ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2018	**PERÍODO:**	SEGUNDO TÉRMINO
MATERIA:	Cálculo de una variable	**PROFESORES:**	Argüello G., Baquerizo G., Chóez M., Crow P., Laveglia F., Mejía M., Ramos M., Ronquillo C.
EVALUACIÓN:	SEGUNDA	**FECHA:**	28/enero/2019

S O L U C I Ó N y R Ú B R I C A

1) (6 PUNTOS) Justificando su respuesta, establezca si cada proposición es VERDADERA o FALSA.

a) "Si $\int_0^3 f(x)\,dx = 6$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 4$ y $\int_2^3 f(x)\,dx = -2$; entonces $\int_{-3}^2 f(x+3)\,dx = 12$".

Solución:

Se puede hacer un cambio de variable a la función integrando del consecuente. Si $u = x + 3$, entonces $du = dx$. Se cambian los límites de integración; si $x \to -3$, entonces $u \to 0$; y, si $x \to 2$, entonces $u \to 5$:

$$\int_{-3}^{2} f(x+3)\,dx = \int_0^5 f(u)\,du$$

Se aplica la propiedad ADITIVA de la integral definida:

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 6 - (-2) + 4 = 12$$

$\therefore$ La proposición es VERDADERA.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre la propiedad aditiva de las integrales definidas.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Ni hace el cambio de variable, ni aplica bien la propiedad aditiva.	**Replantea bien la integral definida pero aplica mal la propiedad aditiva.**	**Replantea bien la integral definida, aplica bien la propiedad aditiva; pero, o se equivoca en la suma o no concluye.**	**Replantea bien la integral definida, suma correctamente y concluye sobre el valor de verdad de la proposición.**
	0	**1**	**2**	**3**

b) “Dado el número $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ y una función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R} \mapsto \boldsymbol{Y} \subseteq \mathbb{R}$; si $\int_{-a}^{a} \boldsymbol{f(x)\,dx = 0}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es impar”.

Solución:

Se proporcionará un CONTRAEJEMPLO para la proposición, el cual permita evidenciar que al tratarse de la RECÍPROCA del TEOREMA DE SIMETRÍA es una proposición falsa.

Sea la función $f: [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, la cual no es impar, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & -1 \leq x \leq 0 \\ -\dfrac{1}{3}\,, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} \left(-\frac{1}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \left(\frac{x}{3}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left(0 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Nótese que:

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0}_{1} \quad \rightarrow \quad \underbrace{f\ es\ impar}_{0} \ \equiv 0$$

$\therefore$ La proposición es FALSA.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre el teorema de simetría de la integral definida.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Indica que la proposición es verdadera.	**Intenta construir un contraejemplo pero tiene dificultades.**	**Construye bien el contraejemplo pero no concluye que la proposición es falsa.**	**Proporciona un contraejemplo adecuado y concluye que la proposición es falsa.**
	0	**1**	**2**	**3**

Observación.- El estudiante puede proporcionar otro contraejemplo válido.

2) (5 PUNTOS) Obtenga:

$$\int \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x + x\,ln(x)}} + \boldsymbol{sen^2\left(\frac{x}{3}\right)}\right) \boldsymbol{dx}$$

Solución:

Se aplica la propiedad de LINEALIDAD de la integral indefinida:

$$\int\left(\frac{1}{x+x\,ln(x)}+sen^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)dx=\int\frac{dx}{x+x\,ln(x)}+\int sen^2\left(\frac{x}{3}\right)\,dx$$

Se obtiene la antiderivada de cada función:

$$\int\frac{dx}{x+x\,ln(x)}=\int\frac{dx}{x\big(1+\ ln(x)\big)}$$

Sea $u=1+\ ln(x)$, entonces $du=\frac{1}{x}dx$.

$$\int\frac{dx}{x\big(1+\ ln(x)\big)}=\int\frac{du}{u}=ln|u|+C$$

$$\int\frac{dx}{x\big(1+\ ln(x)\big)}=ln|1+\ ln(x)|+C$$

$$\int sen^2\left(\frac{x}{3}\right)dx=\int\left(\frac{1-cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}\right)dx$$

$$\int sen^2\left(\frac{x}{3}\right)dx=\int\frac{dx}{2}-\int\frac{cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}dx$$

$$\int sen^2\left(\frac{x}{3}\right)dx=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}sen\left(\frac{2x}{3}\right)+C$$

$$\boxed{\int\left(\frac{1}{x+x\,ln(x)}+sen^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)dx=ln|1+\ ln(x)|+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}sen\left(\frac{2x}{3}\right)+C\ ;\quad C\in\mathbb{R}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante aplica la propiedad de linealidad, la técnica de integración por sustitución y la antiderivada de funciones trigonométricas y racionales.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar.	**Aplica la propiedad de linealidad pero no integra correctamente los dos términos del integrando.**	**Aplica linealidad e integra bien utilizando un cambio de variable y la identidad trigonométrica, pero no incluye la constante C.**	**Aplica linealidad e integra correctamente los dos términos del integrando y considera la constante C en la antiderivada.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

3) (5 PUNTOS) De ser posible, calcule el valor de:

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x}$$

y concluya si la integral impropia es CONVERGENTE o DIVERGENTE.

Solución:

Como el integrando es una función racional y el polinomio del denominador se puede descomponer en factores, dicha función se puede expresar así:

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Entonces:

$$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+Cx+A$$

De donde:

$$A=1$$
$$C=0$$
$$A+B=0 \quad \rightarrow \quad B=-1$$
$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

Se aplica la técnica de INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES, por lo que la nueva integral impropia se redefine así:

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x}=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\lim_{b\to+\infty}\left(ln|x|-\frac{1}{2}ln|x^2+1|\right)\Big|_3^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(ln\left|\frac{x}{(x^2+1)^{1/2}}\right|\right)\Big|_3^b=\lim_{b\to+\infty}\left(ln\left|\frac{b}{(b^2+1)^{1/2}}\right|-ln\left|\frac{3}{\sqrt{10}}\right|\right)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(ln\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{b^2}\right)^{1/2}}\right|+ln\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)\right)=ln(1)+ln\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x}=ln\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$

$\therefore$ La integral impropia es CONVERGENTE.

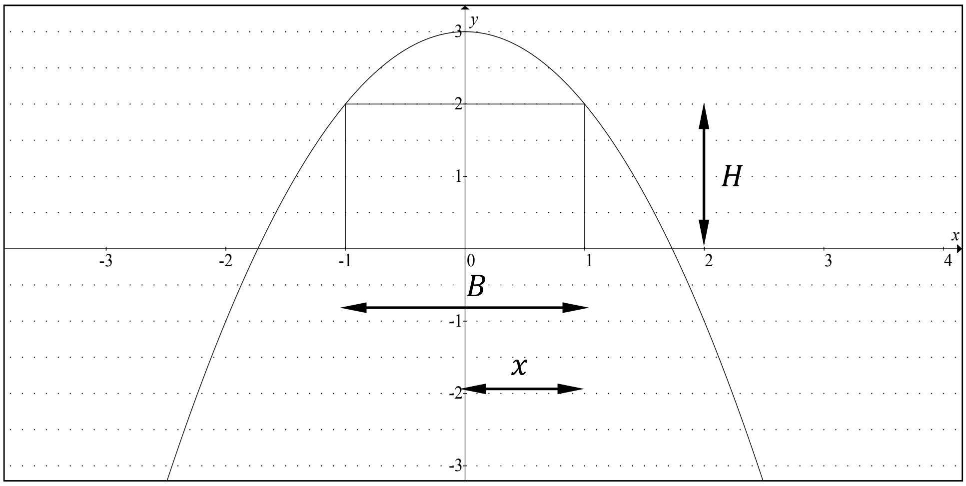
Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre integrales impropias y su tratamiento con límites.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No reconoce que es integral impropia, ni que debe aplicar límites.	**Tiene problemas para seleccionar la técnica de integración apropiada.**	**O se equivoca en la integración o en la evaluación o no concluye.**	**Integra y evalúa bien, así como concluye correctamente.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

4) (6 PUNTOS) Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en la región acotada por la función $f(x) = 3 - x^2$ y el eje X. Represente la situación descrita en el plano cartesiano adjunto.

Solución:

Se realiza la representación geométrica de la situación descrita:



Se puede notar que:

$$A(x, y) = BH = (2x)(y)$$

La expresión para el cálculo del área quedará en términos de una sola variable:

$$A(x) = (2x)(3 - x^2) = 6x - 2x^3\ ;\ \ x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$$

Se deriva esta expresión para obtener los puntos críticos:

$$A'(x) = 6 - 6x^2$$

Los puntos críticos de frontera no serán tomados en consideración porque el rectángulo no existiría. La función de área no tiene puntos críticos singulares porque su derivada es una función cuadrática.

Se analiza la existencia de posibles puntos críticos estacionarios:

$$6 - 6x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 6(1 - x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad |x| = 1$$

Se deriva por segunda vez:

$$A''(x) = -12x$$
$$A''(1) < 0 \quad \rightarrow \quad Es\ un\ máximo\ para\ A.$$

Las dimensiones del rectángulo cuya superficie es de área máxima, son:

- $B = 2x = 2(1) = 2\ [u]$
- $H = y = 3 - (1)^2 = 3 - 1 = 2\ [u]$

Es decir, se trata de un cuadrado inscrito.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Insuficiente	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante reconoce un problema de aplicación de máximos y mínimos en donde puede aplicar los criterios de la primera y la segunda derivada.	**No logra asociar los datos proporcionados o no sabe que debe derivar.**	**Deriva bien, pero tiene algún problema para resolver la ecuación planteada con la primera derivada.**	**Resuelve bien la ecuación con la primera derivada, pero presenta algún inconveniente en la evaluación del punto crítico estacionario para poder decidir.**	**Concluye bien sobre las dimensiones del rectángulo inscrito, cuya superficie tenga área máxima.**
	0	**1 – 3**	**4 – 5**	**6**

5) **(6 PUNTOS) Dada la función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{R} \mapsto \boldsymbol{Y} \subseteq \mathbb{R}$ definida por:**

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{2}^{ln(e^2+3x)} \sqrt{1+2t+5t^2}\, dt}$$

Identifique el tipo de indeterminación y luego calcule:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}}$$

Solución:

Se verifica la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \int_2^2 \sqrt{1+2t+5t^2}\, dt}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \frac{0}{0}$$

Se puede aplicar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx} \int_2^{ln(e^2+3x)} \sqrt{1+2t+5t^2}\, dt$$

Se aplica el PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

$$f'(x) = \sqrt{1+2\,ln(e^2+3x)+5\,ln^2(e^2+3x)} \cdot \frac{1}{e^2+3x} \cdot 3$$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

$$f'(0) = \sqrt{1 + 2\,ln\big(e^2 + 3(0)\big) + 5\,ln^2\big(e^2 + 3(0)\big)} \cdot \frac{1}{e^2 + 3(0)} \cdot 3 = \sqrt{25} \cdot \frac{1}{e^2} \cdot 3$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{15}{e^2}}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante conoce sobre cálculo de límites, el primer teorema fundamental del cálculo y la regla de L'Hopital.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No identifica bien el tipo de indeterminación o no sabe cómo calcular correctamente el límite.	**Identifica el tipo de indeterminación y aplica bien el primer teorema fundamental del cálculo, pero aplica mal la regla de la cadena.**	**Identifica el tipo de indeterminación y aplica bien el primer teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, pero tiene algún inconveniente en la evaluación.**	**Identifica el tipo de indeterminación y calcula correctamente el límite.**
	0	**1 – 3**	**4 – 5**	**6**

6) (10 PUNTOS) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(1 + e^x)^2}}$$

a) Demuestre que f no tiene puntos críticos.
b) Determine los intervalos de monotonía de f.
c) Demuestre que su único punto de inflexión es $\boldsymbol{P\left(-ln(2), \frac{4}{9}\right)}$.
d) Determine el intervalo donde f es cóncava hacia arriba y el intervalo donde f es cóncava hacia abajo.

Solución:

Derivamos por primera vez para determinar la existencia o no de puntos críticos:

$$f(x) = (1 + e^x)^{-2}$$

$$f'(x) = -2(1 + e^x)^{-3}(e^x) = -\frac{2e^x}{(1 + e^x)^3}$$

Si se observa la definición dada de la función, se puede concluir que f No tiene Puntos Críticos de Frontera.

La expresión del numerador de la primera derivada $2e^x$ nunca es igual a cero porque esta expresión es positiva en todo su dominio. Esto es, f No tiene Puntos Críticos Estacionarios.

La expresión del denominador de la primera derivada $(1+e^x)^3$ nunca es igual a cero porque no existe valor real alguno para el cual $e^x = -1$. Esto es, f No tiene Puntos Críticos Singulares.

Por lo tanto, f No tiene Puntos Críticos.

La función derivada $f'(x) = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^3}$ es siempre negativa por lo ya expuesto anteriormente. Esto permite concluir que la función es Estrictamente Decreciente en todo su dominio.

Se deriva la función por segunda vez, aplicando la regla del cociente:

$$f''(x) = -2\left[\frac{(1+e^x)^3(e^x) - (e^x)(3)(1+e^x)^2(e^x)}{(1+e^x)^6}\right]$$

$$f''(x) = -2\cancel{(1+e^x)^2}(e^x)\left[\frac{(1+e^x) - (3e^x)}{(1+e^x)^{\cancel{6}}}\right]$$

$$f''(x) = -2e^x\left[\frac{1-2e^x}{(1+e^x)^4}\right]$$

Los candidatos a puntos de inflexión se obtienen cuando $f''(x) = 0$, ya que no hay posibilidad de que $f''(x)$ no exista en algún punto.

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 1-2e^x = 0 \;\rightarrow\; e^x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; x = ln\left(\frac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; x = -ln(2)$$

La ordenada respectiva es:

$$f\left(ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\left(1+\cancel{e^{ln}}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

En la recta real o haciendo las evaluaciones respectivas se puede identificar que:

$$f''(x) < 0 \text{ , si } x < ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \forall x \in \left(-\infty, ln\left(\frac{1}{2}\right)\right), f\ es\ cóncava\ hacia\ abajo\ .}$$

$$f''(x) > 0 \text{ , si } x > ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \forall x \in \left(ln\left(\frac{1}{2}\right), +\infty\right), f\ es\ cóncava\ hacia\ arriba.}$$

Al producirse un cambio en la concavidad de la gráfica de la función antes y después de $x = -ln(2)$, se concluye que el punto P especificado sí es de inflexión.

Rúbrica de los literales a) y b):

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar una potencia y una función exponencial para determinar sus posibles puntos críticos y sus intervalos de monotonía.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe que debe derivar o no deriva bien.	**Solamente indica que no hay puntos de frontera.**	**Deriva bien y plantea las ecuaciones para los posibles puntos estacionarios o singulares; así como la inecuación para los intervalos de monotonía, pero determina incorrectamente su solución.**	**Deriva bien y concluye sobre la inexistencia de puntos críticos y sobre los intervalos de monotonía.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

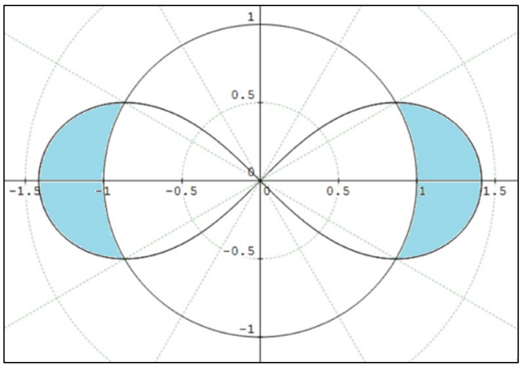
Rúbrica de los literales c) y d):

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe derivar un cociente de funciones y determinar sus intervalos de concavidad y sus puntos de inflexión.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No sabe que debe derivar por segunda vez.	**No deriva bien por segunda vez alguno de los términos del cociente de funciones.**	**Deriva y plantea la ecuación o las inecuaciones, pero no obtiene el punto de inflexión o no determina bien los intervalos.**	**Deriva bien y concluye sobre los intervalos de concavidad de la función y sobre su punto de inflexión.**
	0	**1**	**2 – 4**	**5**

7) (6 PUNTOS) Calcule el área de la región interior a la lemniscata $r^2 = 2\ cos(2\theta)$ y exterior a la circunferencia $r = 1$. Previamente, bosqueje la gráfica de ambas curvas en el plano polar.

Solución:

Se muestra la región descrita en el plano polar:



Se determinan los puntos de intersección de ambas curvas:

$$2\,cos(2\theta) = 1 \quad \rightarrow \quad cos(2\theta) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Se puede aprovechar la simetría del problema y plantear el área de la siguiente manera:

$$A = \cancel{4}\left[\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\,cos(2\theta) - 1)\,d\theta\right] = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\,cos(2\theta)\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta\right]$$

$$A = 2\left[\left(sen(2\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - (\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right] = 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) - \left(\frac{\pi}{6} - 0\right)\right]$$

$$\boxed{A = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)\ [u^2]}$$

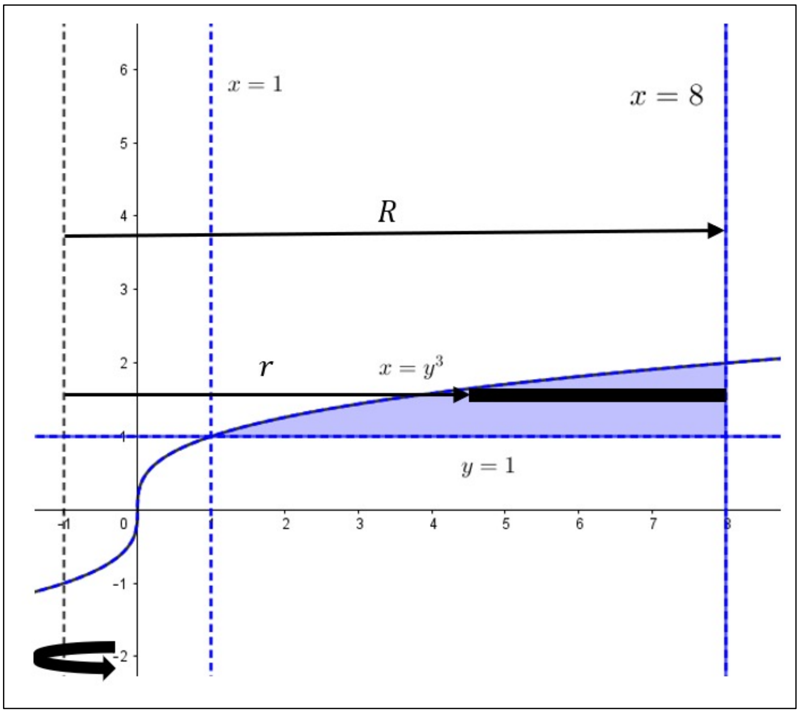
Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante identifica la región común entre curvas polares en forma analítica y en forma gráfica; y, con integrales definidas sabe cómo se calcula el área de dicha región.	**Insuficiente**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No logra identificar bien cómo se grafican las curvas o no sabe plantear el área como una integral definida.	**Grafica las curvas e identifica sus puntos de intersección, pero no la región entre las curvas o no plantea correctamente la integral definida.**	**Grafica bien la región con base en los puntos de intersección, no conoce cómo integrar todas las expresiones o no evalúa bien todos los términos.**	**Grafica bien la región con base en los puntos de intersección, integra correctamente todas las expresiones que se presentan y evalúa bien cada término.**
	0	**1 – 2**	**3 – 5**	**6**

8) (6 PUNTOS) **Sea R la región limitada por la curva $x = y^3$ y las rectas $y = 1$ y $x = 8$. Bosqueje la gráfica de R en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar R alrededor de la recta $x = -1$.**

Solución:

Se bosqueja la gráfica de la región en el plano cartesiano:



Se utilizará el MÉTODO DE LAS ARANDELAS, en donde $R = 9\ [u]$, $r = (x + 1)\ [u]$.

$$Volumen = \pi \int_1^2 (9^2 - (y^3 + 1)^2)\, dy = \pi \left[\int_1^2 \left(81 - (y^6 + 2y^3 + 1)\right) dy \right]$$

$$Volumen = \pi \left[\int_1^2 (80 - y^6 - 2y^3)\, dy \right] = \pi \left(80y - \frac{y^7}{7} - \frac{y^4}{2} \right) \Big|_1^2$$

$$Volumen = \pi \left[\left(160 - \frac{2^7}{7} - \frac{2^4}{2} \right) - \left(80 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$Volumen = \pi \left[160 - \frac{128}{7} - 8 - 80 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \right] = \pi \left(72 - \frac{127}{7} + \frac{1}{2} \right)$$

$$Volumen = \pi \left(\frac{1\,008 - 254 + 7}{14} \right)$$

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución generado es:

$$\boxed{Volumen = \frac{761\,\pi}{14}\ \ [u^3]}$$

También se puede considerar una integración con el método de las capas cilíndricas, pero el resultado será el mismo.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante identifica una región acotada por una función y una recta, el sólido de revolución que se forma y mediante cálculo integral obtiene su volumen.	Insuficiente	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No logra identificar la región o no plantea correctamente la integral definida asociada al volumen.	Identifica la región a integrar pero tiene problemas para plantear la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución.	Identifica la región a integrar, plantea la expresión del volumen del sólido de revolución, pero se equivoca al integrar algún término.	Identifica la región a integrar, plantea la expresión del volumen, integra bien cada término y expresa el resultado correcto.
	0	1 – 2	3 – 5	6