ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"VARIABLE ALEATORIA NORMAL"

MONOGRAFIA PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO
DE MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA
APLICADA AL NIVEL MEDIO

Presentada por

WAGNER CADENA MOSCOSO

GUAYAQUIL - ECUADOR
1994

LA VARIABLE ALEATORIA NORMAL

VARIABLE ALEATORIA NORMAL

1. INTRODUCCION

El presente trabajo sobre LA VARIABLE ALEATORIA NORMAL lo presentamos de manera directa, tratando que sea sencilla, clara y práctica para las personas que deseen ubicarse en en este tema.

Por ello comenzamos explicando Espacios Muestrales: finito, discreto y continuo; para luego de ello adentrarnos, de manera similar a la anterior, en La Función Probabilidad. De la variable aleatoria, luego de definirla, explicamos la aplicación y diferencia entre variable aleatoria discreta y continua, tratando que esta exposición sirva como base firme para conocer, de manera central, la DISTRIBUCION PROBABILISTICA NORMAL.

1.1 ESPACIOS MUESTRALES.-

1.1.1. CONCEPTO.- Dado un experimento, el conjunto S se denomina espacio muestral, si y solo sí, es la unión de todos los resultados posibles de dicho experimento.

Cuando estudiamos los resultados de una experimentación identificamos las distintas posibilidades con números, puntos o algún otro símbolo. Por ejemplo, si INECEL debe decidir donde ubicar dos plantas núcleo eléctricas y si (para ciertos fines) conviene indicar cuantas estarían ubicadas en Guayas, cuantas en Pichincha, podemos ubicar el espacio muestral así:

$$S=\{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2)\}$$

donde la primera coordenada es el número de plantas que estarán ubicadas en Guayas y la segunda coordenada es el número de las que se hallan en Pichincha. Geométricamente, este espacio muestral puede ser representado como en la figura 1.1 en la cual es evidente por ejemplo, que en dos de estos seis resultados posibles, Guayas y PIchincha Obtendrán igual número de plantas de energía. El uso de puntos en lugar de números o letras ofrece la ventaja que permite observar con mayor libertad o facilidad las distintas posiblidades y descubrir quizás algunas características especiales que varios de los resultados pueden tener en común.

En general los espacios muestrales son clasificados de acuerdo con el número de elementos que contiene

1.1.2 ESPACIO MUESTRAL FINITO.- Un espacio muestral es finito, si y solo sí el número de elementos que contiene es finito. Ejemplos de espacios muestrales finitos son: el proceso de elecciones de un presidente y un vicepresidente a ser escogidos entre los seis miembros de una asociación local, o las distintas formas en que un estudiante puede responder doce preguntas de verdadero o falso. Si los funcionarios gubernamentales encargados de controlar la emisión de contaminante de los automóviles requieren saber cuantos autos se deben inspeccionar antes de descubrir al primero que no cumpla con las exigencias legales. este podría ser el primero, el segundo, ..., el décimo quinto... y, todos sabemos que quizás tengan que inspeccionar miles de autos antes de encontrar alguno que no cumpla con las disposiciones de rigor. No sabiendo que tan lejos tendrán que ir. En ejemplos como este conviene tomar como espacio muestral S al conjunto completo de los números naturales.

S={ 1;2;3 }

S={si; no,si; no,no,si; ....}

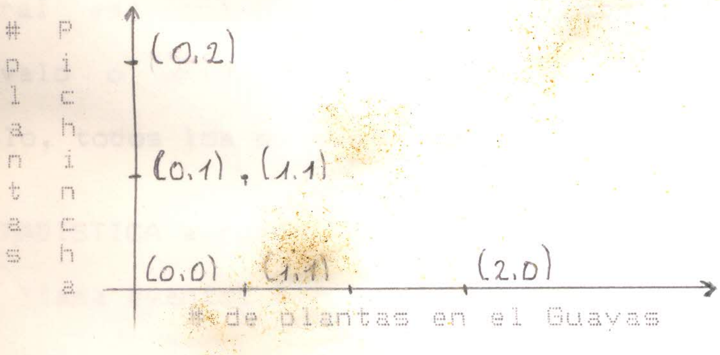


FIGURA 1.1

En el caso de la elección de Presidente y Vicepresidente entre seis miembros, si A,B,C,D,E,E,F son los seis miembros, el espacio muestral sería:

S={(A,B), (A,C), (A,E), (A,F), (B,A),.....(F,E)}

Donde el primer elemento del par es el Presidente y el segundo elemento el Vicepresidente; serán en total treinta resultados posibles.

En el caso del examen de doce preguntas falsas o verdaderas como respuesta, hay doce resultados posibles; y, si C es un automóvil que cumple y N uno que no cumple, el espacio muestral de los carros que contaminan el ambiente es:

S={N;CN;CCN;CCCN;CCCCN;...}

1.1.3 ESPACIO MUESTRAL DISCRETO.- En general se dice que un espacio muestral es dicreto, si solo si, tiene un número finito o infinito contable de elementos.

1.1.4 ESPACIO MUESTRAL CONTINUO.- Se dice que un espacio muestral es continuo si sus elementos constituyen un intervalo o unión de intervalos de números reales, por ejemplo, todos los puntos de un plano.

En ESTADISTICA a cualquier subconjunto del espacio muestral se lo llama evento. Por ejemplo con respecto a la figura 1.1

E1={(1,0),(0,1),(0,2)}

es el evento en que ambas provincias, Guayas o Pichincha, obtienen una de las dos plantas de energía.

E2={(0,0),(1,1)}

es el evento en que Guayas no obtiene ninguna de las dos plantas; y,

E3={(0,0),(1,1)}

es el evento en que Guayas y Pichincha obtienen igual número de plantas de energía.... Nótese que los eventos E1,E3 no tienen elementos en común ; eventos como estos son denominados eventos mutuamente excluyentes.

2.- LA FUNCION PROBABILIDAD.-

DEFINICION.- Sean E1, E2 eventos de un espacio muestral S; B el conjunto de todos los subconjuntos de S. Se denomina FUNCION PROBABILIDAD a una función P, de B en R que cumple lo siguiente:

1.- $0 \leq P(E1) \leq 1$; para todo E1 elemento de B

2.- $P(S) = 1$

3.- La Probabilidad $P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2)$, si $E1 \cap E2 = \emptyset$

Nótese que P es una función (medida) de B al intervalo cerrado [0,1]; esto es:

$P: B \rightarrow [0,1]$, siendo $[0,1] = \{x \in R / 0 \leq x \leq 1\} \subset R$

El primer axioma de la función PROBABILIDAD establece que las probabilidades son números reales que varían entre 0 y 1. El segundo axioma que al espacio muestral completo se le asigna una probabilidad 1 y por eso se acostumbra a llamarlo EVENTO SEGURO, lo cual expresa la idea de un evento cierto, es decir, un evento que debe suceder con probabilidad 1. El tercer axioma establece que la función probabilidad es una función aditiva.

El tercer axioma con que se define la FUNCION PROBABILIDAD, $P: B \rightarrow [0,1]$, puede ser extendido a eventos mutuamente xcluyentes de tal forma que $P(\bigcup_{i=1}^{n} Ei) = \sum_{i=1}^{n} P(Ei)$.

or otro lado si E1 y E2 son dos eventos cualesquiera en un spacio muestral S, de donde E1 n E2 puede ser vacío, la robabilidad que ocurra E1 o E2 es:

$$(E1 \cup E2) = P(E1 - E2) + P(E1 \cap E2) + P(E2 - E1)$$

$$= P(E1 - E2) + P(E1 \cap E2) + P(E2 - E1) + P(E1 \cap E2) - P(E1 \cap E2)$$

$$= P(E1) + P(E2) - P(E1 \cap E2)$$

or otro lado, si $E1 = \emptyset$

$(E1) = P(\emptyset) = P(S^c) = 0$

es denominado tambien EVENTO IMPOSIBLE, sacar el número 0 al lanzar un dado por ejemplo; mientras que es EVENTO EGURO sacar cualquier número de 1 al 6 al lanzar un dado.

jemplo.- Si un experimento arroja tres resultados osibles que se excluyen mutuamente los cuales son A, B , , D; verifiquemos si en cada uno de los siguientes cinco asos la asignación de probabilidad está correctamente fectuada:

.- P(A) = 0,38; P(B) = 0,16 ; P(C) = 0,11; P(D) = 0,35

i está permitida la asignacion de probabilidad por que,

(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1; y $P(Ei) \geq 0$ y $P(Ei) \leq 1$

.- P(A) = 0,31; P(B) =0,27; P(C) = 0,28; P(D) = 0,47

La asignación de probabilidad no está permitida ya que la suma de todas ellas excede en 1.

3.- P(A) = 0,32; P(B) = 0,27; P(C) = -0,06; P(D) = 0,47

La asignación no está permitida por que el valor de P(C) = -0,06 es negativo.

4.-P(A) = 1/2; P(B) = 1/4; P(C) = 1/8; P(D) = 1/16

La asignación de probabilidad no está, permitida porque la suma P(A)+P(B)+P(C)+P(D)= 0,9; es menor que 1

.- P(A)= 5/18; P(B)= 1/14; P(C)= 1/8; P(D)= 25/72

i está permitida la asignacion de probabilidad porque la uma es 1. P(A)+P(B)+P(C)+P(D)= 1 y ademas $0 \le P(E_i) \le 1$

. VARIABLES ALEATORIAS.-

.1 DEFINICION.-Decimos que X es una VARIABLE ALEATORIA, si y solo sí, es una función que toma valores reales definidos obre un espacio muestral S.

X : S -> R

.2VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.- Una variable aleatoria se onsidera discreta si y solo sí, el número de valores que ueden tomar es finito contable. Ilustremos el concepto de ariable aleatoria:

ea un experimento que consiste en lanzar una moneda y uego un dado, observando que lado de la moneda y el dado alen; el espacio muestral tiene doce elementos que son:

={(s,1);(s,2);(s,3);(s,4);(s,5);(s,6);(c,1);(c,2);(c,3);
(c,4);(c,5);(c,6)}

onde c= cara; s= sello; en la moneda; y, 1,2,3,4,5,6 en el ado.

efinimos una variable X que toma al número que sale en el ado más 1 si sale sello en moneda, y más dos si sale cara n la moneda;

$X(s,1) = 2$	$X(c,1) = 3$
$X(s,2) = 3$	$X(c,2) = 4$
$X(s,3) = 4$	$X(c,3) = 5$
$X(s,4) = 5$	$X(c,4) = 6$
$X(s,5) = 6$	$X(c,5) = 7$
$X(s,6) = 7$	$X(c,6) = 8$

es una variable aleatoria discreta que toma 7 valores; ,3,4,5,6,7 y 8. Si se supone que cada uno de los doce lementos es equiprobables

$$P(X=x)=\begin{cases} 1/12, & X= 2 \text{ y } 8 \\ 2/12, & X= 3,4,5 \text{ y } 6 \end{cases}$$

así obtenemos la distribución de probabilidades de la ariable aleatoria X.

odemos hacer un histograma de probabilidades para esta variable aleatoria

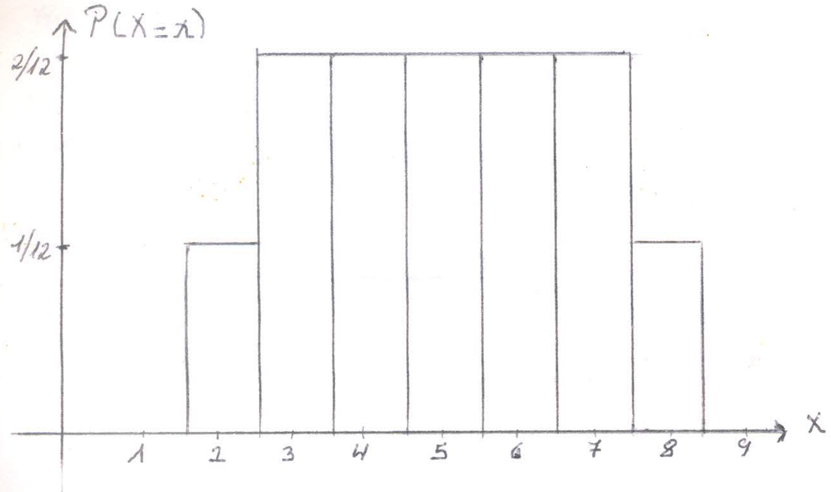


FIGURA 3.1 Histograma de probabilidades de X.

Si $F(x) = P(x \leq x)$

$F(0) = 0$

$F(1) = 0$

$F(2) = P(x=2) = 1/12$

$F(3) = P(x=2)+P(x=3)=3/12$

$F(4) = P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)=5/12$

$F(5) = P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)=7/12$

$F(6) = P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)+P(x=6)=9/12$

$F(7) = P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)+P(x=6)+P(x=7)=11/12$

$F(8) = P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)+P(x=6)+P(x=7)+P(x=8)=1$

$F(x) = 1$ si $x \geq 8$ y

$F(x) = 0$ si $x < 2$; como puede verse en siguiente gráfico

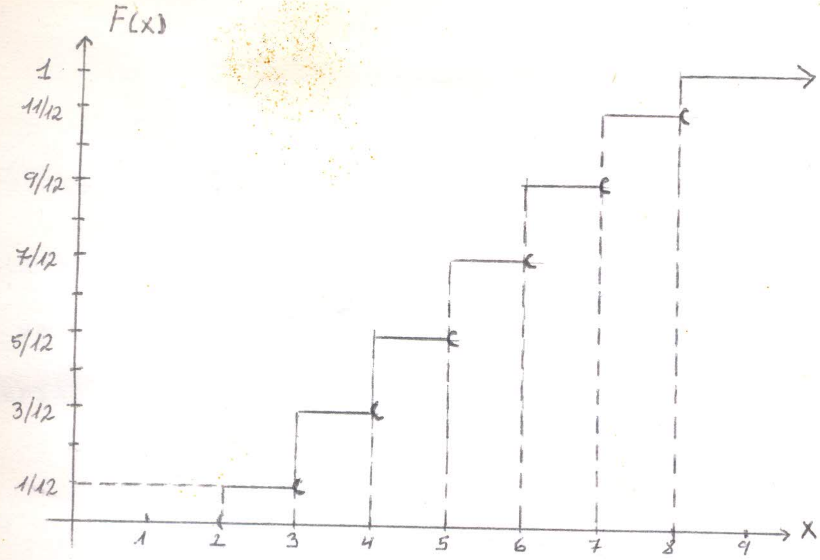


FIGURA 3.2 Distribución acumulada de X

3.3 VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.- Una variable aleatoria se considera continua, si y solo si. puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo de números reales o unión de ellos.

Una variable aleatoria continua tiene un infinito número de valores posibles.Por ejemplo el peso de cajas de banano, la altura de árboles de eucalipto, duración de conversación telefónica o el tiempo que se requiere para llevar a cabo un examen de Matemática.

3.4MEDIA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA.- Si X es una variable aleatoria continua, el valor esperado de una función g es: $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).f(x)\, dx$, donde f es la densidad de probabilidades de X; f debe cumplir:

$f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, y

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{b}^{a} f(x)\, dx .$$

Si $g(x)= x$. $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f(x)\, dx = \mu = E[x]$

Este valor se denomina esperanza matemática de X o media de la variable aleatoria X.

Si $g(x) = (x - \mu)^2$

$$E[g(x)] = E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{-\infty} (x-\mu)\, f(x)\, dx = r^2$$

r^2 se denomina varianza de la variable aleatoria. y

$\sqrt{r^2} = r$ LA DESVIACION TIPICA DE X.

4. DISTRIBUCION PROBABILISTICA NORMAL.-

4.1 DISTRIBUCION NORMAL.- Si la densidad de una variable aleatoria es:

$$f(x,\omega,r^2) = [\ 1/\sqrt{2\pi}\ ] \int_{-a}^{z} \exp\ [-(x-\omega)^2 / 2r^2]$$

decimos que la variable aleatoria es normal. con media ω y varianza r^2. $N\ (\omega, r^2)$.

Los valores de la distribución normal suelen obtenerse de tablas especiales que se encuentran en anexos de textos de Estadística. Esta tabla corresponde a la distribución normal estandar $\omega = 0$ y $r = 1$; y proporciona los valores de

$$F(z) = [1\ \sqrt{2\pi}\ ] \int_{-\infty}^{z} \exp(\ -t^2\ /2)\ dt$$

Si X es una variable aleatoria con media ω y varianza r^2, lo usual es representarlo como:

$$X \sim N(\omega,\ r^2)$$

Y en particular si $\omega = 0$ y $r^2 = 1$; X se le represente por Z, siendo ahora

$$Z \sim N\ (0,1)$$

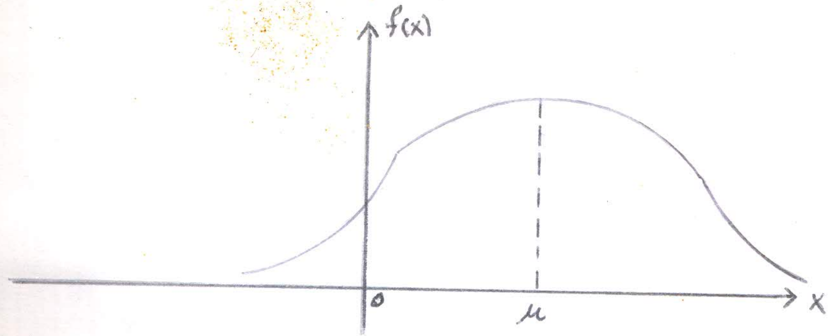
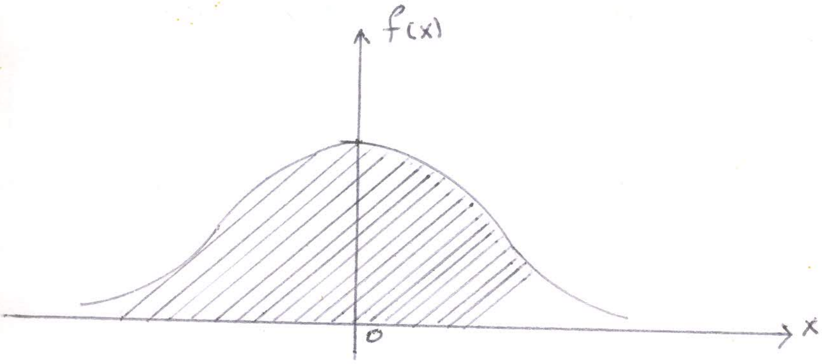


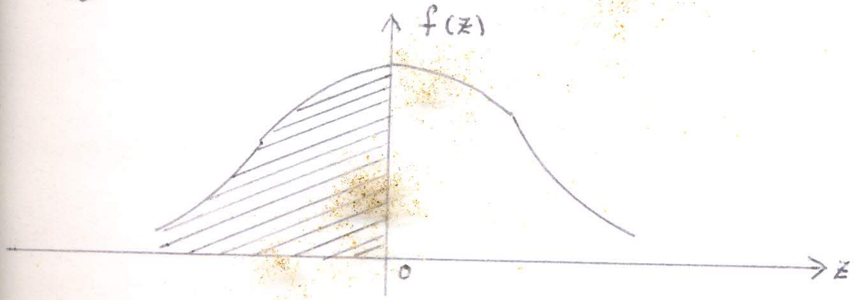
FIGURA 4.1 Normal con media u y varianza r^2



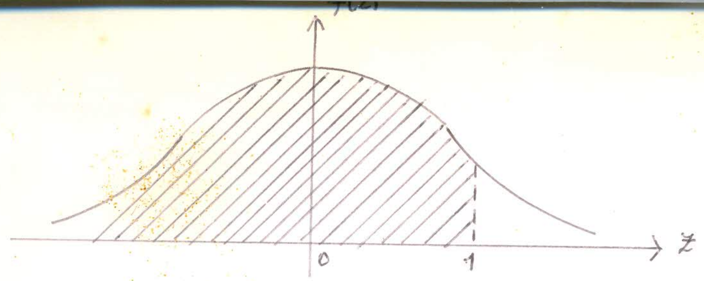
IGURA 4.2 Normal con media 0 y varianza 1

ara calcular la probabilidad de una variable aleatoria con istribución normal estandar, N(0,1), tome un valor entre a b empleamos la igualdad $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$; si a o b son egativos, utilizamos la identidad $F(-z)=1-F(z)$.

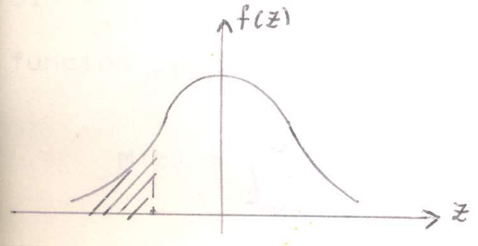
$(0)=\int_{-\infty}^{0} f(z)\,dz = 0{,}5$; lo cual gráficamente se ilustra así:

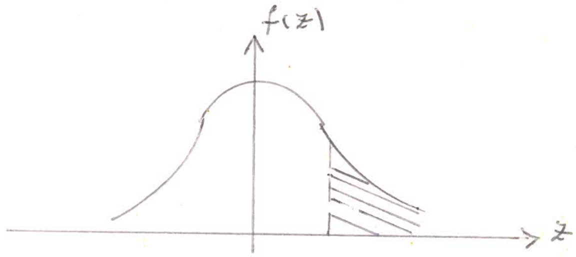


$(1)=\int_{-\infty}^{1} f(z)\,dz = 0{,}81$; lo cual gráficamente es:



$F(-1)=\int_{-\infty}^{-1} f(z) = 0,1587 = 1-f(1)$: esto es:





$Z\sim N(0,1)$ es tambien llamada aleatoria normal estandarizada

Si $Z \sim N(0,1)$, $F(0)$ es $P(z\leq 0)$, $F(1) = P(z\leq 1)$, y

$F(-1) = P(z\leq 1)$

Distintos casos se ilustran gráficamente en la figura 4.3

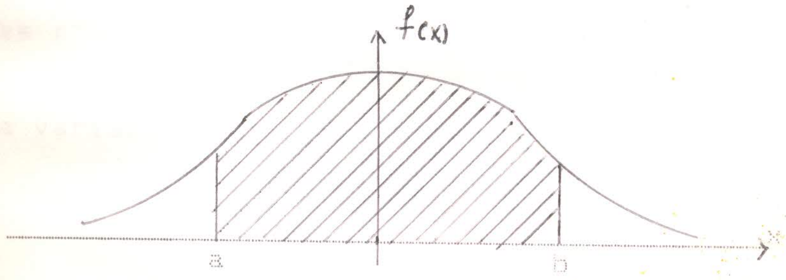


FIGURA 4.3.a

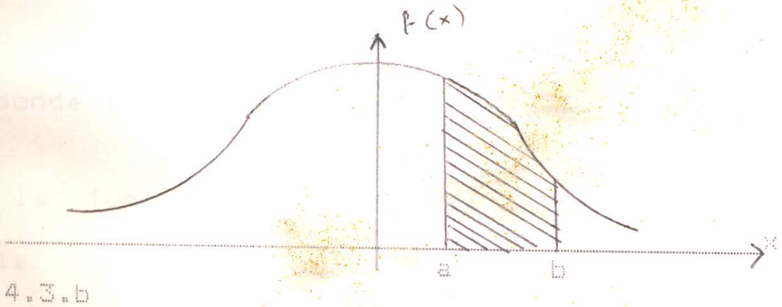


FIGURA 4.3.b

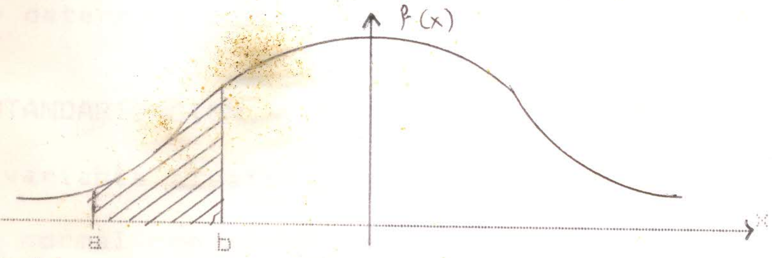


FIGURA 4.3.c

4.2 FUNCION GENERADORA DE MOMENTOS DE UNA VARIABLE NORMAL.-

Si X es una variable aleatoria continua, se define la función generadora de X como:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \cdot f(x) . dx$$

se puede probar que:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial t}\right|_{t=0} = u = E(x) = M'(0) =$$

$$\left.\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}\right|_{t=0} = E(x^2) = M''(0)$$

Y puesto que $r^2 = E(x-u)^2 = E(x^2) - u^2$,
entonces $r^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$

para la variable aleatoria normal $N(u, r^2)$

$M(t) = \exp[ut + (r^2 t^2/2)]$

la cual permite facilmente determinar u y r^2

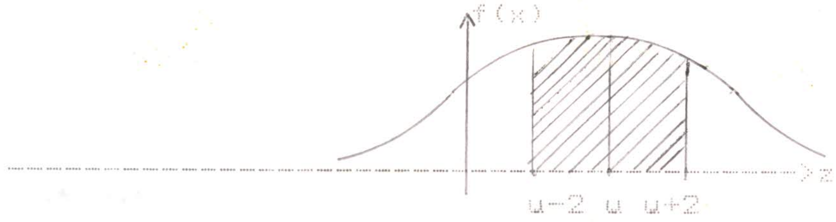
Ejemplo.- Si $M(t) = \exp(2t+32t^2)$, la variable aleatoria que corresponde esta función generadora de momentos es $N(2,64)$.

Nota: la función generadora de momentos (F.G.M) de una variable aleatoria, puede no existir pero si existe es única y determina completamen X.

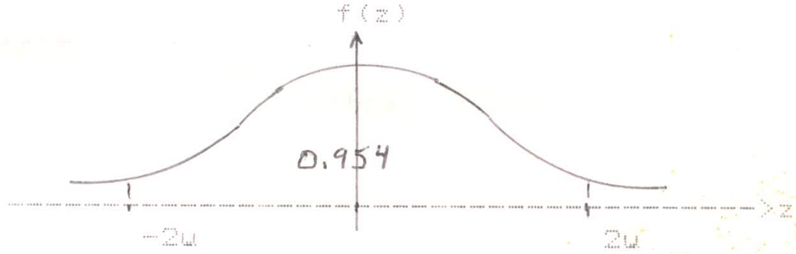
4.3 ESTANDARIZACION.- Un importante resultado es que si X es una variable aleatoria $N(u, r^2)$, entonces $Z = (x-u)/r$ es tambien normal con media $u=0$ y varianza $r^2=1$.

Esta prueba se la puede encontrar en cualquier texto de estadística matamática. Una ilustración de aquel resultado se da a continuación.

Si $X \sim N(u, r^2)$ encontrar $P(u-2r < x < u+2r)$



$$
\begin{aligned}
P(u-2 \leq x \leq u+2) &= P[(u-2r-u)/ \leq (x-u)/ \leq (u-2r-u)/r] \\
&= P(-2 \leq z \leq 2) = F(2) - F(-2) \\
&= 0{,}977 - (1-0.977) \\
&= 0.954
\end{aligned}
$$



Con este resultado podemos afirmar que si una variable aleatoria es normal con media u y varianza r^2, el 95.4% de los resultados posibles se encuentran en el intervalo $(u-2r, u+2r)$. Si por ejemplo las notas de un examen de matemática tomada a estudiantes de sexto año es normal con media 15 y varianza 4[$x \sim N(15.4)$] entonces el 95.4% de las notas se encontrarán entre 15-Z(2) y 15+Z(2); osea entre 11 y 19, pues u=15 r=2.

5.- **CONCLUSIONES.-** Desde el punto de vista teórico y práctico, es importante tener un manejo cabal de la **Variable Aleatoria normal**, pues muchos fenómenos aleatorios se explican através del modelo normal y en Estadística teórica muchas aproximaciones de variables discretas y continuas se realizan utilizando este mismo modelo, sin considerar las (aproximaciones asintóticas) como el caso del teorema Límite Central, entre otras.

La Variable Aleatoria Normal debe ser manejada con mayor o menor profundidad por quienes pretenden tener cultura de cuantificación estocástica; ayudar a tal difución ha sido el principal objetivo de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA.-

TEORIA MODERNA DE PROBABILIDADES de Emanuel Parzen

TEORIA ELEMENTAL DE LA PROBABILIDAD Y DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS de Kai Lai Chung

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PARA INGENIEROS de Irwing R. Miller - John E. Freud - Richard Johnson