_{2q}(p_k,q_k) = 0 \qquad (19)$$

de:

$$p = p_{k+1} - p_k \qquad (20)$$

$$q = q_{k+1} - q_k \qquad (21)$$

sto que $R = f_1(p,q) = B_{n-1}$ y $S = f_2(p,q) = B_n+pB_{n-1}$, ecuaciones **(18)** y **(19)** se pueden expresar como

$$1 + p\left(\frac{B_{n-1}}{p}\right) + q\left(\frac{B_{n-1}}{q}\right) = 0 \qquad (22)$$

$$p_kB_{n-1}+ p\left(\frac{B_n}{p} + B_{n-1}+p_k\frac{B_{n-1}}{p}\right)+ q\left(\frac{B_n}{q} +p_k \frac{B_{n-1}}{q}\right) = 0$$

términos de B_n y B_{n-1}. Para simplificar la última ación, restemos la ecuación **(22)** multiplicada por p_k de ecuación **(23)** para obtener:

$$1 + \frac{B_{n-1}}{p} p + \frac{B_{n-1}}{q} q = 0 \qquad (24)$$

$$+ \left(\frac{B_n}{p} + B_{n-1}\right) p + \frac{B_n}{q} q = 0 \qquad (25)$$

a emplear estas fórmulas, se necesita conocer las adas parciales de B_n y B_{n-1}, se pueden obtener a r de la fórmula recursiva **(13)**, cuyas derivadas ales dan:

$$= -B_{k-1} - p\,\frac{B_{k-1}}{p} - q\,\frac{B_{k-2}}{p} \qquad (26)$$

$$= -B_{k-2} - p\,\frac{B_{k-1}}{q} - q\,\frac{B_{k-2}}{q} \qquad (27)$$

$$= \frac{B_{-1}}{q} = \frac{B_0}{p} = \frac{B_0}{q} = 0 \qquad \textbf{(28)}$$

o que $B_{-1} = 0$ y $B_0 = 1$

evitar la necesidad de evaluar las derivadas parciales y **(27)**, así como para obtener un algoritmo más iente, vamos a obtener otras formas de recurrencia más enientes.

como factorizamos $x^2 + px + q$ de $p(x)$ para obtener la ción **(4)**, factoricemos la $Q(x)$ de la ecuación **(4)** en la a forma para obtener

$$= (x^2 + px + q)(x^{n-4} + C_1x^{n-5} + \ldots + C_{n-5} + C_{n-4}) +$$
$$x + S* \qquad (29)$$

pando terminos de igual potencia y comparando con la ción **(5)**, se obtiene la relación de recurrencia

$$B_k - pC_{k-1} - qC_{k-2} \qquad k = 1,2,3,\ldots,n \qquad \textbf{(30)}$$

oga a la relación **(13)** con $C_{-1} = 0$ y $C_0 = 1$, y ndida hasta n.

egativo de la ecuación **(30)** con subíndice $k = k-1$ es $-$
$1 = -B_{k-1} + pC_{k-2} + qC_{k-3}$. Comparando esta expresión la **(26)** se infiere que:

$$\frac{B_k}{p} = - C_{k-1} \qquad (31)$$

álogamente, la relación (30) con $k = k-2$ se puede cribir como $- C_{k-2} + pC_{k-3} + qC_{k-4}$ que comparada con 7), da:

$$\frac{B_k}{q} = - C_{k-2} \qquad (32)$$

stituyendo (31) y (32) en las ecuaciones de Newton-phson (24) y (25), se obtiene:

$$C_{n-2}\, p + C_{n-3}\, q = B_{n-1} \qquad (33)$$

$$(C_{n-1} - B_{n-1})\, p + C_{n-2}\, q = B_n \qquad (34)$$

ra simplificar aún más la nomenclatura, se define

$$C_{n-1} = C_{n-1} - B_{n-1} \qquad (35)$$

n lo cual las ecuaciones anteriores quedan en la forma de irstow

$$C_{n-2}\, p + C_{n-3}\, q = B_{n-1} \qquad (36)$$

$$C_{n-1}\, p + C_{n-2}\, q = B_n \qquad (37)$$

e constituyen un sistema lineal de ecuaciones que puede solverse para p, q.

7.- PASOS A SEGUIR EN EL COMPUTADOR PARA RESOLVER UNA UACION POLINOMICA UTILIZANDO PROGRAMACION EN PASCAL

s pasos a seguir en el computador son:

.- Ingresar los valores iniciale de p y q.

).- Evaluar B_k para $k = 1,2,\ldots,n$ empleando la ecuación

$$A_k = B_k + pB_{k-1} + qB_{k-2} \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

i).- Evaluar C_k para $k = 1,2,\ldots,n-1$, empleando la ecuación

$$C_k = B_k - pC_{k-1} - qC_{k-2} \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

iv).- Evaluar $C_{n-1} = A_{n-1} - B_{n-1}$

).- Resolver el sistema de ecuaciones

$$C_{n-2}\, p + C_{n-3}\, q = B_{n-1}$$

$$C_{n-1}\, p + C_{n-2}\, q = B_{n}$$

para determinar las incógnitas p y q

i).- Obtener los nuevos valores de p y de q empleando

$$p_{k+1} = p_{k} + p$$

$$p_{k+1} = q_{k} + q$$

ii).- Determinar si ya convergió el m(todo, o sea, ver si $p <$ y $q <$. Si no ha convergido, regresar a **(ii)**

iii).- Con los valores obtenidos de p y q , determinar las raíces del factor cuadrático

$$x^{2} + px + q$$

x).- Repetir el proceso desde **(i)** con el polinomio reducido Q(x), hasta obtener todas las raíces de p(x).

.8.- PROGRAM BAIRSTOW

```
rogram Bairstow;
ar
a,b,c: array [1..20] of real;
i,j,n: integer;
r,s,dr,ds,den,tol, x,x1,x2 : real;
egin
 writeln ('grado del polinomio?');
 readln (n);
 writeln ('valores iniciales para el factor cuadrático:');
writeln ('ingrese el valor inicial de r');
readln (r);
writeln ('ingrese el valor inicial de s');
readln (s);
writeln ('tolerancia?');
readln (tol);
for i:= 0 to n do
   begin
```

```
  writeln('ingrese coeficiente', i);
  readln(a,[i+3]);
end;
b[1]:= 0;
b[2]:= 0;
c[1]:= 0;
c[2]:= 0;
repeat
    writeln('valores   iniciales   para   el   factor
    cuadrático');
    writeln('ingrese el valor inicial de r');
    readln(r);
    writeln('ingrese el valor inicial de s');
    readln(s);
    i:=1;
    if i > 20 then
        begin
          writeln('no converge');
          halt;
        end;
      writeln('factor  cuadrático  encontrado  x^2-r*x-
      s');
      writeln('r=',r, 's=',s);
      if n=2 then;
        begin
         x1:=(r+sqrt(abs(r*r=4*s))/2);
         writeln('x1=', x1);
         x2:=(r-sqrt(abs(r*r+4*s))/2);
         writeln('x2=',x2);
        end;
        n:=n-2;
         for i:= 3 to n+3 do
         a[i]:=b[i];
         until n > 3;
         if n=1 then
          begin
            writeln('ecuación lineal final ax+b');
            writeln('a=', b[n+2]);
            writeln('b=', b[n+3]);
             begin
              if b[n+2]<>0 then
              x1:=(b[n+3])/(b[n+2]);
              writeln('x1=',x1);
           end;
           if n = 2 then
           else
             begin
              writeln('ecuación    final     cuadrática
               a*x^2+bx+c');
              writeln('a=', b[n+1]);
              writeln('b=', b[n+2]);
              writeln('c=', b[n+3]);
              begin
              x1:=(r+sqrt(abs(r*r+4*s))/2);
```

```
            writeln('x1=', x1);
            x2:= (r-sqrt(abs(r*r+4*s))/2);
            writeln('x2=', x2);
          end;
       end;
    end;
 end.
```

B.1.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAM BAIRSTOW

BIBLIOGRAFIA

RITTON, J.- KRIEGH,B.-RUTLAND,L., 1970. Matemáticas
niversitarias. Cuarta edición. Editorial C.E.C.S.A.,
M{xico.

URDEN, R.- FAIRES, D., 1985. Análisis num{rico. Grupo
ditorial Iberoamericano, M{xico.

ENNEFELD, J. 1989. Turbo Pascal con aplicaciones 3.0; 4.0;
5.0. Grupo Editorial Iberoamericano, M{xico.

ALMER,S. 1992. Domine Turbo Pascal 6.0. Ventura Ediciones,
M{xico.

EREZ, A.- CARO, M.- OBONAGA, E. 1985. Matematica V.
ditorial Pime, Colombia.

PIEGEL, M. 1970. Algebra Superior. Ediciones McGraw Hill,
exico.

ASHINGTON, A. 1983. Fundamentos de Matemáicas con Cáculo.
rimera Edición. Editorial Fondo Educativo Interamericano,
stados Unidos de Norteamerica.