

# Procesos Estocásticos

## Primera Evaluación

20 de noviembre de 2018

Nombre: \_\_\_\_\_

1. El crecimiento de un tipo de tumor depende de varios factores: la constitución genética del paciente, su alimentación, su edad, entre otros. La historia muestra que en el 30% de los pacientes el tumor crece a razón de 1% diario, en el 42% el crecimiento es del 2% diario, y en el resto es del 3% diario. Una resonancia magnética revela que cierto paciente tiene un tumor de este tipo de  $2 \text{ cm}^3$ , pero no se sabe su tasa de crecimiento diario. Suponga que  $X_n$  es el tamaño del tumor el día  $n$  (el día cero es el día que se descubrió el tumor).

- a. (5 puntos) ¿Cuál es la distribución de probabilidades de  $X_n$ ? (SUGERENCIA: defina la variable aleatoria  $Z$  como  $P(Z = 1.01) = 0.30$ , etc.)

**Solución:** Si crece a razón de 1% diario, entonces  $X_n = 1.01 \times X_{n-1}$ . Como  $X_0 = 2$ , entonces  $X_n = 2 \times (1.01)^n$ . Pero, no sabemos si el porcentaje de crecimiento será del 1%, 2% ó 3%. Entonces, podemos definir la variables aleatoria  $Z$  con la distribución de probabilidades  $P(Z = 1.01) = 0.30, P(Z = 1.02) = 0.42, P(Z = 1.03) = 0.28$ . Entonces  $X_n = 2 \times Z^n$ . Ahora, la distribución de probabilidad de  $X_n$  es

$$P(X_n = 2 \times (1.01)^n) = 0.3$$

$$P(X_n = 2 \times (1.02)^n) = 0.42$$

$$P(X_n = 2 \times (1.03)^n) = 0.28$$

- b. (5 puntos) Calcule  $\mu_n = E(X_n)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\mu_n &= 2 \times (1.01)^n \times 0.3 + 2 \times (1.02)^n \times 0.42 + 2 \times (1.03)^n \times 0.28 \\ &= 0.6 \times (1.01)^n + 0.84 \times (1.02)^n + 0.56 \times (1.03)^n\end{aligned}$$

- c. (5 puntos) Calcule  $\sigma_n^2 = \text{var}(X_n)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= E(X_n^2) - \mu_n^2 = 4 \times (1.01)^{2n} \times 0.3 + 4 \times (1.02)^{2n} \times 0.42 + 4 \times (1.03)^{2n} \times 0.28 \\ &\quad - (0.6 \times (1.01)^n + 0.84 \times (1.02)^n + 0.56 \times (1.03)^n)^2 \\ &= 0.84 \times (1.01)^{2n} + 0.9744 \times (1.02)^{2n} + 0.8064 \times (1.03)^{2n} \\ &\quad - 1.008 \times (1.0302)^n - 0.672 \times (1.0403)^n - 0.9408 \times (1.0506)^n\end{aligned}$$

- d. (5 puntos) Calcule  $\sigma_{mn} = \text{cov}(X_m, X_n)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\sigma_{mn} &= E(X_m X_n) - \mu_m \mu_n = E(2 \times Z^m \times 2 \times Z^n) - \mu_m \mu_n = E(4 \times Z^{m+n}) - \mu_m \mu_n \\ &= 4 \times (1.01)^{m+n} \times 0.3 + 4 \times (1.02)^{m+n} \times 0.42 + 4 \times (1.03)^{m+n} \times 0.28 \\ &\quad - (0.6 \times (1.01)^m + 0.84 \times (1.02)^m + 0.56 \times (1.03)^m) \times (0.6 \times (1.01)^n + 0.84 \times (1.02)^n + 0.56 \times (1.03)^n) \\ &= 0.84 \times (1.01)^{m+n} + 0.9744 \times (1.02)^{m+n} + 0.8064 \times (1.03)^{m+n} \\ &\quad - 0.504 \times ((1.01)^m (1.02)^n + (1.01)^n (1.02)^m) - 0.336 \times ((1.01)^m (1.03)^n + (1.01)^n (1.03)^m) \\ &\quad - 0.4704 \times ((1.02)^m (1.03)^n + (1.02)^n (1.03)^m)\end{aligned}$$

- e. (5 puntos) ¿Es el proceso estacionario? Justifique su respuesta.

**Solución:** No porque la media no es constante.

2. Un amplificador recibe como entrada la señal  $\sin(2\pi t/10)$  y se espera una salida amplificada de 5 veces la señal de entrada. Sin embargo, el amplificador aumenta un ruido de acuerdo a una distribución normal con media cero y varianza uno, por lo que si se toma una muestra por segundo de la salida obtenida, la medición será  $X_n = 5 \sin(2\pi n/10) + Z_n$ , donde  $Z_n \sim N(0, 1)$ . Suponga que los ruidos medidos en cada segundo son independientes.

- a. (5 puntos) Encuentre la media del proceso  $\mu_n = E(X_n)$ .

**Solución:**

$$E(X_n) = E(5 \sin(2\pi n/10) + Z_n) = 5 \sin(2\pi n/10) + E(Z_n) = 5 \sin(2\pi n/10)$$

- b. (5 puntos) Encuentre la varianza del proceso  $\sigma_n^2 = \text{var}(X_n)$ .

**Solución:**

$$\text{var}(X_n) = \text{var}(5 \sin(2\pi n/10) + Z_n) = \text{var}(Z_n) = 1$$

- c. (5 puntos) Encuentre la covarianza del proceso  $\sigma_{mn} = \text{cov}(X_m, X_n)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} &= E(X_m X_n) - \mu_m \mu_n = E\left((5 \sin(2\pi m/10) + Z_m)(5 \sin(2\pi n/10) + Z_n)\right) - (5 \sin(2\pi m/10))(5 \sin(2\pi n/10)) \\ &= E(25 \sin(2\pi m/10) \sin(2\pi n/10) + \sin(2\pi m/10) Z_n + Z_m \sin(2\pi n/10) + Z_m Z_n) \\ &\quad - 25 \sin(2\pi m/10) \sin(2\pi n/10) \\ &= 25 \sin(2\pi m/10) \sin(2\pi n/10) + \sin(2\pi m/10) E(Z_n) + E(Z_m) \sin(2\pi n/10) + E(Z_m Z_n) \\ &\quad - 25 \sin(2\pi m/10) \sin(2\pi n/10) = 0 \end{aligned}$$

- d. (5 puntos) ¿Es el proceso estacionario? Justifique su respuesta.

**Solución:** No porque la media no es constante.

3. Suponga que  $X_1, X_2, \dots$  son variables i.i.d con  $P(X_n = -1) = 0.4$  y  $P(X_n = 1) = 0.6$ . Defina la caminata aleatoria  $S_0 = 0$  y  $S_n = S_{n-1} + X_n$ .

a. (5 puntos) Calcule  $P(S_7 = 3)$ .

**Solución:**

$$P(S_7 = 3) = \binom{7}{5} 0.6^5 0.4^2 = 0.2612736$$

b. (5 puntos) Calcule  $P(S_8 = -2)$ .

**Solución:**

$$P(S_8 = -2) = \binom{8}{3} 0.6^3 0.4^5 = 0.123863$$

c. (5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad condicional de que  $S_{10} = 4$  dado que  $S_7 = 3$ ? (SUGERENCIA: considere una caminata aleatoria nueva desde el tiempo 7 y que en tres pasos sea igual a 1)

**Solución:** Tomando en cuenta que  $S_{10} = S_7 + X_8 + X_9 + X_{10}$  y que  $S_7 = 3$ , entonces para que  $S_{10} = 4$  tiene que cumplirse que  $X_8 + X_9 + X_{10} = 1$ . Este último es una caminata aleatoria de 3 pasos con la misma distribución que la original, por lo que

$$P(S_{10} = 4 | S_7 = 3) = P(S_3 = 1) = \binom{3}{2} 0.6^2 0.4^1 = 0.432$$

d. (5 puntos) Calcule la probabilidad de que la primera vez que la caminata llegue a 1 sea en el séptimo paso.

**Solución:** Suponga que  $N = \min\{n : S_n = 1\}$ . Entonces,

$$P(N = 7) = \frac{1}{7} \binom{7}{4} 0.6^4 0.4^3 = 0.041472$$

4. Un estudiante sale de su trabajo a las 4:00 pm y corre al paradero que queda a 3 minutos para coger un bus que lo lleve a la universidad. El horario de llegada del bus es a las 4:05, pero por lo variable del tráfico en el recorrido previo a ese paradero, el tiempo de llegada es las 4:05 más una variable aleatoria  $T$  con distribución  $f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}|t|$ ,  $-3 < t < 3$ , tal que  $T = 2.5$  quiere decir que el bus llega a las 4:07:30. Si pierde el bus, el siguiente bus pasará a las 4:15, y por ende el estudiante llegará tarde a su clase. El tiempo de recorrido después de ese paradero es fijo, y es de 20 minutos hasta el paradero de la universidad, donde el estudiante, si corre, se hace dos minutos para llegar al aula de la clase de las 4:30. Esta rutina la tiene dos veces por semana. El profesor de la clase tiene la siguiente política de atrasos: si el estudiante llega atrasado, tiene un punto menos, pero si llega a tiempo le sube un punto. La clase dura 4 semanas, por lo que el estudiante puede ganar o perder hasta 8 puntos.

- a. (5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante llegue atrasado a su clase?

**Solución:** El estudiante siempre llega a las 4:03 al paradero, por lo que si el bus llegara entre las 4:03 y las 4:08, el estudiante llegaría a tiempo a su clase. En otras palabras, si  $-2 \leq T \leq 3$ , el estudiante llega a tiempo. Por otro lado, si el bus llegara entre las 4:02 y 4:03, el estudiante perdería el bus, tendría que esperar el siguiente y por ende llegará tarde. Por eso,  $P(\text{estudiante llegue tarde}) = P(T < -2)$ .

Esta probabilidad se puede hallar de dos maneras. La primera es geoméricamente, notando que el área deseada es un triángulo con base 1 ( $-3 \leq t < -2$ ) y altura  $f(-2) = 1/9$ . Entonces, el área deseada es base por altura sobre dos que es  $P(T < -2) = 1/18$ . La segunda manera se puede hacer integrando:

$$\begin{aligned} P(T < -2) &= \int_{-3}^{-2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{9}|t| \right) dt = \int_{-3}^{-2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9}t \right) dt = \left. \frac{t}{3} + \frac{1}{18}t^2 \right|_{-3}^{-2} \\ &= \left( \frac{-2}{3} + \frac{1}{18}(-2)^2 \right) - \left( \frac{-3}{3} + \frac{1}{18}(-3)^2 \right) = \left( -\frac{4}{9} \right) - \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

- b. (5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante reciba los 8 puntos por puntualidad?

**Solución:** La probabilidad de que suba un punto es  $p = 17/18$ , y de que pierda un punto es  $q = 1/18$ . Por ende

$$P(S_8 = 8) = \binom{8}{8} \left( \frac{17}{18} \right)^8 \left( \frac{1}{18} \right)^0 = 0.6330111$$

- c. (10 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, al final del curso, el estudiante pierda puntos por sus atrasos?

**Solución:** El estudiante perderá puntos si  $S_8 < 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(S_8 < 0) &= P(S_8 = -2) + P(S_8 = -4) + P(S_8 = -6) + P(S_8 = -8) \\ &= \binom{8}{3} \left( \frac{17}{18} \right)^3 \left( \frac{1}{18} \right)^5 + \binom{8}{2} \left( \frac{17}{18} \right)^2 \left( \frac{1}{18} \right)^6 + \binom{8}{1} \left( \frac{17}{18} \right)^1 \left( \frac{1}{18} \right)^7 + \binom{8}{0} \left( \frac{17}{18} \right)^0 \left( \frac{1}{18} \right)^8 \\ &= 2.4966333 \times 10^{-5} + 7.343039 \times 10^{-7} + 1.2341242 \times 10^{-8} + 9.0744426 \times 10^{-11} \\ &= 2.5713068 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Es muy poco probable que el estudiante pierda puntos al final por atrasos.

5. Existen caminatas aleatorias con la posibilidad de no se avance en un paso. Suponga que  $X_1, X_2, \dots$  son iid, tales  $P(X_n = 1) = p$ ,  $P(X_n = -1) = q$  y  $P(X_n = 0) = r$ , donde  $p + q + r = 1$ . El valor  $r$  representa la probabilidad de no avanzar en un paso. Sea  $S_0 = 0$  y  $S_n = S_{n-1} + X_n$ .

a. (5 puntos) Calcule  $\mu_n = E(S_n)$ .

**Solución:**

$$E(X_n) = 1 \times p + (-1) \times q + 0 \times r = p - q$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$E(S_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = (p - q) + \dots + (p - q) = n(p - q)$$

b. (5 puntos) Calcule  $\sigma_n^2 = \text{var}(S_n)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{var}(X_n) &= E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = 1^2 \times p + (-1)^2 \times q + 0^2 \times r - (p - q)^2 \\ &= p + q - (p - q)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(S_n) &= \text{var}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_n) + 2 \text{cov}(X_1, X_2) + \dots + 2 \text{cov}(X_{n-1}, X_n) \\ &= p + q - (p - q)^2 + \dots + p + q - (p - q)^2 + 0 + \dots + 0 \\ &= n(p + q - (p - q)^2) \end{aligned}$$

c. (5 puntos) Calcule  $P(S_2 = 1)$ .

**Solución:** Si  $X_1 = -1$  sería imposible que  $S_2 = 1$ . Si  $X_1 = 0$ , entonces  $X_2 = 1$  sería la única manera de que  $S_2 = 1$ . Si  $X_1 = 1$ , entonces  $X_2 = 0$  lograría el objetivo. Entonces

$$\begin{aligned} P(S_2 = 1) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) \\ &= rp + pr = 2pr \end{aligned}$$

## Fórmulas Útiles

Si  $X_1, X_2, \dots$  son iid, tales  $P(X_n = 1) = p$  y  $P(X_n = -1) = q = 1 - p$ ,  $S_0 = 0$  y  $S_n = S_{n-1} + X_n$  para  $n = 1, 2, \dots$ , entonces

$$P(S_n = k) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

donde  $r = \frac{1}{2}(n + k)$  deber ser un entero (recuerde que  $r(+1) + (n - r)(-1) = k$ ).

Si

$$N = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$$

entonces

$$P(N = 2j - 1) = \frac{1}{2j - 1} \binom{2j - 1}{j} p^j q^{j-1}$$