ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO:	2018-2019	**PERÍODO:**	SEGUNDO TÉRMINO	Rubrica
MATERIA:	Álgebra Lineal	**PROFESORES:**	Bracamonte Mireya, Célleri Mario, Córdova Nelson, Laveglia Franca, Marchan Luz E, Martínez Margarita, Moreno Alex, Sánchez Joffre, Valdiviezo Janeth, Valdiviezo Patricia, Vielma Jorge.	
EVALUACIÓN:	Primera	**FECHA:**	31 de enero de 2019	

1. (9 Puntos) A continuación, se presenta tres enunciados, cada uno de los cuales tienen 5 posibles opciones de respuesta (**más de una puede ser correcta en cada caso)**. Rellene el circulo de aquella o aquellas opciones correctas. Cada selección incorrecta restará 0,5 puntos a la calificación del tema.

   (a) Sean $T: V \to W$ una transformación lineal. Si $\dim V = n$ y $\dim\ W = n-1$, es cierto que:

   ○ Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente en V entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente de W.

   ○ $T(0_V) = 0_V$

   ○ T debe ser sobreyectiva.

   ○ T debe ser inyectiva.

   ● El rango de T es menor o igual a $n-1$.

   (b) Si u y v son vectores ortogonales de un espacio $(V, (.|.))$, entonces es cierto que:

   ● $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

   ○ $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   ● Si u y v son no nulos, existe una base de V que contenga a estos dos vectores.

○ u y $u + v$ no pueden ser ortogonales.

○ u y $u + v$ son ortogonales si u es no nulo.

(d) Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas en un campo K. Es cierto que:

● A y A^t tienen el mismo polinomio característico.

○ A tiene n autovectores linealmente independientes

● Si A tiene n autovalores diferentes entonces es diagonalizable.

○ Si A es diagonalizable entonces debe ser una matriz simétrica.

● Si A es una matriz simétrica entonces todos sus valores propios son números reales.

Son 6 proposiciones ciertas, 1,5 punto cada una. Por cada una incorrecta se le penaliza con medio punto y la calificación final será el máximo entre cero y la calificación obtenida según estas condiciones.

2. (10 Puntos) De ser posible, construya una transformación lineal T de $P_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^3$ tal que,

$$T(x^2+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; T(x+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; T(x^2-x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Inadecuado	**En desarrollo**		**Satisfactorio**	**Avanzado**	
En blanco o sólo incoherencias	Indica que $\{x^2+1; x+1; x^2-x\}$ no forma una base para $P_2(\mathbb{R})$.	Verifica que la imagen del vector que no es linealmente independiente, satisface la condición de linealidad	Determina una base B para $P_2(\mathbb{R})$ que incluya dos vectores del conjunto $\{x^2+1; x+1; x^2-x\}$.	Define las imágenes de cada uno de los elementos de B que satisfagan las condiciones dadas.	Construye la transformación lineal correspondiente de manera correcta.
0	2	2	2	2	2

3. (9 Puntos) Determine los valores de la constante a para los cuales la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable.

Inadecuado	En desarrollo	Satisfactorio	Avanzado
En blanco o sólo incoherencias	Determina el polinomio característico y los valores propios	Determina los espacios propios asociados al valor propio 1 e indica que si $a = 0$, A es diagonalizable. Y si $a \neq 0$ entonces A no es diagonalizable. (*con algunos errores que el profesor debe ponderar*)	Determina correctamente los espacios propios asociados al valor propio 1 e indica que si $a = 0$, A es diagonalizable. Y si $a \neq 0$ entonces A no es diagonalizable.
0	1-3	4-8	9

4. (5 Puntos) Demuestre que si $(V, (.|.))$ es un espacio con producto interno, $\alpha \in K$, $v_1, v_2, v_3 \in V$, entonces $(v_1|\alpha v_2 + v_3) = \bar{\alpha}(v_1|v_2) + (v_1|v_3)$.

Inadecuado	En desarrollo	Satisfactorio	Avanzado
En blanco o sólo incoherencias	Intenta demostrar y escribe algo relacionado	Demuestra con procedimientos casi completos con pocas fallas	Demuestra satisfactoriamente
0	1-2	3-4	5

5. (7 Puntos) Considere el siguiente teorema:

> Si V y U son dos espacios vectoriales sobre un campo K, V de dimensión finita y $L: V \to U$ una transformación lineal, entonces $Rango(L) + nulidad(L) = \dim(V)$.

A continuación se presenta un conjunto de pasos, que ordenados pertinentemente representan la demostración de este teorema para el caso en que $0 \neq k = nulidad(L) < \dim(V) = n$.
En cada círculo en blanco indique el orden que corresponda al paso adjunto para que la demostración sea expresada de manera correcta. Como ilustración, se indica cual es el paso octavo.

Orden	Pasos
	Si $u \in Im(L)$, entonces existe un vector $v \in V$ tal que $L(v) = u$ y $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$.
	Se obtiene entonces que $Rango(L) + nulidad(L) = (n-k) + k = n = \dim(V)$.
	Sea $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ una base para el $Ker(L)$.

Existen entonces $c_1, c_2, \dots, c_k \in K$ tales que $\gamma_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \gamma_n v_n = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$, de donde $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k - \gamma_{k+1}v_{k+1} - \cdots - \gamma_n v_n = 0_V$.

Se pueden elegir vectores $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ tales que $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sea una base para V.

Se tiene entonces que $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = \gamma_{k+1} = \cdots = \gamma_n = 0$, por lo tanto $\{L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\}$ es linealmente independiente y base de $Im(L)$.

Si $\gamma_{k+1}L(v_{k+1}) + \cdots + \gamma_n L(v_n) = 0_U$ se tiene que $L(\gamma_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \gamma_n v_n) = 0_U$, esto es $\gamma_{k+1}v_{k+1+\cdots+\gamma_n}v_n \in Ker(L)$.

Luego, $u = \alpha_{k+1}L(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n L(v_n)$, por lo tanto $\{L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\}$ genera a $Im(L)$.

Son 7 “pasos” a ser ordenados ya que el quinto fue indicado como ilustración. Se asignará un punto por cada paso correctamente seleccionado, siempre que el siguiente también esté correctamente seleccionado (*el tercero y el cuarto, por ejemplo*)

6. (10 Puntos) Sea $(V, (.|.))$ un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. Demuestre que el complemento ortogonal de $W, W^{\perp}$, es un subespacio de V y determine además $W \cap W^{\perp}$.

	Inadecuado	**En desarrollo**	**Satisfactorio**	**Avanzado**
	En blanco o sólo incoherencias	Intenta demostrar y escribe algo relacionado	Demuestra, utilizando procedimientos casi completos pero con algunas fallas	Demuestra satisfactoriamente
Demuestre que el complemento ortogonal de $W, W^{\perp}$, es un subespacio de V	0	1-3	4-5	6
Determinar $W \cap W^{\perp}$.	0	1	2-3	4