



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b> 2018 - 2019	<b>PERIODO:</b> PRIMER TÉRMINO
<b>MATERIA:</b> ECUACIONES DIFERENCIALES	<b>PROFESORES:</b> Jennifer Avilés, José Castro, C. Mario Celleri, Antonio Chong, David De Santis, Liliana Pérez, Eduardo Rivadeneira, Hernando Sánchez, Emilck Sempértegui.
<b>EVALUACIÓN:</b> PRIMERA	<b>FECHA:</b> 25 JUNIO 2018

**CRITERIOS DE CALIFICACION**

**Tema 1 (10 Puntos)**

Complete las siguientes frases, para lo cual **NO** es necesario justificar sus respuestas.

**“A continuación se muestran respuestas y posibles ejemplos”**

- a) Si una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  satisface la condición  $\exists N, M \in \mathbb{R} [N \leq a_n \leq M]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y satisface la condición  $\{ [a_n < a_{n+1}] \vee [a_n > a_{n+1}] \}$  desde algún  $n = k$ , tal que  $k \in \mathbb{N}$ , entonces la sucesión es convergente.
- b) La serie  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{p+1}}$  diverge si  $p$  pertenece al intervalo  $(-1, 0]$ . También es válido:  $(-\infty, 0]$ .
- c) Si  $\sum_{m=3}^{\infty} |(-1)^m c_m|$  donde  $c_m > 0$  es divergente y  $\sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m c_m$  es **convergente**, se dice que  $\sum_{m=3}^{\infty} (-1)^{m+3} c_m$  es condicionalmente convergente.
- d) El criterio de la raíz absoluta aplicada a una serie de la forma  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  tal que  $a_i > 0$  donde  $i \in \mathbb{N}$  no es concluyente si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ .
- e) Usando el símbolo de sumatoria, un ejemplo de una serie geométrica divergente con término inicial igual a 25 es  $\sum_{n=0}^{\infty} 25(2)^n$ .
- f) Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  una serie de términos positivos y negativos, si  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{m+1}}{c_m} \right| = \frac{3}{2}$ , entonces se puede afirmar que la serie es **divergente**.
- g) La ecuación diferencial ordinaria de Bernoulli  $3y^2 y' - ay^3 - (x+1)y = 0$  donde  $a > 1$  se convierte en una ecuación lineal al realizar el cambio de variable  $v = y^2$ .
- h) Una función  $Q(x, y)$  para que la ecuación  $(x+2y)dx + Q(x, y)dy = 0$  sea exacta es:  $Q(x, y) = 2x + 1$ .
- i) Un ejemplo de una ecuación diferencial homogénea de primer orden, es decir, una ecuación de la forma  $y' = f(y/x)$ , que además no sea lineal es  $y' = (y/x)^2$ .
- j) Las isóclinas para la ecuación  $xy' = y + 1$  están dadas por la expresión  $\frac{y+1}{x} = c, c \in \mathbb{R}$ .

EL ESTUDIANTE:	CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
	Completa correctamente cada literal sin necesidad de proporcionar justificación alguna.	1.0 P cada literal
<b>TOTAL</b>		<b>10.0 P</b>

---

**Tema 2 (8 Puntos)**

Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA, justificando correctamente sus respuestas.

**Literal a (4 Puntos)**

El criterio de convergencia de la integral es aplicable a la serie  $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}$ , y a partir de dicho criterio se concluye que la serie es divergente.

CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
EL ESTUDIANTE:	
Muestra que el criterio de la integral es aplicable a la serie dada.	1.0 P
Aplica el criterio de la integral, concluyendo que la serie es convergente.	2.0 P
Concluye que la proposición es FALSA.	1.0 P
<b>TOTAL</b>	<b>4.0 P</b>

**Literal b (4 Puntos)**

Al reducir el orden la ecuación diferencial ordinaria  $2y'' - \csc^2(\beta x) = 0$ , donde  $\beta < 0$  se obtiene una ecuación diferencial de primer orden separable, y la respectiva familia 2-paramétrica de soluciones de la ecuación de segundo orden contiene los puntos de la forma  $\left(\frac{\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2\beta} c_1 + c_2\right)$  donde  $c_1$  y  $c_2$  son las constantes de integración.

CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
EL ESTUDIANTE:	
Muestra que al reducir el orden de la ecuación dada se obtiene una ecuación de primer orden separable.	1.0 P
Muestra que la respectiva familia 2-paramétrica de soluciones de la ecuación de segundo orden contiene los puntos de la forma $\left(\frac{\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2\beta} c_1 + c_2\right)$ donde $c_1$ y $c_2$ son las constantes de integración.	2.0 P
Concluye que la proposición es VERDADERA.	1.0 P
<b>TOTAL</b>	<b>4.0 P</b>

---

**Tema 3 (8 Puntos)**

A partir de la serie de potencias geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; |x| < 1$ , calcule la serie de Maclaurin de la función  $P(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ . Luego, halle el valor aproximado de  $\int_0^b \frac{x}{(1+x)^2} dx$  utilizando los 3 primeros términos de la serie calculada para  $P(x)$ , si el intervalo de convergencia de  $P(x)$  se considera de la forma  $(-2b, 2b)$ .

CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
EL ESTUDIANTE:	
Calcula la serie de Maclaurin de la función $P(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ a partir de la serie de potencias geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};  x  < 1$ .	3.0 P
Obtiene el radio de convergencia de la serie de calculada para $P(x)$ , identificando el valor de la constante $b$ .	2.0 P
Halla el valor aproximado de $\int_0^b \frac{x}{(1+x)^2} dx$ utilizando los 3 primeros términos de la serie calculada para $P(x)$ .	3.0 P
<b>TOTAL</b>	<b>8.0 P</b>

**Tema 4 (8 Puntos)**

Determine la solución del problema de valor inicial:

$$\left(\frac{\cos(x) \operatorname{sen}(x)}{x} - y^2\right) dx + y\left(\frac{1}{x} - x\right) dy = 0 \quad ; \quad y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0$$

CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
<b>Una forma de solución:</b>	
EL ESTUDIANTE:	
Verifica que la EDO no es exacta y calcula un factor integrante.	2.0 P
Plantea la forma de la solución y las condiciones que debe satisfacer.	1.0 P
Integra una de las condiciones, sustituye la respuesta obtenida en la otra condición, obteniendo así la solución de la ecuación diferencial.	3.0 P
Evalúa la condición inicial para hallar el valor de la constante de integración, obteniendo así la solución del problema de valor inicial.	2.0 P
<b>TOTAL</b>	<b>8.0 P</b>

CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
<b>Otra forma de solución:</b>	
EL ESTUDIANTE:	
Muestra que la ecuación diferencial es de Bernoulli y aplica un cambio de variable para transformarla en lineal.	3.0 P
Resuelve la ecuación diferencial lineal obtenida.	2.0 P
Usa el cambio de variable antes planteado para regresar a las variables originales del problema.	1.0 P
Evalúa la condición inicial para hallar el valor de la constante de integración, obteniendo así la solución del problema de valor inicial.	2.0 P
<b>TOTAL</b>	<b>8.0 P</b>

**Tema 5 (8 Puntos)**

Para un circuito en serie Resistor-Capacitor alimentado por una fuente de voltaje descrita por  $E(t) = 10\operatorname{sen}(5t)[V]$ , halle la función que describe la carga de capacitor a los  $t$  segundos, si el resistor es de 2 ohmios, el capacitor es de 0.1 faradios, y la carga inicial del capacitor es de 1 Coulomb.

CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
EL ESTUDIANTE:	
Usando la ley de Kirchhoff, plantea el problema de valor inicial que describe la carga del capacitor.	2.0 P
Resuelve la ecuación diferencial asociada al problema de valor inicial planteado.	4.0 P
Evalúa la condición inicial para hallar el valor de la constante de integración, obteniendo así la solución del problema de valor inicial.	2.0 P
<b>TOTAL</b>	<b>8.0 P</b>

**Tema 6 (8 Puntos)**

Obtenga la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = \frac{50}{x} \quad ; \quad x \in (0, +\infty)$$

CRITERIO DE CALIFICACION	PUNTAJE
EL ESTUDIANTE:	
Halla la solución complementaria, resolviendo la ecuación homogénea correspondiente. Para esto, transforma la ecuación de Cauchy-Euler analizada en una ecuación de coeficientes constantes (Se debe mostrar los pasos para la transformación).	3.0 P
Halla una solución particular para la ecuación no homogénea, mostrando la forma de la solución a encontrar y las condiciones que ésta debe satisfacer).	4.0 P
Obtiene la solución general de la ecuación diferencial ordinaria dada, superponiendo la solución complementaria y una solución particular de la misma.	1.0 P
<b>TOTAL</b>	<b>8.0 P</b>