ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2018 - 2019	**PERIODO:** PRIMER TÉRMINO
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES	**PROFESORES:** Jennifer Avilés, José Castro, C. Mario Celleri, Antonio Chong, David De Santis, Liliana Pérez, Eduardo Rivadeneira, Hernando Sánchez, Emilk Sempértegui.
EVALUACIÓN: TERCERA	**FECHA:** 10 SEPTIEMBRE 2018

Tema 1 (20 Puntos: 2 Puntos cada literal)
Complete las siguientes frases, para lo cual NO es necesario justificar las respuestas.

a) $f(x) = x^m$ es solución de la ecuación $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$ si el valor de m es igual a 2.

b) La ecuación diferencial $(-x+2y-1)dy + (-3x+2y+2)dx = 0$ se transforma en una ecuación de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ al realizar los cambios de variable $x = u + h$ y $y = v + k$ donde las constantes h y k deben ser iguales a $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$ respectivamente.

c) Un ejemplo de una ecuación diferencial de orden 3 que sea de grado 4 es $(y'''(x))^4 + y'(x) = 0$.

d) La solución particular de $y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = e^{-x}sen(x)$ usando el método de los coeficientes indeterminados se plantea de la forma $e^{-x}(Asen(x) + Bcos(x))$.

e) Un ejemplo de una ecuación de Cauchy-Euler de orden 4 es $x^4y^{(4)}(x) + x^3y^{(3)}(x) + y(x) = 0$.

f) Un ejemplo de una serie divergente de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ donde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

g) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie divergente y $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 2$, entonces de acuerdo al criterio de comparación en el límite se puede afirmar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

h) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}(x-2)^{n+1}}{b_n(x-2)^n}\right| = \infty$, el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-2)^n$ es $\{2\}$.

i) Si una serie de potencias en términos de la variable x es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces su radio de convergencia es infinito.

j) Si $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la función $f(t)$, y $y(0) = k;\ k \in \mathbb{R}$, entonces una expresión para la transformada de Laplace de $g(t) = t^2 f'(t)$ es $2Y'(s) + sY''(s)$.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Completa correctamente cada literal sin necesidad de proporcionar justificación alguna.	2.0 P cada literal
TOTAL	**20.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia.

Tema 2 (15 Puntos)

A un paciente se le aplica cierto medicamento cuya concentración en el flujo sanguíneo con respecto al tiempo cambia con una rapidez dada por $R(X) = A - BX$, tal que A, B son constantes positivas y $X(t)$ es dicha concentración a los t minutos. Si el paciente nunca antes ha recibido este medicamento, determine el valor límite de su concentración cuando t crece indefinidamente ($t \to \infty$). Además, determine el intervalo de tiempo en el que el paciente debe recibir un segundo medicamento si éste se debe aplicar cuando la concentración del primer medicamento esté entre el 50% y 60% de su valor límite para que el paciente sobreviva.

Desarrollo:

Sea $X(t)$: concentración del primer medicamento en el flujo sanguíneo del paciente a los t minutos.

Modelo matemático descrito es: $\frac{dX}{dt} = A - BX$

Dado que el paciente nunca antes ha recibido este medicamento la condición inicial es: $X(0) = 0$.

Entonces $\frac{dX}{A-BX} = dt \ \rightarrow \ \int \frac{dX}{A-BX} = \int dt \ \rightarrow \ -\frac{1}{B} ln(A - BX) = t + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$.

Despejando $X(t)$ se obtiene:

$ln(A - BX) = -Bt - Bc \ ; \ c \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ A - BX = e^{-Bt}e^{-Bc} \ ; \ c \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ X = \frac{A}{B} - e^{-Bt} \underbrace{\frac{e^{-Bc}}{B}}_{k} \ ; \ k \in \mathbb{R}^+$

Así, $X(t) = \frac{A}{B} - ke^{-Bt} \ ; \ k \in \mathbb{R}^+$

Sustituyendo la condición inicial $X(0) = 0$: $X(0) = \frac{A}{B} - k = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{A}{B} \ \rightarrow X(t) = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$

El valor límite de la concentración del primer medicamento cuando t crece indefinidamente está dado por:

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})\right] = \frac{A}{B}$$

Para determinar el tiempo en alcanzar el 50% del valor límite de la concentración:

$0.5\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) \ \rightarrow \ 0.5 = 1 - e^{-Bt} \ \rightarrow \ e^{-Bt} = 0.5 \ \rightarrow \ t = -\frac{1}{B} ln(0.5) \ \rightarrow \ t = \frac{1}{B} ln(2)$

Para determinar el tiempo en alcanzar el 60% del valor límite de la concentración:

$0.6\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) \ \rightarrow \ 0.6 = 1 - e^{-Bt} \ \rightarrow \ e^{-Bt} = 0.4 \ \rightarrow \ t = -\frac{1}{B} ln(0.4) \ \rightarrow \ t = \frac{1}{B} ln\left(\frac{5}{2}\right)$

Por lo tanto, para que el paciente sobreviva, el segundo medicamento debe ser suministrado entre los $\frac{1}{B} ln(2)$ minutos y los $\frac{1}{B} ln\left(\frac{5}{2}\right)$ minutos de haber sido aplicado el primer medicamento.

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Plantea el problema de valor inicial que describe la concentración del primer medicamento.	4.0 P
Resuelve la ecuación diferencial asociada al problema de valor inicial planteado.	4.0 P
Evalúa la condición inicial para hallar el valor de la constante de integración, obteniendo así la solución del problema de valor inicial.	2.0 P
Halla el valor límite de la concentración del primer medicamento cuando t crece indefinidamente.	2.0 P
Determina el intervalo de tiempo en el que el paciente debe recibir un segundo medicamento.	3.0 P
TOTAL	**15.0 P**

Tema 3 (15 Puntos)

En algunas aplicaciones de ingeniería las ecuaciones de segundo orden de coeficientes constantes son muy comunes. Considerando las funciones $f(x) = \cot(x)$ y $g(x) = x^2$, obtenga la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''(x) + y(x) = f(x)$

b) $y''(x) + y(x) = g(x)$

c) $y''(x) + y(x) = f(x) + g(x)$

Desarrollo:

Se halla la solución complementaria, $y_c(x)$, de las 3 ecuaciones diferenciales, resolviendo la ecuación homogénea correspondiente, esto es, $y''(x) + y(x) = 0$:

Se plantea la solución: $y(x) = e^{rx}$ donde r es una constante que debe ser hallada.

Así, $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$.

Sustituyendo en la ecuación se obtiene: $r^2e^{rx} + e^{rx} = 0 \;\rightarrow\; r^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; r = \pm i$

Entonces: $y_c(x) = c_1 sen\,(x) + c_2 \cos(x)$; c_1 , $c_2 \in \mathbb{R}$.

Se halla la solución particular de la ecuación del literal a, usando el método de variación de parámetros:

La solución se plantea de la forma: $y_{p1}(x) = v_1y_1(x) + v_2y_2(x)$, donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, es decir:

$y_{p1}(x) = v_1(x)\,sen(x) + v_2(x)\,cos(x)$, tal que se satisfaga el sistema de ecuaciones:

$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$, esto es: $\begin{bmatrix} sen\,(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sen(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ cot(x) \end{bmatrix}$.

El Wronskiano, $W(y_1, y_2)$, está dado por $\begin{vmatrix} sen\,(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix} = -1$

Las soluciones del sistema son:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & cos(x) \\ cot(x) & -sen(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{-cos(x)\cot(x)}{-1} = \frac{\cos^2(x)}{sen\,(x)}$$

$$\rightarrow\; v_1 = \int \frac{\cos^2(x)}{sen\,(x)}dx = \int(\csc(x) - sen(x))dx = \ln|csc(x) - cot(x)| + \cos(x) + k_1 \,;\; k_1 \in \mathbb{R}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} sen\,(x) & 0 \\ cos(x) & cot(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{sen(x)\cot(x)}{-1} = -cos(x) \;\;\rightarrow\;\; v_2 = \int -cos(x)dx = -sen(x) + k_2 \,;\; k_2 \in \mathbb{R}$$

Con los resultados obtenidos:

$$y_{p1}(x) = (\ln|csc(x) - cot(x)| + \cos(x))sen\,(x) + (-sen(x))\cos(x)$$

$$y_{p1}(x) = (\ln|csc(x) - cot(x)|)sen\,(x)$$

La solución general de la ecuación del literal a es:

$$y(x) = c_1 sen\,(x) + c_2\cos(x) + (\ln|csc(x) - cot(x)|)sen\,(x) \,;\; c_1 \,;\; c_2 \in \mathbb{R}$$

Para hallar la solución particular de la ecuación del literal b, el método de los coeficientes indeterminados es más adecuado. Entonces:

$$y_{p2}(x) = Ax^2 + Bx + C \;\;\rightarrow\;\; y'_{p2}(x) = 2Ax + B \;\;\rightarrow\;\; y''_{p2}(x) = 2A$$

Remplazando en la ecuación original: $2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 \;\rightarrow\; A = 1\,; B = 0\,; C = -2$.

Con los resultados obtenidos: $y_{p2}(x) = x^2 - 2$

La solución general de la ecuación del literal b es:

$$y(x) = c_1 sen\,(x) + c_2\cos(x) + x^2 - 2 \;;\; c_1 \,;\; c_2 \in \mathbb{R}$$

Se halla la solución de la ecuación del literal c, usando el principio de superposición de las ecuaciones lineales, esto es, $y_{p3}(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$.

Entonces la solución general del literal c es:

$$y(x) = c_1 sen\,(x) + c_2\cos(x) + (\ln|csc(x) - cot(x)|)sen\,(x) + x^2 - 2 \;;\; c_1 \,;\; c_2 \in \mathbb{R}$$

CRITERIO DE CALIFICACION EL ESTUDIANTE:	**PUNTAJE**
Halla la solución complementaria de las 3 ecuaciones diferenciales, resolviendo la ecuación homogénea correspondiente.	5.0 P
Halla la solución particular y general de la ecuación del literal a.	5.0 P
Halla la solución particular y general de la ecuación del literal b.	3.0 P
Halla la solución particular y general de la ecuación del literal c.	2.0 P
TOTAL	**15.0 P**

Tema 4 (15 Puntos)
Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + 2y = 0$, tal que $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$ por medio de series de potencia alrededor de $x_0 = 0$. Esta ecuación describe un sistema de masa-resorte sin amortiguación y sin fuerzas externas que intervengan en el movimiento.

Desarrollo:
Sean $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ y $R(x) = 2$, entonces $P(x_0) \neq 0$. Por lo tanto, $x_0 = 0$ es un punto ordinario para la ecuación que se pide resolver.
Entonces, se plantea una solución de la forma: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, es decir, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con lo cual: $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ y $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Reemplazando estas series en la ecuación: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$.
Se realiza el siguiente cambio de variable a la primera serie para que el exponente de x sea el mismo en ambas series: $n - 2 = m \rightarrow n = m + 2$. Por lo tanto, la primera serie queda de la forma:
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^m.$$
Aplicando a este resultado el cambio de variable $m = n$: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$
Entonces, la ecuación queda de la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$

Agrupando términos semejantes, se obtiene: $\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2a_n] x^n = 0$
Así, la expresión de recurrencia está dada por:
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2a_n = 0,\ n \geq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}$$
$$a_{n+2} = \frac{-2a_n}{(n+2)(n+1)}, n \geq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}$$
Generando algunos coeficientes iniciales se obtiene:
$a_0,\ a_1 \in \mathbb{R}$
$n = 0$: $a_2 = \frac{-2a_0}{2} = \frac{-2a_0}{2!}$ $\qquad$ $n = 1$: $a_3 = \frac{-2a_1}{3.2} = \frac{-2a_1}{3!}$
$n = 2$: $a_4 = \frac{-2a_2}{4.3} = \frac{2^2 a_0}{4.3.2!} = \frac{2^2 a_0}{4!}$ $\qquad$ $n = 3$: $a_5 = \frac{-2a_3}{5.4} = \frac{2^2 a_1}{5.4.3!} = \frac{2^2 a_1}{5!}$
$n = 4$: $a_6 = \frac{-2a_4}{6.5} = \frac{-2^3 a_0}{6.5.4!} = \frac{-2^3 a_0}{6!}$ $\qquad$ $n = 5$: $a_7 = \frac{-2a_5}{7.6} = \frac{-2^3 a_1}{7.6.5!} = \frac{-2^3 a_1}{7!}$
Entonces para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $a_{2k} = \frac{(-2)^k a_0}{(2k)!}$; $a_{2k+1} = \frac{(-2)^k a_1}{(2k+1)!}$
Por lo tanto, la solución general está dada por:
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k a_0}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k a_1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2})^{2k} \sqrt{2}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$
$$y(x) = \underbrace{a_0}_{c_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2}x)^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{c_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2}x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}\, x) + c_2\, sen(\sqrt{2}\, x);\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$
Derivando la solución se tiene:
$$y'(x) = -c_1\sqrt{2}\, sen(\sqrt{2}\, x) + c_2\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\, x)$$
Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$:
$$y(0) = c_1 \cos(0) + c_2\, sen(0) = 5 \ \rightarrow\ c_1 = 5$$
$$y'(0) = -c_1\sqrt{2}\, sen(0) + c_2\sqrt{2} \cos(0) = 0 \ \rightarrow\ c_2 = 0$$
Por lo tanto, la solución la solución del problema de valor inicial es:
$$y(x) = 5 \cos(\sqrt{2}\, x)$$

CRITERIO DE CALIFICACION El estudiante:	**PUNTAJE**
Identifica a $x_0 = 0$ como punto ordinario, plantea la forma de la solución usando una serie de potencia y obtiene sus 2 primeras derivadas.	3.0 P
Sustituye la solución planteada y sus derivadas en la ecuación diferencial, y obtiene la expresión de recurrencia para los coeficientes de dicha solución.	4.0 P
Genera una cantidad adecuada de coeficientes iniciales a fin de determinar el patrón que siguen.	3.0 P
Halla la solución general de la ecuación diferencial, identificando las funciones a las que las series convergen.	3.0 P
Obtiene la solución del problema de valor inicial, usando las condiciones iniciales dadas.	2.0 P
TOTAL	**15.0 P**

Elaborado por: Antonio Chong Escobar, Ph.D., coordinador de la materia.

Tema 5 (15 Puntos)

Halle la solución general del sistema $\begin{cases} x'_1 - x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x'_2 + 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x'_3 - 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ haciendo uso del método de valores y vectores propios.

Desarrollo:

De forma matricial, el sistema de ecuaciones está dado por: $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

Se plantea la solución vectorial $x(t) = \varepsilon e^{rt}$ tal que r es un valor propio de A y ε un vector propio asociado.

Se halla los valores propios, r, de la matriz de coeficientes, A, con la ecuación $det(A - rI) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-r & -2 & 2 \\ -2 & 1-r & 2 \\ 2 & 2 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \to (1-r)[(1-r)^2 - 4] + 2[-2(1-r) - 4] + 2[-4 - 2(1-r)] = 0$$

$$\to \ (1-r)[-3 - 2r + r^2] + (-12 + 4r) + (-12 + 4r) = 0 \quad \to \quad [3r^2 - r^3 - 3 + r] + (-24 + 8r) = 0$$

$$\to -r^3 + 3r^2 + 9r - 27 = 0 \to -r^2(r-3) + 9(r-3) = 0 \to (r-3)(9 - r^2) = 0 \ \to \ -(r-3)^2(r+3) = 0$$

Así, los valores de r son: $r_1 = 3$ con multiplicidad $m = 2$ y $r_2 = -3$ con multiplicidad $m = 1$.

Se halla el espacio característico y el vector propio asociado a cada valor propio, resolviendo el sistema $(A - rI)\beta_r = \bar{0}$, donde el espacio característico β_r lo definimos de la forma $\beta_r = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

Para $r_1 = 3$: se resuelve el sistema $(A - r_1 I)\beta_{r_1} = \bar{0}$, esto es, $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Sustituyendo la fila 2 por: <u>“fila 1 - fila 2”</u> y la fila 3 por: <u>fila 1 + fila 3</u>: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Considerando b y c como variables libres, esto es, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene: $-2a - 2b + 2c = 0 \to a = -b + c$

Así, $\beta_{r_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -b + c \\ b \\ c \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$, con lo cual los vectores propios linealmente independientes asociados a r_1 son: $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $r_2 = -3$: se resuelve el sistema $(A - r_2 I)\beta_{r_2} = \bar{0}$, esto es, $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$.

Sustituyendo la fila 2 por: <u>“fila 1 + 2 veces fila 2”</u> y la fila 3 por: <u>fila 1 – 2 veces fila 3</u>: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right)$

De acuerdo a las filas 2 y 3: $6b + 6c = 0 \ \to \ b = -c$.

De acuerdo a la fila 1: $4a - 2b + 2c = 0 \to a = (2b - 2c)/4 \ \to \ a = -c$.

Entonces, se considera c como variable libre, esto es, $c \in \mathbb{R}$.

Así, $\beta_{r_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$, con lo cual un vector propio asociado a r_2 es: $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solución vectorial del sistema está dada por:

$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \varepsilon_1 e^{r_1 t} + c_2 \varepsilon_2 e^{r_1 t} + c_3 \varepsilon_3 e^{r_2 t}; \ \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Las componentes de la solución del sistema son:

$x_1(t) = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-3t}$

$x_2(t) = c_1 e^{3t} - c_3 e^{-3t}$

$x_3(t) = c_2 e^{3t} + c_3 e^{-3t}$, tal que $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

CRITERIO DE CALIFICACION El estudiante:	**PUNTAJE**
Indica la forma de la solución vectorial que se busca y obtiene los valores propios de la matriz de coeficientes.	4.0 P
Determina los vectores propios asociados a cada valor propio.	6.0 P
Obtiene la solución vectorial del sistema.	3.0 P
Obtiene las componentes de la solución del sistema, esto es, $x_1(t)$, $x_2(t)$, y $x_3(t)$.	2.0 P
TOTAL	**15.0 P**

Tema 6 (20 Puntos)
Determine la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=\delta(t)\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\mu(t-\pi)\quad ;\quad y(0)=0\quad ;\quad y'(0)=1$$

Desarrollo:
Aplicando la transformada de Laplace:

$$L(y''(t))+2L(y'(t))+L(y(t))=L\left(\delta(t)\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\right)+L(\mu(t-\pi))$$

- $L[y''(t)]=S^2Y(S)-Sy(0)-y'(0)=S^2Y(S)-1$
- $L[y'(t)]=SY(S)-y(0)=SY(S)\quad ;\quad L[y(t)]=Y(S)$
- $L\left[\delta(t)\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\right]=L\left[\delta(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=L\left[\frac{1}{2}\delta(t)\right]=\frac{1}{2}\quad ;\quad L[\mu(t-\pi)]=\frac{e^{-\pi S}}{S}$

Sustituyendo las transformadas se tiene:

$$S^2Y(S)-1+2SY(S)+Y(S)=\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi S}}{S}$$
$$Y(S)(S^2+2S+1)=\frac{3}{2}+\frac{e^{-\pi S}}{S}$$
$$Y(S)=\frac{3}{2(S^2+2S+1)}+\frac{e^{-\pi S}}{S(S^2+2S+1)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{3}{2(S^2+2S+1)}+\frac{e^{-\pi S}}{S(S^2+2S+1)}\right]$$
$$y(t)=\frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{e^{-\pi S}}{S(S+1)^2}\right]$$

Una manera de proceder es realizando la siguiente descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{1}{S(S+1)^2}=\frac{A}{S}+\frac{B}{S+1}+\frac{C}{(S+1)^2}\ \rightarrow\ \frac{1}{S(S+1)^2}=\frac{A(S+1)^2+BS(S+1)+CS}{S(S+1)^2}\ \rightarrow\ 1=(A+B)S^2+(2A+B+C)S+A$$

$$0=A+B\ ;\ 0=2A+B+C\ ;\ 1=A\ \rightarrow\ B=-1\ ;\ C=-1\ \rightarrow\ \frac{1}{S(S+1)^2}=\frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}-\frac{1}{(S+1)^2}$$

Entonces, se tiene que:

$$y(t)=\frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)^2}\right]+L^{-1}\left[e^{-\pi S}\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{S+1}-\frac{1}{(S+1)^2}\right)\right]$$
$$y(t)=\frac{3}{2}te^{-t}+L^{-1}\left[e^{-\pi S}\underbrace{\frac{1}{S}}_{F(S)}\right]-L^{-1}\left[e^{-\pi S}\underbrace{\frac{1}{S+1}}_{G(S)}\right]-L^{-1}\left[e^{-\pi S}\underbrace{\frac{1}{(S+1)^2}}_{H(S)}\right]$$
$$y(t)=\frac{3}{2}te^{-t}+\mu(t-\pi)f(t-\pi)-\mu(t-\pi)g(t-\pi)-\mu(t-\pi)h(t-\pi)$$

tal que: $f(t)=L^{-1}[F(S)]=L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right]=1$

$$g(t)=L^{-1}[G(S)]=L^{-1}\left[\frac{1}{S+1}\right]=e^{-t}$$
$$h(t)=L^{-1}[H(S)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)^2}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1}{S^2}\right]=te^{-t}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial está dada por:

$$y(t)=\frac{3}{2}te^{-t}+\mu(t-\pi)-\mu(t-\pi)e^{-(t-\pi)}-\mu(t-\pi)(t-\pi)e^{-(t-\pi)};\ t\geq 0$$
$$y(t)=\frac{3}{2}te^{-t}+\mu(t-\pi)\left(1-e^{-(t-\pi)}-(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\right);\ t\geq 0$$

CRITERIO DE CALIFICACION El estudiante:	**PUNTAJE**
Aplica la transformada de Laplace al problema de valor inicial y obtiene una expresión para la transformada de $y(t)$, esto es, $Y(S)$.	10.0 P
Aplica la transformada inversa de Laplace a $Y(S)$ para determinar $y(t)$.	10.0 P
TOTAL	**20.0 P**