ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL /-/

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2018 - 2019	**PERIODO:** PRIMER TÉRMINO
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES	**PROFESORES:** Jennifer Avilés, José Castro, C. Mario Celleri, Antonio Chong, David De Santis, Liliana Pérez, Eduardo Rivadeneira, Hernando Sánchez, Emilk Sempértegui.
EVALUACIÓN: PRIMERA	**FECHA:** 25 JUNIO 2018

CRITERIOS DE CALIFICACION

Tema 1 (10 Puntos)

Complete las siguientes frases, para lo cual NO es necesario justificar sus respuestas.

"A continuación se muestran respuestas y posibles ejemplos"

a) Si una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición $\exists N, M \in \mathbb{R}\ [N \leq a_n \leq M]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y satisface la condición $\{\ [a_n < a_{n+1}] \vee [a_n > a_{n+1}]\}$ desde algún $n = k$, tal que $k \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión es convergente.

b) La serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{P+1}}$ diverge si P pertenece al intervalo $(-1\ , 0]$. También es válido: $(-\infty\ , 0]$.

c) Si $\sum_{m=3}^{\infty} |(-1)^m c_m|$ donde $c_m > 0$ es divergente y $\sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m c_m$ es convergente, se dice que $\sum_{m=3}^{\infty} (-1)^{m+3} c_m$ es condicionalmente convergente.

d) El criterio de la raíz absoluta aplicada a una serie de la forma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ tal que $a_i > 0$ donde $i \in \mathbb{N}$ no es concluyente si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. También válido: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

e) Usando el símbolo de sumatoria, un ejemplo de una serie geométrica divergente con término inicial igual a 25 es $\sum_{n=0}^{\infty} 25(2)^n$.

f) Sea $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ una serie de términos positivos y negativos, si $\lim_{m\to\infty} \left|\frac{c_{m+1}}{c_m}\right| = \frac{3}{2}$, entonces se puede afirmar que la serie es divergente.

g) La ecuación diferencial ordinaria de Bernoulli $3y^2y' - ay^3 - (x+1)y = 0$ donde $a > 1$ se convierte en una ecuación lineal al realizar el cambio de variable $v = y^2$.

h) Una función $Q(x,y)$ para que la ecuación $(x+2y)dx + Q(x,y)dy = 0$ sea exacta es: $Q(x,y) = 2x + 1$.

i) Un ejemplo de una ecuación diferencial homogénea de primer orden, es decir, una ecuación de la forma $y' = f(y/x)$, que además no sea lineal es $y' = (y/x)^2$.

j) Las isóclinas para la ecuación $xy' = y + 1$ están dadas por la expresión $\frac{y+1}{x} = c\ , c \in \mathbb{R}$.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Completa correctamente cada literal sin necesidad de proporcionar justificación alguna.	1.0 P cada literal
TOTAL	**10.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)

Tema 2 (8 Puntos)

Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA, justificando correctamente sus respuestas.

Literal a (4 Puntos)

El criterio de convergencia de la integral es aplicable a la serie $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$, y a partir de dicho criterio se concluye que la serie es divergente.

Desarrollo:

Sea $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$, en el intervalo $[5, \infty)$:

I. $f(x) > 0 \equiv 1$, dado que: $x^2 > 0 \ \wedge \ e^x > 0$.

II. $f(x)$ es continua $\equiv 1$, dado que: la función del numerador y la del denominador son continuas y el $dom.f(x) = \mathbb{R}$.

III. $f(x)$ es decreciente $\equiv 1$, dado que:

$$f'(x) = (2xe^x - x^2e^x)/e^{2x} = (2x - x^2)/e^x$$

$$f'(x) < 0 \ \text{si} \ 2x - x^2 < 0$$

$$x(2-x) < 0$$

$f'(x)$: 0 2 $-$

$$\int x^2\, e^{-x} dx = ? \qquad u = x^2 \quad ; \quad dv = e^{-x}dx$$
$$du = 2xdx \quad ; \quad v = -e^{-x}$$
$$\int x^2\, e^{-x} dx = -x^2e^{-x} + 2\int e^{-x}xdx$$
$$u = x \quad ; \quad dv = e^{-x}dx$$
$$du = dx \quad ; \quad v = -e^{-x}$$
$$\int x^2\, e^{-x} dx = -x^2e^{-x} + 2\left(-e^{-x}x + \int e^{-x}dx\right)$$
$$\int x^2\, e^{-x} dx = -x^2e^{-x} - 2e^{-x}x - 2e^{-x} + c, c \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto el criterio de la integral es aplicable:

$$\int_5^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_5^b \frac{x^2}{e^x} dx = \lim_{b\to\infty} [-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}]_5^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left[\left(-b^2e^{-b} - 2be^{-b} - 2e^{-b}\right) - (-25e^{-5} - 10e^{-5} - 2e^{-5})\right]$$
$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{b^2}{e^b} - 2\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} - 2\underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b}}_{tiende\ a\ cero} + 37e^{-5}$$

Aplicando el teorema de L'hopital:

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{2b}{e^b} - 2\underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b}}_{tiende\ a\ cero} + 37e^{-5}$$

Aplicando el teorema de L'hopital:

$$= -\underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{2}{e^b}}_{tiende\ a\ cero} + 37e^{-5} = 37e^{-5}\,.$$

Entonces la integral es convergente y por lo tanto la serie también lo es. La proposición es FALSA.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	PUNTAJE
Muestra que el criterio de la integral es aplicable a la serie dada.	1.0 P
Aplica el criterio de la integral, concluyendo que la serie es convergente.	2.0 P
Concluye que la proposición es FALSA.	1.0 P
TOTAL	**4.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)

Literal b (4 Puntos)
Al reducir el orden la ecuación diferencial ordinaria $2y'' - csc^2(\beta x) = 0$, donde $\beta < 0$ se obtiene una ecuación diferencial de primer orden separable, y la respectiva familia 2-paramétrica de soluciones de la ecuación de segundo orden contiene los puntos de la forma $\left(\frac{\pi}{2\beta}\ ,\ \frac{\pi}{2\beta}c_1 + c_2\right)$ donde c_1 y c_2 son las constantes de integración.

Desarrollo:

$2y'' - csc^2(\beta x) = 0$
Cambios de variables:
$v = y'\ \ ;\ \ v' = y''$
Sustituyendo:
$2v' - csc^2(\beta x) = 0$
$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\ csc^2(\beta x)$: EDO separable
$$\int dv = \int \frac{1}{2} csc^2(\beta x) dx$$
$$v = -\frac{1}{2\beta} cot(\beta x) + c_1\ , c_1 \in \mathbb{R}$$

Regresando a las variables originales:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\beta} cot(\beta x) + c_1$$
$$\int dy = \int \left(-\frac{1}{2\beta} cot(\beta x) + c_1\right) dx$$
$$y = \frac{1}{2\beta^2}\ ln|csc(\beta x)| + c_1 x + c_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
Evaluando $\left(\frac{\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2\beta}c_1 + c_2\right)$:
$$\frac{\pi}{2\beta}c_1 + c_2 = \frac{1}{2\beta^2} ln\left|csc\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| + c_1\frac{\pi}{2\beta} + c_2$$
$$\frac{\pi}{2\beta}c_1 + c_2 = 0 + \frac{\pi}{2\beta}c_1 + c_2$$
Entonces la familia 2-paramétrica contiene a los puntos indicados.

Por lo que la proposición es VERDADERA.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Muestra que al reducir el orden de la ecuación dada se obtiene una ecuación de primer orden separable.	1.0 P
Muestra que la respectiva familia 2-paramétrica de soluciones de la ecuación de segundo orden contiene los puntos de la forma $\left(\frac{\pi}{2\beta}\ ,\ \frac{\pi}{2\beta}c_1 + c_2\right)$ donde c_1 y c_2 son las constantes de integración.	2.0 P
Concluye que la proposición es VERDADERA.	1.0 P
TOTAL	**4.0 P**

Tema 3 (8 Puntos)

A partir de la serie de potencias geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; |x| < 1$, calcule la serie de Maclaurin de la función $P(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$. Luego, halle el valor aproximado de $\int_0^b \frac{x}{(1+x)^2} dx$ utilizando los 3 primeros términos de la serie calculada para $P(x)$, si el intervalo de convergencia de $P(x)$ se considera de la forma $(-2b, 2b)$.

<u>Desarrollo:</u>

Sea $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Una forma de calcular la serie de Maclaurin que se pide es la siguiente:

Evaluando en "$-x$" se obtiene otra función:

$$g(x) = f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Derivando la función $g(x)$:

$$g'(x) = D_x\left(\frac{1}{1+x}\right) = D_x \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right)}_{1-x+x^2-\cdots}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, x^{n-1}$$

Multiplicando por "$-x$" se obtiene:

$$P(x) = -xg'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n}_{x-2x^2+3x^3-\cdots}$$

Para obtener el intervalo de convergencia de la serie calculada es válido usar el criterio del cociente absoluto como sigue, donde $a_n = (-1)^{n+1} n x^n$ suponiendo que x representa un número real diferente del centro de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)x^{n+1}}{(-1)^{n+1} n\, x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)x}{n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x|$$

Entonces, el intervalo de convergencia (IC) está dado por: $|x| < 1 \equiv -1 < x < 1$ tal que la convergencia de los extremos $x = -1$ y $x = 1$ aún no se ha verificado. Sin embargo, se puede afirmar que el radio de convergencia es $R = 1$. Dado que el enunciado indica que el IC se debe considerar de la forma $(-2b, 2b)$, entonces $2b = 1$ y así $b = \frac{1}{2}$.

Se procede a hallar el valor aproximado de $\int_0^b \frac{x}{(1+x)^2} dx$, utilizando los 3 primeros términos de la serie calculada para $P(x)$:

$$\int_0^b \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} P(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\, x^n\right] dx$$

Considerando $n = \{1,2,3\}$:

$$\int_0^b \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x - 2x^2 + 3x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{3}{64} = \frac{24-16+9}{192} = \frac{17}{192}$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Calcula la serie de Maclaurin de la función $P(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ a partir de la serie de potencias geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; \lvert x\rvert < 1$.	3.0 P
Obtiene el radio de convergencia de la serie de calculada para $P(x)$, identificando el valor de la constante b.	2.0 P
Halla el valor aproximado de $\int_0^b \frac{x}{(1+x)^2} dx$ utilizando los 3 primeros términos de la serie calculada para $P(x)$.	3.0 P
TOTAL	**8.0 P**

Tema 4 (8 Puntos)

Determine la solución del problema de valor inicial:

$$\left(\frac{\cos(x)\,sen(x)}{x}-y^2\right)dx+y\left(\frac{1}{x}-x\right)dy=0 \quad ; \quad y\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=0$$

<u>Desarrollo:</u>

<u>Una forma de resolución:</u>

Sean $M(x,y)=\frac{\cos(x)sen(x)}{x}-y^2 \quad ; \quad N(x,y)=y\left(\frac{1}{x}-x\right)$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-2y \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=y\left(-\frac{1}{x^2}-1\right)\rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\rightarrow$ la EDO no es exacta.

Se busca un factor integrante:

$$R(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{\int\frac{1}{y\left(\frac{1-x^2}{x}\right)}\left(-2y-y\left(\frac{-1-x^2}{x^2}\right)\right)dx}=e^{\int\frac{x}{y(1-x^2)}\left(\frac{y-yx^2}{x^2}\right)dx}=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln|x|}=|x|$$

Considerando $R(x)=x$ y multiplicándolo por la EDO:

$$(\cos(x)\,sen(x)-xy^2)dx+y(1-x^2)dy=0$$

Sean $M_1(x,y)=\cos(x)\,sen(x)-xy^2 \quad ; \quad N_1(x,y)=y(1-x^2)$

$\frac{\partial M_1}{\partial y}=-2xy \quad ; \quad \frac{\partial N_1}{\partial x}=-2xy \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial x}\rightarrow$ la EDO obtenida es exacta.

Solución: $u(x,y)=c, c\in\mathbb{R}$ tal que:

I. $\frac{\partial u}{\partial x}=M_1(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x)\,sen(x)-xy^2$$

$$u(x,y)=\int\left(\frac{1}{2}sen(2x)-xy^2\right)dx$$

$$u(x,y)=-\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{x^2}{2}y^2+h(y)$$

II. $\frac{\partial u}{\partial y}=N_1(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=y(1-x^2)$$

Sustituyendo lo obtenido en I.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+h(y)\right)=y(1-x^2)$$

$$-x^2y+h'(y)=y-yx^2$$

$$h(y)=\int y\,dy=\frac{y^2}{2}+k,\ k\in\mathbb{R}.$$

Sustituyendo $h(y)$ en I.:

(No es necesario considerar la constante k de $h(y)$ puesto que k se agruparía con la constante c de la solución planteada, dando como resultado la familia mono-paramétrica buscada).

$$u(x,y)=-\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

Así la solución de la EDO es:

$$-\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c, c\in\mathbb{R}$$

$$-\frac{\cos(2x)}{4}+\frac{(1-x^2)y^2}{2}=c, c\in\mathbb{R}$$

Sustituyendo la condición inicial $y\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=0$:

$$-\frac{\cos\left(2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}{4}+\left(1-\left(-\frac{5\pi}{6}\right)^2\right)\frac{0^2}{2}=c \quad\rightarrow\quad -\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{4}=c \quad\rightarrow\quad c=-\frac{1}{8}$$

Por lo tanto, la solución particular del problema de valor inicial está dada por:

$$-\frac{\cos(2x)}{4}+\frac{(1-x^2)y^2}{2}=-\frac{1}{8}$$

CRITERIO DE CALIFICACION (PARA ESTA FORMA DE RESOLUCION) EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Verifica que la EDO no es exacta y calcula un factor integrante.	2.0 P
Plantea la forma de la solución y las condiciones que debe satisfacer.	1.0 P
Integra una de las condiciones, sustituye la respuesta obtenida en la otra condición, obteniendo así la solución de la ecuación diferencial.	3.0 P
Evalúa la condición inicial para hallar el valor de la constante de integración, obteniendo así la solución del problema de valor inicial.	2.0 P
TOTAL	**8.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)

Otra forma de resolución:

$$\left(\frac{\cos(x)\,sen(x)-y^2}{x}\right)dx+y\left(\frac{1}{x}-x\right)dy=0 \quad ; \quad y\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-\frac{\cos(x)\,sen(x)}{x}}{y\left(\frac{1}{x}-x\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\frac{(1-x^2)}{x}}-\frac{\frac{\cos(x)\,sen(x)}{x}}{y\frac{(1-x^2)}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1-x^2}y-\frac{\cos(x)\,sen(x)}{(1-x^2)}y^{-1}$$

$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1-x^2}y=-\frac{\cos(x)sen(x)}{(1-x^2)}y^{-1}$: EDO de Bernoulli

Multiplicando por "y":

$$y\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1-x^2}y^2=-\frac{\cos(x)\,sen(x)}{(1-x^2)}$$

Cambio de variable: $v=y^2\rightarrow\frac{dv}{dx}=2y\frac{dy}{dx}\rightarrow\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}=y\frac{dy}{dx}$

Sustituyendo en la EDO:

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}-\frac{x}{1-x^2}v=-\frac{\cos(x)\,sen(x)}{(1-x^2)}$$

$\frac{dv}{dx}-\underbrace{\frac{2x}{1-x^2}}_{p(x)}v=-\frac{2\cos(x)sen(x)}{(1-x^2)}$: EDO lineal de forma canónica

Factor integrante: $u(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -\frac{2x}{1-x^2}dx}=e^{\ln|1-x^2|}=|1-x^2|$

Considerando $u(x)=1-x^2$ y multiplicándolo por la EDO:

$$(1-x^2)\frac{dv}{dx}-2xv=-sen(2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)v\right)=-sen(2x)$$

$$\int d\left((1-x^2)v\right)=\int -sen(2x)dx$$

$$(1-x^2)v=\frac{\cos(2x)}{2}+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Regresando a las variables originales

$$(1-x^2)y^2=\frac{\cos(2x)}{2}+c, c\in\mathbb{R}$$

$$-\frac{\cos(2x)}{4}+\frac{(1-x^2)y^2}{2}=c\,,c\in\mathbb{R}$$

Sustituyendo la condición inicial $y\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=0$:

$$-\frac{\cos\left(2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}{4}+\left(1-\left(-\frac{5\pi}{6}\right)^2\right)\frac{0^2}{2}=c \quad\rightarrow\quad -\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{4}=c \quad\rightarrow\quad c=-\frac{1}{8}$$

Por lo tanto, la solución particular del problema de valor inicial está dada por:

$$-\frac{\cos(2x)}{4}+\frac{(1-x^2)y^2}{2}=-\frac{1}{8}$$

CRITERIO DE CALIFICACION (PARA ESTA FORMA DE RESOLUCION) EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Muestra que la ecuación diferencial es de Bernoulli y aplica un cambio de variable para transformarla en lineal.	3.0 P
Resuelve la ecuación diferencial lineal obtenida.	2.0 P
Usa el cambio de variable antes planteado para regresar a las variables originales del problema.	1.0 P
Evalúa la condición inicial para hallar el valor de la constante de integración, obteniendo así la solución del problema de valor inicial.	2.0 P
TOTAL	**8.0 P**

Tema 5 (8 Puntos)

Para un circuito en serie Resistor-Capacitor alimentado por una fuente de voltaje descrita por $E(t) = 10sen(5t)[V]$, halle la función que describe la carga de capacitor a los t segundos, si el resistor es de 2 ohmios, el capacitor es de 0.1 faradios, y la carga inicial del capacitor es de 1 Coulomb.

Desarrollo:

De acuerdo a la ley de Kirchhoff: $E(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$, donde:

$E(t)$: voltaje entregado por la fuente a los t segundos $[V]$; R: resistencia $[\Omega]$

$i(t)$: intensidad de corriente a los t segundos $[A]$; C: capacitancia $[F]$

$q(t)$: carga del capacitor a los t segundos [Coulombs] ; $i(t) = \frac{dq}{dt}$

Entonces, sustituyendo los datos se tiene el problema de valor inicial:

$10sen(5t) = 2\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.1}$; $q(0) = 1$ [Coulombs]

Forma canónica de la EDO lineal obtenida: $\frac{dq}{dt} \underbrace{+5}_{p(t)} q = \underbrace{5sen(5t)}_{g(t)}$

Factor integrante: $R(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 5dt} = e^{5t}$

Multiplicando por $R(t)$:

$$e^{5t}\frac{dq}{dt} + 5e^{5t}q = 5e^{5t}sen(5t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{5t}q) = 5e^{5t}sen(5t)$$

$$\int d(e^{5t}q) = \int 5e^{5t}sen(5t)dt$$

$$e^{5t}q = 5\int e^{5t}\,sen(5t)dt$$

$$q(t) = 5e^{-5t}\int e^{5t}\,sen(5t)dt$$

$$\int e^{5t}\,sen(5t)dt = ?$$

$u = e^{5t}$; $dv = sen(5t)dt$

$du = 5e^{5t}dt$; $v = -\frac{\cos(5t)}{5}$

$$\int e^{5t}\,sen(5t)dt = -\frac{e^{5t}\cos(5t)}{5} + \int \frac{\cos(5t)}{5}5e^{5t}dt$$

$$\int e^{5t}\,sen(5t)dt = -\frac{e^{5t}\cos(5t)}{5} + \int e^{5t}\cos(5t)\,dt$$

$u = e^{5t}$; $dv = cos(5t)dt$

$du = 5e^{5t}dt$; $v = \frac{\mathrm{sen}(5t)}{5}$

$$\int e^{5t}\,sen(5t)dt = -\frac{e^{5t}\cos(5t)}{5} + \frac{e^{5t}}{5}sen(5t) - \int \frac{sen(5t)}{5}5e^{5t}dt$$

$$\int e^{5t}\,sen(5t)dt = -\frac{e^{5t}\cos(5t)}{5} + \frac{e^{5t}}{5}sen(5t) - \int e^{5t}sen(5t)dt$$

$$\int e^{5t}\,sen(5t)dt = -\frac{e^{5t}\cos(5t)}{10} + \frac{e^{5t}sen(5t)}{10} + c, c \in \mathbb{R}$$

Entonces,

$$q(t) = 5e^{-5t}\left[\frac{e^{5t}\,\mathrm{sen}(5t)}{10} - \frac{e^{5t}cos(5t)}{10} + c\right],\ \ c \in \mathbb{R}$$

$q(t) = \frac{1}{2}sen(5t) - \frac{1}{2}cos(5t) + 5ce^{-5t}$ [Coulombs]

Sustituyendo la condición inicial $q(0) = 1$:

$$-\frac{1}{2}\overbrace{\cos(0)}^{1} + \frac{1}{2}\overbrace{sen(0)}^{0} + 5ce^{0} = 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2} + 5c = 1 \quad \rightarrow \quad c = \frac{3}{10}$$

$q(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(5t) - \frac{1}{2}cos(5t) + \frac{3}{2}e^{-5t}$ [Coulombs]

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	PUNTAJE
Usando la ley de Kirchhoff, plantea el problema de valor inicial que describe la carga del capacitor.	2.0 P
Resuelve la ecuación diferencial asociada al problema de valor inicial planteado.	4.0 P
Evalúa la condición inicial para hallar el valor de la constante de integración, obteniendo así la solución del problema de valor inicial.	2.0 P
TOTAL	**8.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia (achong@espol.edu.ec)

Tema 6 (8 Puntos)

Obtenga la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = \frac{50}{x} \quad ; \quad x \in (0, +\infty)$$

Desarrollo:

Se halla la solución complementaria, $y_c(x)$, resolviendo la EDO homogénea correspondiente:

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 0$$

Esta ecuación es una EDO de Cauchy-Euler, la cual se transforma en una EDO de coeficientes constantes al realizar el cambio de variable: $x = e^t$. Así, $t = \ln(x) \rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$.

Además, se deduce las expresiones que van a sustituir a $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dt}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\frac{dt}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)}{dt}e^{-t} = \left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Sustituyendo las expresiones para x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en la EDO se obtiene:

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2e^te^{-t}\frac{dy}{dt} - 6y = 0 \rightarrow \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Se plantea la solución $y(t) = e^{rt}$ donde r es una constante que debe ser hallada. Además, $\frac{dy}{dt} = re^{rt}$ y $\frac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$.

Sustituyendo la solución planteada y sus derivadas en la ecuación se obtiene:

$$r^2e^{rt} + re^{rt} - 6e^{rt} = 0 \rightarrow e^{rt}(r^2 + r - 6) = 0 \rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \rightarrow r_1 = -3 \text{ y } r_2 = 2.$$

Así, para el caso de soluciones reales diferentes para r se puede verificar que las dos soluciones obtenidas son linealmente independientes, es decir, las soluciones: $y_1(t) = e^{-3t}$ y $y_2(t) = e^{2t}$.

La solución general está dada por la combinación lineal: $y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_c(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Expresando esta solución en términos de x se obtiene: $y_c(x) = c_1x^{-3} + c_2x^2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se halla una solución particular, $y_p(x)$, para la EDO no homogénea:

Primera forma para hallar $y_p(x)$ en este ejercicio:

EDO no homogénea: $x^2y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = \frac{50}{x}$

Usando el cambio de variable $x = e^t$, la EDO obtenida es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 50e^{-t}$$

Las soluciones linealmente independientes de la solución complementaria para la EDO homogénea correspondiente $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0$, halladas arriba, son:

$$y_1(t) = e^{-3t}\ ;\ y_2(t) = e^{2t}$$

Entonces la solución particular, usando el método de los coeficientes indeterminados, se la plantea de la forma: $y_p(t) = Ae^{-t}t^S$.

Si $S = 0$: $y_p(t) = Ae^{-t}$ es linealmente independiente tanto a $y_1 = e^{-3t}$ como a $y_2 = e^{2t}$, entonces se utiliza $S = 0$.

Derivando la solución particular planteada: $y'_p(t) = -Ae^{-t} \quad \rightarrow \quad y''_p(t) = Ae^{-t}$.

Sustituyendo en la EDO no hogénea $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 50e^{-t}$:

$$Ae^{-t} - Ae^{-t} - 6Ae^{-t} = 50e^{-t} \quad \rightarrow \quad -6Ae^{-t} = 50e^{-t} \quad \rightarrow \quad A = -\frac{25}{3}.$$

Por lo tanto la solución particular es: $y_p(t) = -\frac{25}{3}e^{-t}$

Escribiendo la solución en términos de la variable original: $y_p(x) = -\frac{25}{3}x^{-1}$.

Finalmente la solución general está dada por: $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$$y(x) = c_1x^{-3} + c_2x^2 - \frac{25}{3}x^{-1}\ ,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Segunda forma para hallar $y_p(x)$ en este ejercicio:
EDO no homogénea de forma canónica:
$y''(x)+\frac{2}{x}y'(x)-\frac{6}{x^2}y(x)=50x^{-3}$, de donde se define la función $g(x)=50x^{-3}$.
La solución particular, usando el método de variación de parámetros, se plantea de la forma:
$y_p(x)=v_1y_1(x)+v_2y_2(x)$, donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son las soluciones de la EDO homogénea correspondiente, es decir, $y_p(x)=v_1x^{-3}+v_2x^2$, y tal que se satisfaga el sistema de ecuaciones:
$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$, esto es: $\begin{bmatrix} x^{-3} & x^2 \\ -3x^{-4} & 2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 50x^{-3} \end{bmatrix}$.
El Wronskiano, $W(y_1,y_2)$, está dado por $\begin{vmatrix} x^{-3} & x^2 \\ -3x^{-4} & 2x \end{vmatrix}=2x^{-2}+3x^{-2}=5x^{-2}$.
Las soluciones del sistema son:

$$v_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 50x^{-3} & 2x \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)}=-\frac{50x^{-1}}{5x^{-2}}=-10x \quad \rightarrow \quad v_1=\int -10x dx=-5x^2$$

$$v_2'=\frac{\begin{vmatrix} x^{-3} & 0 \\ -3x^{-4} & 50x^{-3} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)}=\frac{50x^{-6}}{5x^{-2}}=10x^{-4} \quad \rightarrow \quad v_2=\int 10x^{-4}\,dx=-10\frac{x^{-3}}{3}$$

Con los resultados obtenidos:

$$y_p(x)=(-5x^2)x^{-3}+\left(-10\frac{x^{-3}}{3}\right)x^2=-5x^{-1}-\frac{10}{3}x^{-1}=-\frac{25}{3}x^{-1}.$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Halla la solución complementaria, resolviendo la ecuación homogénea correspondiente. Para esto, transforma la ecuación de Cauchy-Euler analizada en una ecuación de coeficientes constantes usando alguna sustitución válida (debe mostrar los pasos para la transformación).	3.0 P
Halla una solución particular para la ecuación no homogénea, mostrando la forma de la solución a encontrar y las condiciones que ésta debe satisfacer.	4.0 P
Obtiene la solución general de la ecuación diferencial ordinaria dada, superponiendo la solución complementaria y una solución particular de la misma.	1.0 P
TOTAL	**8.0 P**