

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

INFORME DE MATERIA INTEGRADORA

**"SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE UN
LÍQUIDO NEWTONIANO A TRAVÉS DE UNA TUBERÍA
UTILIZANDO EL MÉTODO SPH CON FRONTERAS
PERIÓDICAS"**

Previo a la obtención del título de:

INGENIERO QUÍMICO

Autores:

**DIANA KATHIUSCA ÁGUILA CHÁVEZ
ELÍAS JEFFERSSON SANTACRUZ YUNGA**

GUAYAQUIL – ECUADOR

AÑO 2018

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolló la simulación computacional del comportamiento de un líquido Newtoniano a través de una porción de tubería horizontal con fronteras periódicas, bidimensional e isotérmico, utilizando el método Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) para dos Kernel de interpolación distintos: uno gaussiano y otro cuadrático, mediante la implementación de un algoritmo programado en MATLAB. En los resultados, se evaluó el efecto de las condiciones de frontera periódicas calculando el error relativo respecto a la solución analítica de un flujo de Poiseuille no estacionario. En los experimentos numéricos se estudió la influencia del número de partículas, la escala de la simulación y el tipo de kernel, encontrando que el kernel cuadrático presenta mejor estabilidad al aumentar el número de partículas comparativamente con el gaussiano. Al disminuir la escala de simulación y aumentar el número de partículas el kernel gaussiano divergía. Para el kernel cuadrático se obtuvo un error del 5.9%.

Palabras clave: *Smoothed Particle Hydrodynamics, simulación computacional, fronteras periódicas, kernel, Poiseuille.*

ABSTRACT

In this work is presented the numerical simulation of a Newtonian liquid through a horizontal pipe with periodic boundaries, in a two-dimensional and isothermal system, using the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) approach, for two different interpolation Kernels: The Gaussian and quadratic one, through the implementation of an algorithm developed in MATLAB. The results, shown the effect of the boundary conditions by computing the error relative to the non-stationary Poiseuille flow analytical solution. The influence of the number of particles, the scale of the simulation and the kind of kernel was studied, finding that the quadratic kernel improves the consistency of the numerical solution when is increasing the number of particles comparing with the Gaussian. The computed relative error for the quadratic kernel was at 5.9%.

Key words: *Smoothed Particle Hydrodynamics, computational simulation, periodic boundaries, kernel, Poiseuille.*

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mis padres: Segundo Águila Vargas y Patricia Chávez Molina ya que con el esfuerzo de ellos pude culminar de manera exitosa mis estudios en esta reconocida institución. Me ayudaron a darme cuenta de mis errores y aprender a corregirlos, me enseñaron que cada tropiezo en mi vida es una enseñanza valiosa para superarme. A mi compañero de tesis Elías Santacruz quien me brindó todo su apoyo a lo largo de la carrera, compartiéndome sus conocimientos para juntos poder cumplir esta meta tan deseada.

Diana Águila Ch.

Dedico este trabajo a mi mami Clara Yunga López por brindarme todo su amor y paciencia para lograr salir adelante en todo lo que me propongo, ayudándome a culminar satisfactoriamente mis estudios y estando siempre ahí cuando la necesito. A mi amiga y compañera de tesis Diana Águila por tenerme paciencia y aconsejarme en los momentos más difíciles de mi vida. A mi querida abuela Olga López por darme siempre su cariño y consejos a lo largo de toda mi vida.

Elías Santacruz Y.

AGRADECIMIENTO

Agradecemos a Dios, a nuestros padres, y a todos nuestros familiares que siempre estuvieron allí para nosotros, con su apoyo incondicional, enseñándonos a superar todas las vicisitudes y problemas que se presentaban a lo largo de este arduo camino. Gracias también, a nuestros amigos, quienes han permanecido junto a nosotros en los buenos y en los malos momentos, ayudándonos y alentándonos; más que amigos, ellos se han convertido en nuestros hermanos.

Queremos agradecer a nuestros tutores, Eric Plaza y Wilfredo Angulo, quienes fueron los responsables de brindarnos su conocimiento y constante apoyo, alentándonos en cada paso hasta finalizar con éxito esta investigación.

Agradecemos al PhD. Eduardo Ludeña, a los Físicos Javier Corregidor y Darío Arroyo quienes forman parte de CIDNA (Centro de Investigación y Desarrollo de Nanotecnología), los mismos que nos recibieron con los brazos abiertos y nos brindaron un espacio en su laboratorio para trabajar libremente en nuestro proyecto.

A la Escuela Superior Politécnica del Litoral, nuestro eterno agradecimiento, por haber abierto sus puertas permitiéndonos formar parte de esta prestigiosa universidad, y más que una universidad, nos acogió para volverse nuestro segundo hogar.

A nuestros queridos profesores por su constante paciencia y enseñanza a lo largo de estos años de vida universitaria, porque gracias a sus consejos hemos conseguido hallar el camino correcto para formarnos como excelentes profesionales, listos y preparados para afrontar todos los retos que se interpongan a lo largo de nuestra vida profesional.

A todos ustedes, muchas gracias.

Diana Águila -- Elías Santacruz

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

Doctor en Ciencias, Mención Física
Eric Vinicio Plaza Pirela

Doctor en Ciencias, Mención Matemáticas
Wilfredo Antonio Angulo Sánchez

M.Sc. Nadia Magaly Flores Manrique

M.Sc. Juan José Izurieta Valdivieso

DECLARACIÓN EXPRESA

“La responsabilidad del contenido desarrollado en la presente propuesta de la materia integradora corresponde exclusivamente al equipo conformado por:

Diana Kathiusca Águila Chávez

Elías Jeffersson Santacruz Yunga

Y el patrimonio intelectual del mismo a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”.

Diana Águila Chávez

Elías Santacruz Yunga

SIGLAS

SPH	Smoothed Particle Hydrodynamic
NS	Navier-Stokes
CFD	Computational Fluid Dynamics
PDE	Partial Differential Equation
ODE	Ordinary Differential Equation
FDM	Finite Difference Method
FVM	Finite Volume Method
FEM	Finite Element Method
CSM	Computational Solid Mechanics
ISPH	Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamic
GPU	Graphics Processing Unit

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
DEDICATORIA	3
AGRADECIMIENTO	IV
TRIBUNAL DE GRADUACIÓN	V
DECLARACIÓN EXPRESA	VI
SIGLAS	VII
TABLA DE CONTENIDO	VIII
ÍNDICE DE FIGURAS	X
ÍNDICE DE TABLAS	XII
INTRODUCCIÓN	13
CAPÍTULO 1	18
1 MARCO TEÓRICO	18
1.1 <i>Importancia de los fluidos</i>	18
1.2 <i>¿Por qué usar la simulación?</i>	21
1.3 <i>Principios de Conservación</i>	23
1.3.1 Ecuación de Navier-Stokes	28
1.4 <i>Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)</i>	29
1.4.1 Métodos numéricos para fluidos	30
1.4.2 ¿Qué es SPH?	33
1.4.2.1 Forma SPH	34
1.4.2.2 Tipos de Kernel	38
1.4.2.3 Ecuaciones discretizadas en fluidos	39
1.5 <i>Aplicación de SPH en tuberías utilizando las ecuaciones de N-S</i>	40
1.5.1 Solución de las ecuaciones de NS en tuberías	40
1.5.2 Fronteras	41
1.5.3 Viscosidad Artificial	41
1.5.4 Flujo de Poiseuille dependiente del tiempo	42
CAPÍTULO 2	45
2 METODOLOGÍA	45

2.1	<i>Desarrollar un código a partir de la técnica SPH que simule el flujo en una tubería.</i>	45
2.2	<i>Plantear un modelo que permita resolver los problemas al evaluar la función kernel en las fronteras para el caso de tuberías.</i>	47
2.3	<i>Comparar y analizar las soluciones analíticas y de fronteras periódicas convencionales con el modelo propuesto.</i>	50
CAPÍTULO 3		52
3	RESULTADOS	52
3.1	<i>Desarrollar un código a partir de la técnica SPH que simule el flujo en una tubería.</i>	52
3.2	<i>Plantear un modelo que permita resolver los problemas al evaluar la función kernel en las fronteras para el caso de tuberías.</i>	57
3.3	<i>Comparación de la solución analítica para un flujo tipo Poiseuille y de fronteras periódicas convencionales con el modelo propuesto.</i>	60
3.3.1	Simulación realizada con un diámetro de 2×10^{-3} [m], 900 partículas y 5 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.	60
3.3.2	Simulación realizada con un diámetro de 2×10^{-3} [m], 2500 partículas y 10 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.	61
3.3.3	Simulación realizada con un diámetro de 1×10^{-3} [m], 900 partículas y 19 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.	64
3.3.4	Simulación realizada con un diámetro de 1×10^{-3} [m], 2500 partículas y 47 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.	65
3.3.5	Simulación realizada con un diámetro de 1×10^{-3} [m], 6400 partículas y 100 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.	66
3.3.6	Simulación realizada con un diámetro de 2×10^{-3} [m], de 6400 partículas con 30 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.	66
CAPÍTULO 4		72
ANÁLISIS DE RESULTADOS		72
CAPÍTULO 5		75
CONCLUSIONES		75
RECOMENDACIONES		76
REFERENCIAS		77
SIMBOLOGÍA		81

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Representación de la deformación de un fluido	19
Figura 1.2 Diagrama esfuerzo cortante-velocidad de deformación	20
Figura 1.3 Ventajas del uso de la simulación en los procesos	22
Figura 1.4 Representación de un sistema genérico de flujo	26
Figura 1.5 Representación de los métodos euleriano y lagrangiano.....	31
Figura 1.6 Método Lagrangiano SPH.....	38
Figura 2.1 Diagrama de flujo del código desarrollado	46
Figura 2.2 Diagrama de flujo del cálculo de viscosidad artificial	48
Figura 2.3 Esquema de medición del campo de velocidades	49
Figura 3.1 Gráficas de los perfiles de velocidad con 900 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.	60
Figura 3.2 Gráficas de los perfiles de velocidad con 2500 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.	61
Figura 3.3 Simulación de (a) 900 partículas y (b) 2500 partículas aplicando el kernel gaussiano y diámetro de 2×10^{-3} m. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.	62
Figura 3.4 Simulación de (a) 900 partículas, (b) 2500 partículas y (c) 6400 partículas aplicando el kernel cuadrático y diámetro de 2×10^{-3} m. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.	63
Figura 3.5 Gráficas de los perfiles de velocidad con 900 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.	64
Figura 3.6 Gráficas de los perfiles de velocidad con 2500 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.	65
Figura 3.7 Gráfica del perfil de velocidad aplicando el kernel cuadrático con 6400 partículas. Resultados analíticos y teóricos para un diámetro de 1×10^{-3} m.	66
Figura 3.8 Gráfica del perfil de velocidad aplicando el kernel cuadrático con 6400 partículas. Resultados analíticos y teóricos para un diámetro de 2×10^{-3} m.	66
Figura 3.9 Simulación de (a) 900 partículas y (b) 2500 partículas aplicando el kernel gaussiano y diámetro de 1×10^{-3} m. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.	67

Figura 3.10 Simulación de (a) 900 partículas, (b) 2500 partículas y (c) 6400 partículas aplicando el kernel cuadrático y diámetro de 1×10^{-3} m. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.....	68
Figura 3.11 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 2×10^{-3} y 900 partículas.....	69
Figura 3.12 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 2×10^{-3} y 2500 partículas.....	70
Figura 3.13 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 1×10^{-3} y 900 partículas.....	70
Figura 3.14 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 1×10^{-3} y 2500 partículas.....	70

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Propiedades de los fluidos	18
Tabla 2. Diferencias entre experimentación y simulación	23
Tabla 3. Balance de energía en fluidos	27
Tabla 4. Diferencias entre el método Euleriano y Lagrangiano.....	31
Tabla 5. Error relativo obtenido con diámetro de la tubería de 2×10^{-3} m.....	69
Tabla 6. Error relativo obtenido con diámetro de la tubería de 1×10^{-3} m.....	69

INTRODUCCIÓN

El estudio de los fluidos es de importancia para la industria en general. Gran parte de los procesos industriales requieren información sobre su dinámica para la predicción de fenómenos y reducción de costos. Los métodos experimentales ayudan a interpretar el comportamiento de los fluidos dentro de un volumen de control determinado, sin embargo, la experimentación trae consigo diversos problemas como el caso de: largos tiempos de espera, experimentación in situ, contar con personal capacitado y la inversión en los equipos dependiendo del proyecto a realizar. Ciertos fluidos tienen un comportamiento complejo, en la mayoría de los casos no lineal, por lo que resulta impráctico abarcar el problema con métodos analíticos, teóricos o experimentales, y se hace necesario recurrir a las simulaciones numéricas.

Desde la década del 50, las simulaciones se han convertido a nivel mundial en una opción viable para proyectar cualquier tipo de problema o proceso sin llevarlo a cabo en la práctica (Sokolowski & Banks, 2009). Esto no significa que se deja de lado la experimentación, debido a que la simulación desde un punto de vista sistemático sirve como un medio de predicción de la dinámica de los fluidos en diferentes situaciones, seleccionando el método óptimo para la experimentación.

A finales del siglo XIX Claude-Louis Navier y George Stokes formularon la teoría sobre la fricción interna de los fluidos en movimiento y derivaron las ecuaciones de Navier-Stokes (NS); la cual es un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales (por sus siglas en inglés PDE) no lineales para fluidos incompresibles y débilmente compresibles (Orrego, 2009). Hasta el día de hoy, no existen soluciones analíticas a la ecuación de NS, pese al gran interés en el ámbito académico e industrial, debido a la gran cantidad de problemas físicos que esta representa.

Para llevar a cabo el modelamiento de la dinámica de los fluidos en tuberías, típicamente se requiere de la resolución de las ecuaciones de NS con condiciones de frontera no estándares. Por esta razón, se recurre al análisis numérico, convirtiendo las ecuaciones a un algoritmo en la computadora que encuentre

soluciones aproximadas. Actualmente, la industria ofrece *softwares* muy útiles, por ejemplo: Flow-3D, Fluidos CFD, AcuSolve, Blender 3D, Fluent, Solidworks, entre otros, los cuales utilizan diferentes métodos para realizar simulaciones del flujo de un fluido, permitiendo: evaluar su comportamiento en función del tiempo, obtener perfiles de velocidad y temperatura, optimizar los procesos y determinar opciones de cambio. Las simulaciones realizadas en estos *softwares* varían en complejidad, dependiendo del tipo de calidad que se requiera en las animaciones ya que la carga computacional es alta y consumen mucho tiempo para efectos visuales.

En la industria, la demanda de los *softwares* computacionales crece de manera exponencial al avance de la tecnología. Por ejemplo, en el caso de la industria química son utilizados para el entendimiento de los procesos de transporte de fluido, los cuales se fundamentan en el uso de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, las mismas que describen la física de los fluidos. Sin embargo, aún existen problemas abiertos, como el caso de la superficie libre, fluidos multifásicos multicomponente, que con los esquemas actuales no pueden ser abordados.

SPH es un método que utiliza partículas para el modelamiento de la dinámica del fluido. Se lo desarrolló a finales de los años setenta para la simulación de problemas en astrofísica (Gingold & Monaghan, 1977) (Lucy, 1977). El método integra la ecuación de movimiento de fluido para cada partícula del fluido, donde estas partículas son el dominio sobre el cual se resuelven las ecuaciones. Las cantidades físicas son calculadas como una aproximación, regida por la función kernel, la cual depende de las partículas más cercanas y de una distancia de suavizado denominada "h". El kernel es una función de suavizado que interpola la distancia entre las partículas para representar las cantidades físicas en el fluido por medio de la discretización de las soluciones de las ecuaciones de NS.

El caso de las tuberías es de especial interés, puesto que muchos procesos industriales están asociados al transporte de los fluidos a través de éstas. Simular una tubería de grandes dimensiones puede ser impráctico y con frecuencia se propone utilizar un sistema de fronteras periódicas. En el trabajo de (Alvarado-

Rodríguez, Klapp, Sigalotti, Domínguez, & Cruz Sánchez, 2017), se propone utilizar un método en el que existe una región externa al dominio computacional denominada reservorio, la cual garantiza la conservación total de masa y que el número total de partículas se conserve; también, minimiza la reflexión de las perturbaciones desde la salida hacia el dominio del fluido, para esto al vector de velocidad de las partículas en la zona de flujo de salida se le introduce la solución de una ecuación de propagación de onda anisotrópica siguiendo el procedimiento descrito por (Jin & Braza, 1993).

En SPH, las fronteras requieren un tratamiento diferente, puesto que al evaluar la función de kernel en un espacio cercano al borde, una parte del área de interacción queda fuera del dominio de la simulación y al no existir partículas se introduce un error a la solución (Liu & Liu, 2003).

Como objetivo general se propuso la simulación de la dinámica de un líquido newtoniano en una tubería a través del método SPH con fronteras periódicas añadiendo a la solución estacionaria el término dependiente del tiempo de un flujo de Poiseuille.

Esto se llevó a cabo mediante la implementación de los siguientes objetivos específicos:

- 1) Desarrollar un código a partir de la técnica SPH que simule el flujo en una tubería.
- 2) Plantear un modelo que permita resolver los problemas al evaluar la función kernel en las fronteras para el caso de tuberías.
- 3) Comparar y analizar las soluciones analíticas y de fronteras periódicas convencionales del modelo propuesto.

Para llevar a cabo el proyecto se formuló la siguiente hipótesis: El problema ocasionado por las condiciones de fronteras en la simulación de un líquido newtoniano a través de una tubería utilizando el método SPH, se puede resolver aplicando un sistema de fronteras periódicas. Para lo cual es necesario determinar la influencia del kernel, la escala de la simulación y el número de partículas que permitan establecer un rango para la convergencia de la simulación.

El tratamiento numérico de estas condiciones se llevó a cabo proporcionando a las partículas de SPH una posición y una velocidad que permitió reinsertarlas al dominio inmediatamente después que salieran del mismo, obteniendo un algoritmo con SPH que permitió medir el error numérico al introducir este tipo de condiciones de borde. Los resultados muestran que la utilización de fronteras periódicas con un diámetro de $1e-3$ se introduce un error relativo a la solución analítica de 5.9% para un kernel cuadrático con 6400 partículas simuladas y 14.26% para un kernel gaussiano con 2500 partículas.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 1

1 MARCO TEÓRICO

1.1 Importancia de los fluidos

La mecánica de fluidos es la ciencia que estudia el comportamiento estático y dinámico del fluido (White, 2003). Por definición: “Un fluido ya sea líquido o gas es un medio continuo en el cual un pequeño elemento de volumen contiene muchas moléculas que se desplazan libremente; las mismas que le dan las propiedades al fluido”. Las propiedades más importantes para el análisis de los fluidos son las propiedades cinemáticas, en especial la velocidad ya que en la mayoría de los casos determinarla resuelve el problema debido a que a partir de la misma se puede hallar el resto de propiedades (White, 2003).

En la tabla 1.1, se muestra la clasificación de las propiedades de los fluidos; donde las propiedades cinéticas son aquellas que describen la trayectoria del fluido en función del tiempo mientras que las termodinámicas se caracterizan por llevar al fluido al estado de equilibrio, es decir, fijan el estado termodinámico de un sistema, dentro de este último grupo encontramos las propiedades de transporte las mismas que se calculan en función de las propiedades termodinámicas y no dependen de una fuerza impulsora.

Tabla 1. Propiedades de los fluidos

Propiedades Cinemáticas	Propiedades Termodinámicas	Propiedades Termodinámicas de Transporte
Velocidad (v) Desplazamiento (r) Aceleración (a) Caudal (Q)	Presión (P) Densidad (ρ) Temperatura (T) Energía interna (e) Entalpía (h) Entropía (s) Calor específico (c)	Coficiente de viscosidad (μ) Conductividad Térmica (k)

La principal característica de un fluido es que cuando se le aplica un esfuerzo cortante por muy pequeño que este sea, tiende a no poner resistencia ocasionando una deformación continua a lo largo de su trayectoria (Shames, 1995), tal como se observa en la figura 1.1, donde se aprecia el desplazamiento de un fluido entre dos placas paralelas una fija y otra móvil. A la placa móvil se aplica una fuerza constante F lo que origina un esfuerzo tangencial en el fluido con una velocidad u , causando una deformación con ángulo α que aumenta en función del movimiento de la placa. A es la posición inicial en la placa fija la cual se mantiene constante y B es la posición inicial en la placa móvil la cual va variando en función del tiempo.

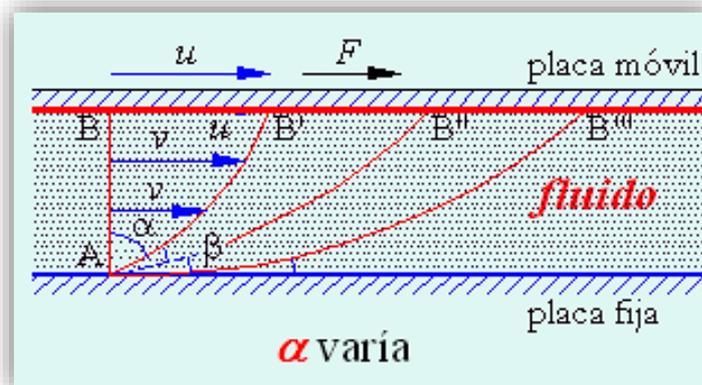


Figura 1.1 Representación de la deformación de un fluido

Fuente: Turmero, 2015

Generalmente, los fluidos por efecto de la viscosidad se clasifican en: viscoelásticos, newtonianos, no newtonianos. Los fluidos viscoelásticos son aquellos que poseen propiedades elásticas como viscosas al mismo tiempo, por ejemplo: los helados, la gelatina, masilla siliconada, etc. Los fluidos newtonianos son aquellos donde la viscosidad se considera constante, es decir no varía con el tiempo. Como ejemplo de este tipo de fluidos en condiciones normales tenemos: agua, aire, gasolina, alcohol y muchos más.

Los no newtonianos son aquellos que varían su comportamiento en el tiempo y su viscosidad no es constante, se los puede clasificar en dos

grupos: dependientes del tiempo y no dependientes del tiempo. (Gratton, 2002)

Los dependientes pueden ser considerados:

- ✓ Tixotrópicos (tinta de impresora, yogurt, nylon)
- ✓ Reopéctico (pastas de yeso, arcilla bentonítica)

Los no dependientes del tiempo son considerados como:

- ✓ Plástico (salsa de tomate, sangre, chocolate cocido)
- ✓ Plástico ideal de Bingham (grasas de cocina, pasta de dientes, pomadas)
- ✓ Dilatante (arenas movedizas, arena de playa, almidón en agua)
- ✓ Pseudoplástico (fluidos biológicos, adhesivos, mayonesa)

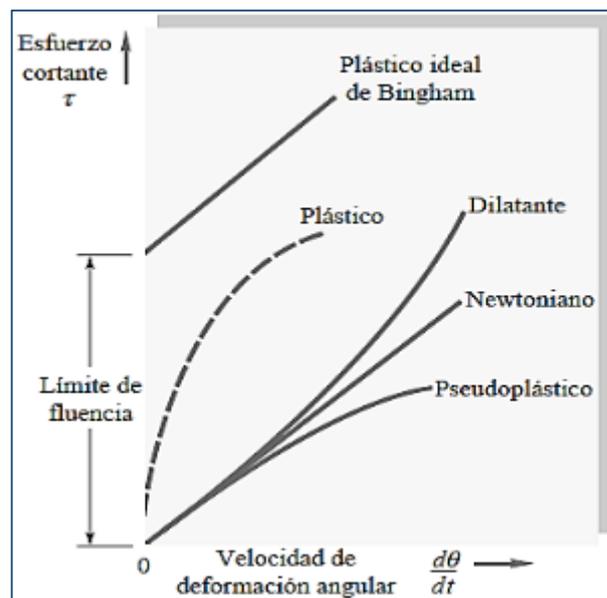


Figura 1.2 Diagrama esfuerzo cortante-velocidad de deformación

Fuente: (White, 2003)

Observando la figura 1.2, concluimos que la clasificación de los fluidos se da mediante la relación que existe entre el esfuerzo cortante τ y su velocidad de deformación angular $\frac{d\theta}{dt}$. Además, se dice que un fluido es newtoniano si el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la velocidad de deformación angular mientras que en los no newtonianos no se da esta proporcionalidad. Un fluido es considerado plástico de Bingham si éste no fluye con facilidad mientras que no se le aplique una

fuerza de empuje, esto ocurre debido a que estos tipos fluidos se encuentran sobre el límite de fluencia.

En resumen, para estudiar un fluido en movimiento se conoce el tipo de fluido para el análisis, luego establecer o definir la región que ocupara en el espacio, más conocida como volumen de control. Por último, se definen las propiedades termodinámicas, energéticas y dinámicas debido a que esta región estará limitada por una superficie de control en donde se realizarán procesos de intercambio de masa y energía con el entorno.

El estudio de los fluidos es muy importante debido a que como es un amplio campo de investigación, en él se puede explorar e implementar nuevas herramientas que faciliten su estudio. En el ámbito académico ayuda a comprender las ecuaciones que rigen los fenómenos de transporte de momento para poder predecir cuál será el comportamiento de un fluido al estar expuesto a cualquier situación y en el ámbito industrial ayuda a evaluar y elegir los equipos adecuados según el tipo de fluido y el comportamiento de este en su interior. Naturalmente, los flujos de fluidos se pueden encontrar en la mayoría de las actividades cotidianas, por ejemplo: fenómenos meteorológicos, combustiones, riesgos ambientales, calefacción, ventilación, flujos complejos en horno, y muchos más.

Gracias al avance tecnológico se puede visualizar de mejor manera el transporte de los fluidos, como varían sus propiedades de acuerdo a factores externos y las fuerzas que interactúan en su interior. Este proyecto se enfoca únicamente en un tipo de fluido que son los fluidos newtonianos.

1.2 ¿Por qué usar la simulación?

En esta sección se detallarán las ventajas más importantes que ofrece la implementación de la simulación frente a otras herramientas usadas

al momento de analizar un proceso y de este modo poder justificar el uso de la simulación computacional en el desarrollo de nuestro proyecto.

Por ejemplo, una vez que se tiene la idea clara de lo que se quiere implementar u optimizar en el proceso y los conceptos que fundamentan esa implementación se tienen dos alternativas, tal como se observa en la figura 1.3. Con la primera alternativa, para saber si un conjunto de datos está correcto se necesita de la creación de un prototipo para realizar la experimentación en un laboratorio, sin embargo, en algunas ocasiones esto no resulta muy favorable debido al sin número de experimentos que se deben realizar para llegar al óptimo. Además, al ponerlo en funcionamiento en la planta en algunos casos el proceso no se da de la misma manera, llegando a obtener gastos por la creación de un prototipo y recursos para la experimentación. Mientras que, con la segunda alternativa, se puede desarrollar una simulación computacional la cual nos proporcionará resultados en función de los datos que se le otorguen y de esta forma saber con anticipación que conjunto de datos o variables nos dan resultados óptimos para luego llevar a cabo la creación de un prototipo el cual será validado en el laboratorio.

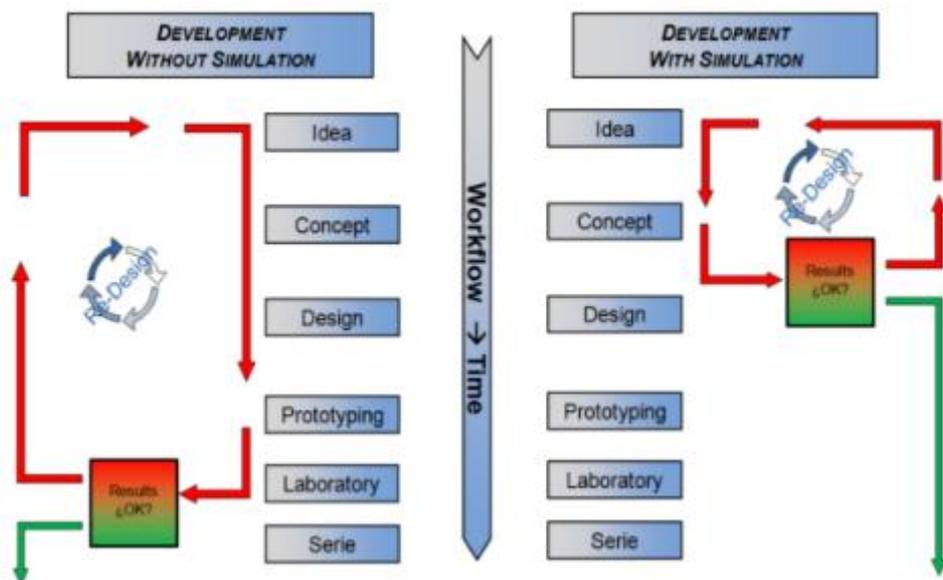


Figura 1.3 Ventajas del uso de la simulación en los procesos

Fuente: (López Tapia, 2015)

Por lo que, implementando la simulación a los procesos podemos obtener resultados favorables para prácticamente cualquier problema en menos tiempo sin la necesidad de llevarlos a cabo en físico. De modo que, esto incentivó a que cada vez más investigadores desarrollen nuevas formas de facilitar el uso de simuladores, con el objetivo de obtener distintos escenarios de un mismo proceso para así elegir el más adecuado y conveniente, reduciendo los problemas de tiempo y dinero. A continuación, en la tabla 1.2 se establece de forma más detallada las diferencias más comunes entre simulación y experimentación.

Tabla 2. Diferencias entre experimentación y simulación

EXPERIMENTACIÓN	SIMULACIÓN
Para una sola cantidad	Para todas las cantidades deseadas
Un número limitado de puntos o instantes de tiempo	Con una buena resolución en espacio y tiempo
Para un rango limitado de problemas	Para prácticamente cualquier problema
Para un modelo a escala de laboratorio	Para el dominio de flujo real
Son costosos, lentos, secuenciales	Más barata, rápida, en paralelo
Los equipos y el personal se desenvuelven en un solo lugar	Los softwares son portables
Su éxito depende de la persona encargada de la experimentación	Su éxito depende del método numérico a implementar

Con el transcurso de los años, el uso de la simulación ha aumentado significativamente lo que implica que más problemas complejos se resuelvan mediante un *software* de una manera más confiable, a pesar de la inmensa carga computacional que algunos ocasionan esto ya no es un problema debido a que con el paso del tiempo se implementan nuevos métodos para disminuir esta carga y así lograr simulaciones más eficientes. (Shadloo, Oger, & Le Touzé, 2016)

1.3 Principios de Conservación

Matemáticamente existen dos tipos de enfoques o puntos de vista para describir el movimiento de un fluido. El enfoque Lagrangiano, debido al

matemático francés J. L. Lagrange (1736-1813) (Riaño, 2014), se basa en estudiar el movimiento del fluido desde la perspectiva de las partículas a través del tiempo. Teniendo en cuenta, que a medida que aumente el número de partículas, aumentará la complejidad de análisis. Mientras que el enfoque Euleriano, debido al matemático suizo L. Euler (1707-1783) (Riaño, 2014), se basa en cómo se comporta el fluido en un volumen de control a través del tiempo.

Por ejemplo, si un observador quiere estudiar el comportamiento de un río mediante el enfoque Euleriano, el observador debe sentarse en la orilla del río y evaluar sus propiedades en función del tiempo, en un espacio determinado. Por el contrario, si lo hace del enfoque Lagrangiano, debe entrar en un bote y evaluar sus propiedades en función del tiempo y espacio.

Todo fluido se rige bajo los principios de conservación los mismos que modelan el comportamiento de cualquier tipo de fluido mediante las tres leyes físicas de conservación:

1) Conservación de masa (ecuación de la continuidad)

Este principio reza que la materia no se crea ni se destruye solo se transforma, es decir, que a lo largo de todo el fluido no puede existir variación de masa ya sea por creación o destrucción de esta. Para un volumen infinitesimal Lagrangiano denotado por δV , la masa contenida será igual a

$$\delta m = \rho \delta V \quad (1.1)$$

Donde ρ es la densidad del fluido, como la masa en ese volumen de control se conserva, la variación de la masa con respecto al tiempo es cero, por lo tanto, tendremos

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = \frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = \delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = 0 \quad (1.2)$$

La ecuación (2) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{1}{\delta V} \frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = 0 \quad (1.3)$$

Considerando que el segundo término de la ecuación es igual a la divergencia de la velocidad multiplicado por la densidad, obteniendo así la ecuación de la conservación de masa en forma Lagrangiana (Liu & Liu, 2003)

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot v \quad (1.4)$$

2) Conservación de cantidad de momento

La segunda ley de Newton enuncia que la aceleración por unidad de tiempo de la masa de un cuerpo es igual a una fuerza resultante de la sumatoria de todas las fuerzas que interactúan con dicho cuerpo. Este enunciado se lo representa mediante la ecuación vectorial:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1.5)$$

Reescribiendo la ecuación (1.5) de una forma más general, se obtiene:

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) se transforma en la ecuación (1.5) solo cuando la masa del cuerpo es constante. Al analizar un sistema en el que la masa varíe en función del tiempo se debe ajustar dicha ecuación con una magnitud física llamada cantidad de movimiento denominada p , la cual está definida como:

$$p = m\vec{v} \quad (1.7)$$

Por lo tanto, la \vec{F}_{neta} se la puede expresar como la variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo.

$$\vec{F}_{neta} = \frac{dp}{dt} \quad (1.8)$$

En un sistema cerrado donde no existe interacción con el medio exterior, es decir, la sumatoria de fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a cero se tiene el principio de conservación de momento el

cual afirma que la cantidad de movimiento debe ser constante en función del tiempo.

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad (1.9)$$

3) Conservación de energía

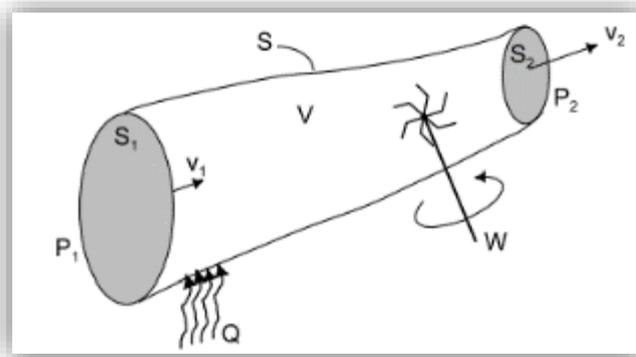


Figura 1.4 Representación de un sistema genérico de flujo

Fuente: (Friedrich & Álvarez, 2016)

Considerando un sistema estacionario, mediante la figura 1.4 se obtiene la ecuación general de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) + (U_2 - U_1) + \frac{1}{\rho}(P_2 - P_1) = Q + W \quad (1.10)$$

Donde la suma de los términos de variación de energía es igual a la energía intercambiada con el entorno. También se la puede expresar de forma resumida como:

$$\Delta E_C + \Delta E_P + \Delta U + \frac{\Delta P}{\rho} = Q + W \quad \left[\frac{J}{Kg} \right] \quad (1.11)$$

A la ecuación (1.11) se le realizan diferentes supuestos de acuerdo con el sistema que se quiera analizar tal como se detalla en la tabla 1.3, obteniendo así nuevas ecuaciones que puedan ser usadas para resolver problemas específicos de la mecánica de fluidos evitando la realización de cálculos innecesarios.

Tabla 3. Balance de energía en fluidos

Aproximaciones Mecánicas ($\Delta U = 0$) ($Q = 0$)		
Ecuación de Bernoulli generalizada		
$\sum F = \Delta U - Q$		$\Delta E_C + \Delta E_P + \frac{\Delta P}{\rho} + \sum F = W$
Ecuación de Bernoulli simplificada		
$W = 0$	$\sum F = 0$	$\Delta E_C + \Delta E_P + \frac{\Delta P}{\rho} = 0$
Ecuación fundamental de la hidrostática		
$W = 0$	$\Delta E_C = 0$	$\Delta E_P + \frac{\Delta P}{\rho} = 0$
Aproximaciones Térmicas ($E_C = 0$) ($E_P = 0$) ($W = 0$)		
Balance de energía térmica		
$\Delta U + \frac{\Delta P}{\rho} = Q$		
Primer principio de la termodinámica		
$\frac{\Delta P}{\rho} = -W$		$\Delta U = Q + W$
Balance de entalpía		
$H = U + \frac{P}{\rho}$		$\Delta H = Q$
Adiabático ($Q=0$)		$\Delta H = 0$

Fuente:(Friedrich & Álvarez, 2016)

La segunda ley de la termodinámica enuncia que la entropía del universo siempre aumenta, se lo representa por la ecuación:

$$\Delta S_{total} = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{medio exterior} \geq 0 \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) es aplicable para sistemas cerrados o abiertos. La variación de entropía del sistema puede expresarse como la variación de calor (ganada o perdida) entre la temperatura del sistema, expresada como:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (1.13)$$

Despejando la variación de calor, tenemos:

$$\Delta Q = T\Delta S \quad (1.14)$$

Reemplazando la ecuación (1.14) en la ecuación del primer principio de la termodinámica obtenemos:

$$\Delta U = T\Delta S + W \quad (1.15)$$

Supongamos que se tiene un cilindro donde el trabajo W es igual a la fuerza por desplazamiento, al aplicarle una presión al fluido contenido en el cilindro y además presión es igual a la fuerza sobre el área transversal nos queda que:

$$W = PAdx$$

$$dV = Adx$$

Por lo tanto, el trabajo será igual a la presión por la variación de volumen:

$$W = PdV \quad (1.16)$$

Entonces reemplazando la ecuación (1.16) en la ecuación (1.15):

$$T\Delta S = \Delta U + PdV \quad (1.17)$$

$$TdS = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (1.18)$$

Como el sistema es isotérmico entonces $TdS = 0$. Obteniendo así, la ecuación de la conservación de energía en su forma Lagrangiana.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = -\frac{P}{\rho^2} \nabla \vec{v} \quad (1.19)$$

1.3.1 Ecuación de Navier-Stokes

Las ecuaciones de NS modelan el comportamiento de cualquier fluido, basándose en la conservación de tres cantidades: masa, cantidad de momento y energía. Estas ecuaciones están conformadas por PDE no lineales, por lo que a excepción de casos muy simples resulta difícil obtener soluciones analíticas conocidas. Considerando un fluido cuya densidad es ρ y viscosidad η , al cual se le aplica un gradiente de presión constante lo que induce su movimiento, la ecuación de NS está dada por:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \eta \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} \quad (1.20)$$

Generalmente las ecuaciones de NS se resuelven mediante dos métodos: estadístico y analítico. En el método estadístico se puede utilizar la ecuación de Boltzman, Lattice Gas/ Lattice Boltzman, Matrices de mapeo reticular. Mientras que en el analítico se puede aplicar diferencias-elementos finitos, dinámicas moleculares y SPH.

Conforme pasan los años, la necesidad de una resolución numérica de estas ecuaciones resulta evidente, por lo que muchos investigadores han realizado grandes esfuerzos y lo seguirán haciendo a medida que la tecnología de las computadoras evolucione, con el fin de mejorar la precisión de las soluciones obtenidas actualmente. Debido a que la simulación de fluidos ha ido evolucionando con el tiempo cada vez se la utiliza con más frecuencia por lo que hoy en día simular sistemas complejos que requieran solución por medio de una formulación de NS resulta natural. (Costarelli, 2011)

1.4 Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)

CFD es una herramienta que reemplaza las PDE's a ecuaciones algebraicas, consiste en la discretización de un dominio de flujo continuo y de las ecuaciones de conservación, es decir, son experimentos numéricos usados con el fin de obtener datos importantes como es el caso del campo de velocidades, flujos de calor, flujos de masa, reacciones químicas involucradas en el proceso, etc. Para la aplicación de CFD se debe primero discretizar el dominio de flujo continuo, el cual se puede realizar con diferentes métodos entre los más importantes tenemos: método de diferencias finitas (FDM), método de volúmenes finitos (FVM) y el método de elementos finitos (FEM).

FDM es el primer método utilizado para obtener solución numérica de las ecuaciones diferenciales de NS. Este método trabaja en

coordenadas cartesianas y requiere una malla estructurada lo cual es una desventaja debido a que requiere de más trabajo implementarlo. Además, solo se aplica en geometrías sencillas por esta razón es un método raramente empleado en aplicaciones industriales.

FVM se basa en la discretización directa de las ecuaciones de conservación en su forma integral, es decir, no es necesario el cambio de coordenadas. Es un método muy práctico y no solo trabaja en mallas estructuradas, sino que también puede utilizar mallas no estructuradas por lo que se puede utilizar geometría compleja. Actualmente este es el método más implementado en la industria.

FEM es un método generalizado para resolver las ecuaciones de NS y Euler, consiste en dividir el dominio en elementos triangulares para 2D y tetraédricos para 3D produciendo una malla no estructurada empleadas para formular problemas con geometría compleja y para el caso de fluidos no newtonianos. La desventaja de este método es la carga computacional que ejerce este tipo de mallado. (Sánchez, 2004)

En el mercado existen diferentes softwares que utilizan estos métodos numéricos para resolver cualquier problema en el ámbito académico e industrial, por ejemplo: ANSYSFluent, PHOENICS, STAR-CCM+, ADINA-CFD, ABAQUS, etc. Otra opción es el uso de softwares libres como el caso de: FEniCS, FreeFEM++, OpenFOAM, FREECFD, OpenFVM, ELMER y muchos más. Si no se requiere del uso de estos softwares se pueden desarrollar códigos propios o realizar mejoras a códigos ya desarrollados tal como se realiza en algunos centros de investigación y universidades.

1.4.1 Métodos numéricos para fluidos

Los métodos para describir el comportamiento de un fluido basados en las ecuaciones de NS son tres: Euleriano, Lagrangiano y Euleriano-Lagrangiano. En el euleriano las propiedades de fase se

evalúan de una celda a otra, empleando un sistema de coordenadas fijo obteniendo así un estudio de las interacciones entre las celdas. El Lagrangiano emplea un sistema de coordenadas móvil, en donde los elementos se representan en forma de partículas, estudiando las interacciones de la partícula de interés con respecto a las que se encuentran en el dominio de influencia, véase en la figura 1.5 Mientras que el mixto contiene conceptos Eulerianos y Lagrangianos.

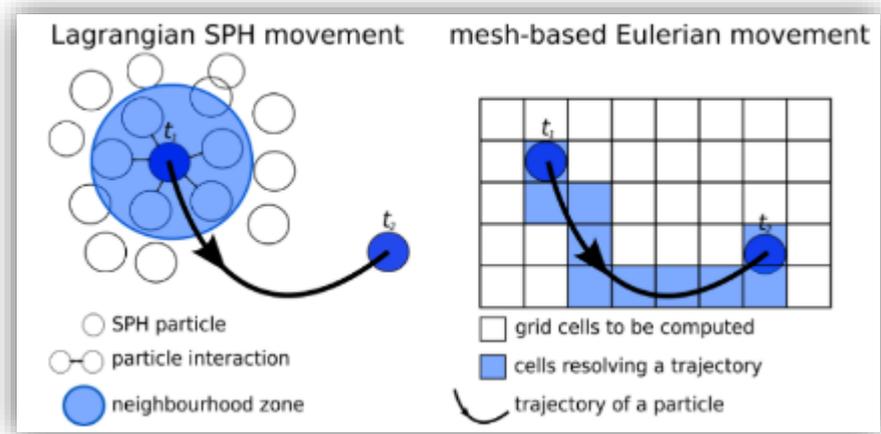


Figura 1.5 Representación de los métodos euleriano y lagrangiano

Fuente: Meister M. & Winkler D., 2016

Para representar el método Lagrangiano generalmente se utiliza FEM, mientras que para el Euleriano se utiliza FVM. Las diferencias generales entre los dos métodos se mostrarán en la siguiente tabla:

Tabla 4. Diferencias entre el método Euleriano y Lagrangiano

	Método Lagrangiano	Método Euleriano
Volumen de control	Unido al material en movimiento	Fija en el espacio
Trayectoria	La trayectoria del flujo es conocida en cualquier punto del volumen de control	Flujo de masa, momento y energía a través de los nodos de la cuadrícula y el límite de la celda de malla
Historial del tiempo	Fácil de obtener los datos de un punto del material en función del tiempo	Difícil de obtener los datos de un punto del material en función del tiempo
Límite móvil e interfaz	Fácil de seguir	Difícil de seguir la trayectoria
Geometría irregular	Fácil modelo	Modelo difícil con buena precisión

Grandes deformaciones	Difícil de manejar	Fácil de manejar
-----------------------	--------------------	------------------

Fuente: (Crespo, 2008)

En la tabla 1.4, se especifican las diferencias, así como también las facilidades que ofrecen estos métodos con respecto a características definidas en donde podemos constatar que el método Lagrangiano posee mayor ventaja al momento de requerir datos en función del tiempo y también al simular superficies irregulares debido a que no es necesario el uso de mallas. En cambio, el método Euleriano a pesar de que no es bueno simulando superficies irregulares y calculando datos puntuales ofrece ventajas para manejar grandes deformaciones debido a que la malla no se altera con el paso del tiempo evitando así problemas de precisión. (Crespo, 2008)

En la mayoría de los casos, se recomienda el uso de SPH libre de malla basado en el método Lagrangiano para modelar problemas hidrodinámicos complejos como es el caso de los fluidos multifásicos o interfaciales debido a que es considerado como un modelo ideal para este tipo de problemas por las ventajas que posee al utilizar partículas que interpolan las propiedades físicas del fluido en cualquier punto del volumen de control, como es el caso de la densidad. Este método también se lo puede utilizar en problemas de mecánica de sólidos computacional (CSM) y en problemas de astrofísica. Por otro lado, también podemos encontrar el CFD con mallas basado en el método Euleriano que utiliza mallas para la resolución de problemas, usualmente es empleado en casi todo tipo de problemas por su amplia variedad en el mercado, por ejemplo: el estudio de explosiones y los impactos de alta velocidad, ondas de choque, combustión, entre otros.

Aunque en la actualidad el CFD con mallas es el método más utilizado a nivel académico e industrial por la facilidad de manejo y las visualizaciones que ofrece, el SPH libre de malla ha tenido grandes

avances y se mantiene a flote porque al ser un método nuevo y poco explorado se tiene un campo totalmente libre para que se realicen investigaciones y modificaciones, con el fin de aumentar su implementación en la industria.

1.4.2 ¿Qué es SPH?

SPH es una técnica de simulación lagrangiana libre de malla relativamente nuevo el cual ha acaparado la atención de muchos investigadores ya que presenta ventajas para el modelado de problemas hidrodinámicos complejos, en donde, el fluido está representado por pseudo-partículas que interaccionan entre ellas, moviéndose con el flujo y transportando en su movimiento toda la información computacional relacionada con el fluido. Desarrollada en los años setenta para resolver problemas de astrofísica como: formación de galaxias, colisiones de estrellas, formación de agujeros negros, fragmentación de nubes, entre otros (Gingold & Monaghan, 1977). Este método transforma las PDE en ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), basándose en la discretización Lagrangiana de las ecuaciones de NS con la implementación de una función peso.

Aplicaciones/Investigaciones empleando SPH

Astrofísica

- ❖ Modelando el Universo (Monaghan, 1990)
- ❖ Colisiones de asteroides (Maindl et al., 2013)
- ❖ Cálculos de interacciones estelares (Rasio & Lombardi, 1999)
- ❖ Colisiones entre objetos sólidos y autogravitantes (Schäfer et al., 2016)

Mecánica de sólidos

- ❖ Modelado de forjado de metal usando SPH (Cleary et al., 2012)
- ❖ Deformación por compresión de muestras sólidas (Pereira et al., 2017)
- ❖ Simulación de sólidos quebradizos (Benz & Asphaug, 1995)
- ❖ Simulación de fluidos y sólidos rígidos (Limache & Rojas, 2012)

Dinámica de fluidos

- ❖ Simulación de superficies libres (Monaghan, 1994)
- ❖ Aplicación en fluido-estructura (Zhang, Sun, Ming, & Colagrossi, 2017)
- ❖ Inundaciones de agua a una estructura (Guo, Sun, Cao, & Huang, 2017)
- ❖ Modelo modificado para ondas de agua de superficie (Niu & Yu, 2015)

SPH incompresible

- ❖ Mecánica de olas solitarias cerca de la costa (Lo & Shao, 2002)
- ❖ Fronteras abiertas para ISPH (Hirschler et al., 2016)
- ❖ Precisión y estabilidad en ISPH (Xu, Stansby, & Laurence, 2009)
- ❖ Fenómenos capilares dinámicos (Nair & Pöschel, 2018)

SPH multifásicos

- ❖ SPH multifásico simulado en GPU (Mokos, Rogers, Stansby, & Domínguez, 2015)
- ❖ Interfaces complejas y grandes diferencias de densidad (Chen et al., 2015)
- ❖ Flujos cargados de sedimentos (Shi, Yu, & Dalrymple, 2017)
- ❖ Modelado de derrame de petróleo (Violeau, Buvat, Abed-Meraim, & de Nanteuil, 2007)

1.4.2.1 Forma SPH

El método SPH se fundamenta en la teoría de interpolación, donde las leyes de conservación que se encuentran en PDE, son transformadas en ecuaciones integrales para lo cual se utiliza una función de interpolación *kernel* que da la variación del campo alrededor de un punto. Computacionalmente las integrales son evaluadas a través de una sumatoria para todas las partículas vecinas dentro del radio h .

Se llamará $A(\vec{r})$ a cualquier campo variable, el cual se expresa usando la siguiente integral:

$$A(\vec{r}) = \int A(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (1.20)$$

Para encontrar una solución aproximada, se propone una función de interpolación o de suavizado llamado kernel (W), con un dominio de influencia de radio h .

$$\int W(\vec{x}, h) d\vec{x} = 1 \quad (1.21)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{x}, h) = \delta(\vec{x}) \quad (1.22)$$

Por lo tanto, la ecuación (1.20) se puede aproximar usando la función de suavizado.

$$\langle A(\vec{r}) \rangle = \int A(\vec{r}') W(|\vec{r} - \vec{r}'|, h) d\vec{r}' \quad (1.23)$$

Entonces cuando $h \rightarrow 0$, $\langle A(\vec{r}) \rangle \rightarrow A(\vec{r})$. Para un fluido con densidad $\rho(\vec{r})$, se divide y se multiplica $\rho(\vec{r})$ en la ecuación (1.23)

$$\langle A(\vec{r}) \rangle = \int \frac{A(\vec{r}')}{\rho(\vec{r}')} W(|\vec{r} - \vec{r}'|, h) \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (1.24)$$

Como se mencionó anteriormente, la integral se discretiza en una sumatoria, por lo tanto, se divide el espacio en N pequeños volúmenes de control de masa m , para el volumen de control k y el centro de masa \vec{r}_k se tiene:

$$\frac{A(\vec{r}_k)}{\rho(\vec{r}_k)} W(|\vec{r} - \vec{r}_k|, h) \rho(\vec{r}_k) d\vec{r}_k \quad (1.25)$$

Donde, $m_k = \rho(\vec{r}_k) d\vec{r}_k$ y $d\vec{r}_k$ es un diferencial de volumen ya que r está en función de x, y, z ; entonces:

$$\frac{A(\vec{r}_k)}{\rho(\vec{r}_k)} W(|\vec{r} - \vec{r}_k|, h) m_k \quad (1.26)$$

Así que la aproximación de $\langle A(\vec{r}) \rangle$ es:

$$\langle A(\vec{r}) \rangle = \sum_{k=1}^N m_k \frac{A(\vec{r}_k)}{\rho(\vec{r}_k)} W(|\vec{r} - \vec{r}_k|, h) \quad (1.27)$$

Análogamente se obtiene ∇A (el gradiente de A) como una aproximación mediante las sumatorias

$$\langle \nabla A(\vec{r}) \rangle_i = \nabla_i A_i = \sum_{k=1}^N m_k \frac{A(\vec{r}_k)}{\rho(\vec{r}_k)} \nabla_i W_{ik} \quad (1.28)$$

Suponiendo que la propiedad intensiva a analizar es la densidad $\rho(\vec{r})$ entonces $A(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \rho(\vec{r}) \rangle &= \sum_{k=1}^N m_k \frac{\rho(\vec{r}_k)}{\rho(\vec{r}_k)} W(|\vec{r} - \vec{r}_k|, h) \\ \langle \rho(\vec{r}) \rangle_a &= \sum_{k=1}^N m_k W(|\vec{r}_a - \vec{r}_k|, h) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Si la ecuación (1.29) es usada para fluidos como el agua, donde la densidad es discontinua, se debe aproximar la tasa de cambio de la densidad; a todas las partículas se les asigna el mismo valor inicial de densidad el cual solo cambiará cuando las partículas tengan movimiento relativo, entonces la ecuación de continuidad es:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \rho) \quad (1.30)$$

Usando la teoría de interpolación de SPH de la ecuación (1.28), la tasa de cambio de la densidad para la partícula a es:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = - \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \rho_b \vec{v}_b \cdot \nabla_a W_{ab} + \vec{v}_a \cdot \sum_{b=1}^N m_b \nabla_a W_{ab}$$

Donde, $W_{ab} = W(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|, h)$ entonces:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_{b=1}^N m_b (\vec{v}_a - \vec{v}_b) \cdot \nabla_a W(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|, h) \quad (1.31)$$

Utilizando la ecuación (1.30) y (1.31) podemos calcular $(\nabla \cdot \vec{v})$

$$-\rho_a(\nabla \cdot \vec{v})_a = \sum_{b=1}^N m_b (\vec{v}_a - \vec{v}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}$$

$$(\nabla \cdot \vec{v})_a = \frac{1}{\rho_a} \sum_{b=1}^N m_b (\vec{v}_a - \vec{v}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}$$

El gradiente del tiempo de velocidad para la partícula a se obtiene utilizando la igualdad de la ecuación (1.30)

$$\rho \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \rho)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \rho)]$$

Tomando un fluido barotrópico no viscoso para lo cual la presión solo está en función de la densidad, la ecuación de movimiento sin la aplicación de fuerzas externas toma la siguiente forma

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{v}) = -\rho \frac{\partial v^k}{\partial x^k}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1.32)$$

Para aproximar la variación de la velocidad con respecto al tiempo (aceleración) para la partícula a se debe tener en cuenta:

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla P + P \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \quad (1.33)$$

Utilizando la teoría de interpolación de SPH se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right)_a = \sum_{b=1}^N \frac{m_b}{\rho_b} \left(\frac{P_b}{\rho_b} \right) \nabla_a W_{ab} = \sum_{b=1}^N m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \nabla_a W_{ab} \quad (1.34)$$

$$\left(\frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \right)_a = \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \sum_{b=1}^N m_b \nabla_a W_{ab} \quad (1.35)$$

Por lo tanto reemplazando la ecuación (1.35 y 1.36) en la ecuación (1.34), se tiene la ecuación de aceleración de la partícula a en forma SPH: (Monaghan, 1988)

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_{b=1}^N m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \nabla_a W_{ab} - \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \sum_{b=1}^N m_b \nabla_a W_{ab}$$

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab} \quad (1.36)$$

1.4.2.2 Tipos de Kernel

Los términos más importantes con los que se trabaja en SPH los podemos observar en la figura 1.6. Donde, se muestra de color rojo la partícula de nuestro interés la cual se encuentra a una distancia r con respecto a las partículas vecinas. El círculo es el dominio de influencia o dominio donde se evaluará la función kernel la cual tiene mayor influencia en la cercanía de la partícula de interés mientras que en los bordes su influencia es mínima.

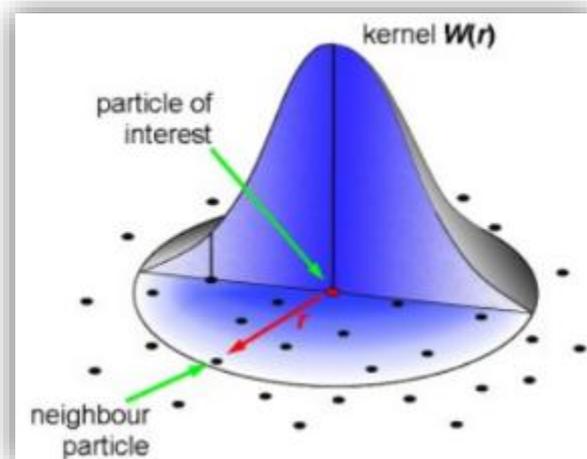


Figura 1.6 Método Lagrangiano SPH

Fuente: Mihai, et al., 2009

Al trabajar con SPH se debe tener en cuenta cuál es la función de suavizado (kernel) que se ajusta mejor a la solución para obtener buenas aproximaciones. Debido a que el kernel depende de algunos factores como: h (radio del dominio de influencia), la dimensión del espacio (2D o 3D), r (distancia entre las partículas a y b). Se han desarrollado una infinidad de kernels conforme avanzan las investigaciones y los que comúnmente se utilizan son:

Gaussiano

$$W_{ab}(r, h) = \alpha_D e^{-\frac{r^2}{h^2}} \quad 0 \leq r/h \leq 2 \quad (1.37)$$

Donde el factor α_D depende de la dimensión en que se trabaje;

$$\alpha_D = \frac{1}{\pi h^2} \quad (2D) \quad \text{o} \quad \alpha_D = \frac{1}{\pi^{3/2} h^3} \quad (3D)$$

Cuadrático

$$W(r, h) = \alpha_D \left(\frac{3}{16} q^2 - \frac{3}{4} q + \frac{3}{4} \right) \quad 0 \leq q \leq 2 \quad (1.38)$$

Donde el factor $\alpha_D = \frac{2}{\pi h^2}$ (2D) o $\alpha_D = \frac{5}{4\pi h^3}$ (3D) y $q = \frac{r}{h}$

Cúbico

$$W(r, h) = \alpha_D \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} q^2 + \frac{3}{4} q^3 & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4} (2 - q)^3 & 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & q \geq 2 \end{cases} \quad (1.39)$$

Donde el factor $\alpha_D = \frac{10}{7\pi h^2}$ (2D) o $\alpha_D = \frac{1}{\pi h^3}$ (3D) y $q = \frac{r}{h}$

Quintico

$$W(r, h) = \alpha_D \left(1 - \frac{q}{2} \right)^4 (2q + 1) \quad 0 \leq q \leq 2 \quad (1.40)$$

Donde el factor $\alpha_D = \frac{7}{4\pi h^2}$ (2D) o $\alpha_D = \frac{7}{8\pi h^3}$ (3D) y $q = \frac{r}{h}$

A pesar de los diferentes kernels que existen, este proyecto se enfocará en solo dos de ellos, los cuales son: el Gaussiano y el Cuadrático.

1.4.2.3 Ecuaciones discretizadas en fluidos

Ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_{b=1}^N m_b (\vec{v}_a - \vec{v}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}$$

Ecuación de la energía

$$\frac{dU}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_{b=1}^N m_b (\vec{v}_a - \vec{v}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}$$

Ecuación de movimiento

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \sum m_b \left(\frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab}$$

1.5 Aplicación de SPH en tuberías utilizando las ecuaciones de N-S

1.5.1 Solución de las ecuaciones de NS en tuberías

Para fluidos incompresibles, la ecuación de NS se simplifica considerablemente, resultado de considerar la densidad ρ como constante, por lo tanto, puede ser descrita de forma conservativa como:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \eta \Delta \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla P = f(x, t); \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.41)$$

Situada en un dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, complementado con condiciones de frontera, donde \vec{v} es el vector de velocidad $\nu > 0$ es la viscosidad cinemática y P es la presión escalar, que sirve para hacer cumplir la condición libre de divergencia $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Del lado derecho es una fuerza (artificial) que sirve para mantener un movimiento no trivial del fluido (Robinson, 2013). Mediante la ecuación (1.41) se puede obtener una nueva ecuación para resolver un problema de movimiento de un fluido incompresible a través de una tubería, donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= 0 \quad \text{debido al caso estacionario} \\ (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= 0 \quad \text{no hay flujos convectivos} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene una ecuación diferencial:

$$\nabla P = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v}_x \quad (1.42)$$

Donde $P = P(x)$ y $\vec{v}_x = \vec{v}_x(y)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{v}_x}{\partial y^2}$$

$$\vec{v}_x = \frac{-\Delta p}{2\mu L} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \quad (1.43)$$

Siendo esta solución correspondiente al denominado flujo de Poiseuille para una tubería.

1.5.2 Fronteras

SPH, además de ser un método ideal para simular problemas complejos de hidrodinámica posee una gran desventaja al evaluar propiedades del fluido en las fronteras ya que se introduce un error a la solución aproximada, por lo que es muy necesario que estas deban ser condicionadas. En investigaciones anteriores este problema ha sido tratado de diferentes maneras como es el caso de:

- (Liu & Liu, 2003) que propone el uso de partículas fantasmas en la zona de entrada y salida, lo que beneficia el cálculo de la densidad al ser evaluada en las fronteras.
- (Monaghan, 1994) propuso el uso de una línea de partículas fantasmas sobre la frontera de salida, de tal forma, que se produzca una fuerza de repulsión a las partículas que se encuentran cerca de la frontera.
- (Campbell, 1989) incluyó un término residual de frontera en la integral por partes cuando se estimaba la integral del *kernel*.
- (Libersky, Petschek, Carney, Hipp, & Allahdadi, 1993) introdujeron partículas fantasmas reflectantes en las fronteras.
- (Randles & Libersky, 1996) utilizaron partículas fantasmas asignando el mismo valor de frontera de una variable de campo a todas las partículas y por una interpolación suave del valor de las partículas en la frontera especificada, se calcula el valor en el interior de estas.

1.5.3 Viscosidad Artificial

En el trabajo de (Monaghan, 2005), se estableció este término para estabilizar el algoritmo en la simulación permitiéndonos simular fenómenos de choques debido a su simplicidad. Se debe tener en

cuenta que esta viscosidad no tiene relación alguna con la viscosidad real del fluido. Este término se lo suma al gradiente de presión y en SPH se lo denota como:

$$\frac{dv_a}{dt} = - \sum_{b=1}^N m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} \quad (1.44)$$

Donde Π_{ab} es el término de viscosidad artificial y se lo expresa como:

$$\Pi_{ab} = -\nu \left(\frac{u_{ab} \cdot r_{ab}}{r_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2} \right) \quad (1.45)$$

$\epsilon \sim 0.01$, evitando singularidades cuando $r_{ab} = 0$. El signo negativo de este término desempeña un papel fundamental debido a mientras más alto sea el valor de la viscosidad menor será la aceleración del fluido.

1.5.4 Flujo de Poiseuille dependiente del tiempo

Considerando un flujo estacionario entre dos placas paralelas infinitas en reposo en presencia de un gradiente de presión, se selecciona el plano (x-y) para representar al flujo y como dirección del flujo el sentido positivo de las x.

$$v_x(y, t) = \frac{|F|}{2\nu} (y^2 - d^2) \quad (1.46)$$

A la ecuación (1.46) se le incorpora una sumatoria, la cual tiene las funciones coseno y exponencial, la función coseno depende de la posición en que se encuentren las partículas en el eje originando la forma típica del flujo de Poiseuille, mientras que la función exponencial depende del tiempo y es responsable del aumento de la velocidad hasta llegar al flujo estacionario. Para un sistema de flujo variable en el tiempo la solución es:

$$v_x(y, t) = \frac{|F|}{2\nu} (y^2 - d^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n d^2 |F|}{\nu \pi^3} \cos \left[\frac{(2n+1)\pi y}{2d} \right] \exp \left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \nu t}{4d^2} \right] \quad (1.47)$$

Donde, las placas están ubicadas a una distancia $y = \pm d$, siendo d la mitad de la separación entre placas y $\nu = \eta/\rho$ es la viscosidad cinemática.

$$|F| = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) = -\frac{2\nu v_0}{d^2} \quad (1.48)$$

$$v_0 = -\frac{d^2}{2\rho\nu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \quad (1.49)$$

En la Ec. (1.47), F es una fuerza impulsora proporcional a la diferencia de presión (Δp) entre la entrada y la salida, L es la longitud de la tubería y v_0 es una constante asintótica de la velocidad. En el límite cuando t tiende a ∞ , la ecuación tiende al perfil parabólico del estado estacionario. (Sigalotti, Klapp, Sira, Meleán, & Hasmy, 2003)

$$v_x(y) = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{d^2} \right) \quad (1.50)$$

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA

CAPÍTULO 2

2 METODOLOGÍA

Para la resolución del problema planteado, se propuso realizar un código para la simulación de fluidos utilizando el método SPH. El algoritmo simulará numéricamente un líquido newtoniano (agua), isotérmico en dos dimensiones que fluye a través de una tubería. Se propuso la implementación de condiciones de fronteras periódicas para reducir la carga computacional originada al simular una tubería de grandes dimensiones y medir el error relativo respecto a la solución analítica (Flujo de Poiseuille no estacionario) que se genera debido a la inconsistencia de la solución en las fronteras, al cambiar el tipo de kernel, número de partículas y dimensiones de la tubería. Los resultados de la simulación y el cálculo de los errores permitirán establecer las condiciones fisicomatemáticas para las cuales se optimice la convergencia del método.

2.1 Desarrollar un código a partir de la técnica SPH que simule el flujo en una tubería.

Se desarrolló un código en SPH bidimensional, isotérmico y con condiciones periódicas utilizando las ecuaciones discretizadas de NS, las cuales fueron llevadas al lenguaje de MatLab. Se inicializaron las variables de entrada con las condiciones iniciales: dimensión de la tubería, constantes del fluido y condiciones del método SPH. Una vez establecidas las dimensiones de la tubería se procedió a la distribución de las partículas, luego entra a un bucle donde el paso de tiempo debe ser menor al tiempo total de simulación, si esto ocurre se realizan los cálculos correspondientes a cada una de las etapas. A continuación, se muestra un esquema general del código:

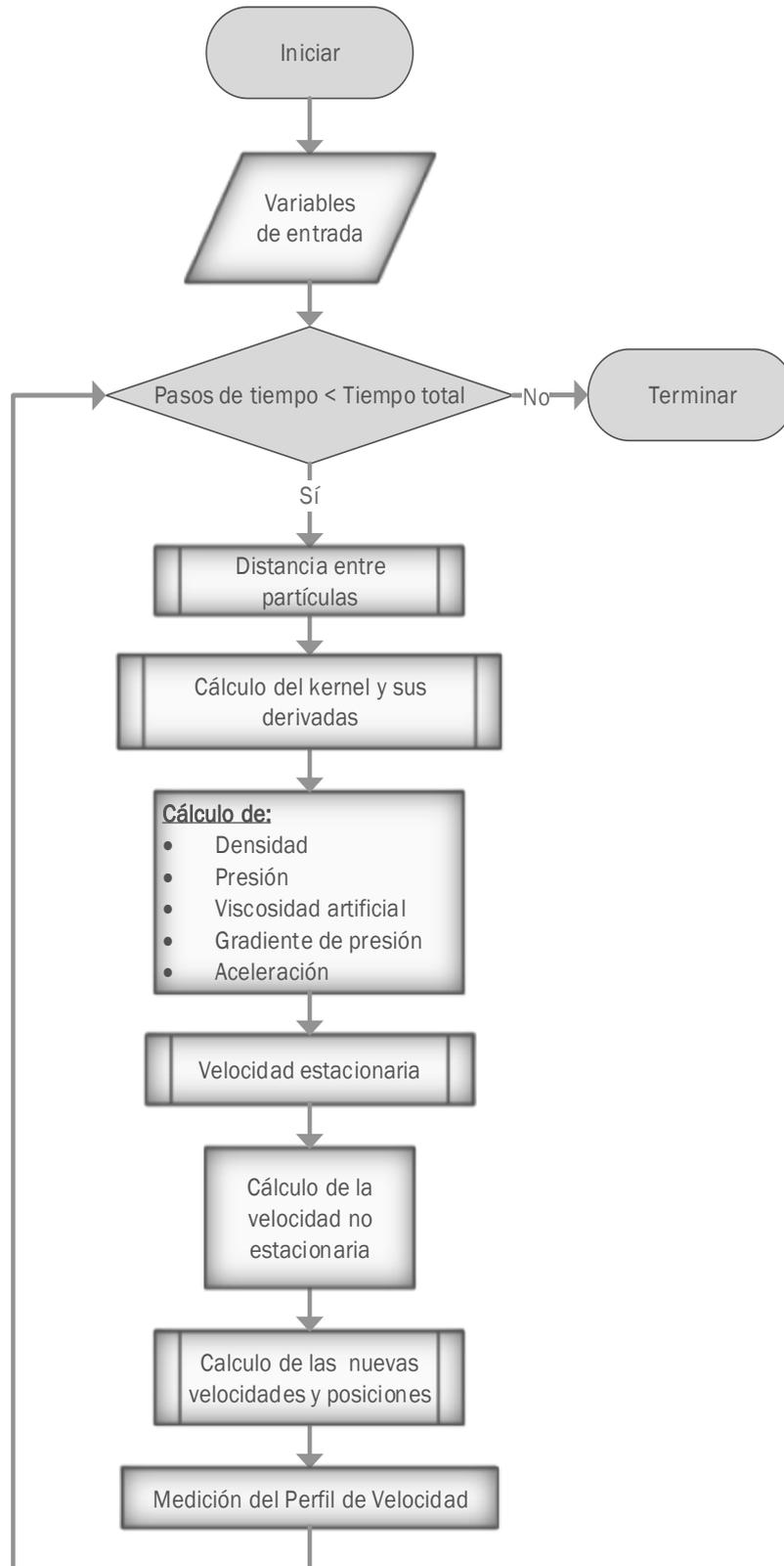


Figura 2.1 Diagrama de flujo del código desarrollado

2.2 Plantear un modelo que permita resolver los problemas al evaluar la función kernel en las fronteras para el caso de tuberías.

Viscosidad artificial

El término de viscosidad se puede estimar directamente usando las fórmulas de interpolación de SPH, sin embargo, en problemas de transferencia de calor estas fórmulas de interpolación no cumplen la ley de conservación de momento, y no se garantiza el incremento de la entropía del sistema. Por esta razón Gingold & Monaghan en 1983, idearon un término de viscosidad artificial (ecuación 2.1) el cual cumpla la ley de conservación de momento:

$$\Pi_{ab} = -v \left(\frac{u_{ab} \cdot r_{ab}}{r_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2} \right) \quad (2.1)$$

Este término se agregó en el código, para mejorar las características físicas de la solución. Una explicación más detallada se encuentra en el capítulo 1. La siguiente figura (2.2) muestra un diagrama de flujo correspondiente a su incorporación en el algoritmo.

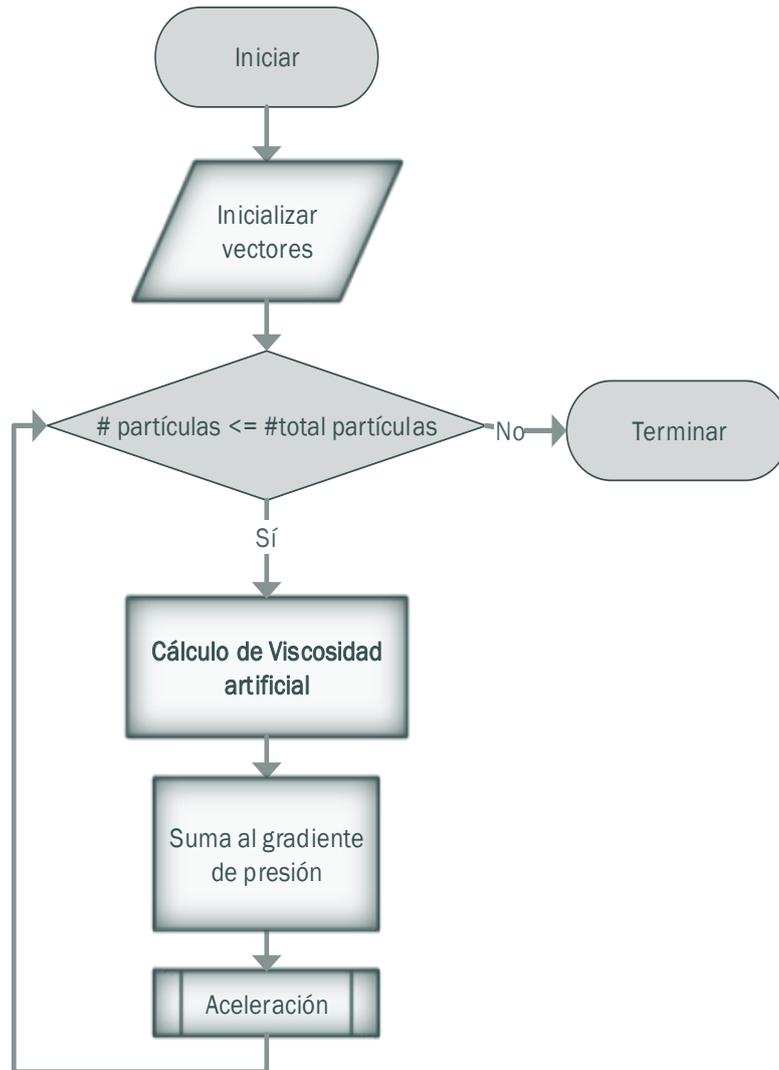


Figura 2.2 Diagrama de flujo del cálculo de viscosidad artificial

Término no estacionario para la velocidad

A la solución numérica se le incorporó un término correspondiente a la solución analítica del caso no estacionario para el flujo de Poiseuille (ecuación 2.1). Este método fue implementado por (Sigalotti et al., 2003), con el objetivo de obtener una simulación más precisa con números bajos de Reynolds.

$$v_x(y, t) = \underbrace{\frac{|F|}{2\nu}(y^2 - d^2)}_{\text{Término estacionario}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n d^2 |F|}{\nu \pi^3} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi y}{2d}\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \nu t}{4d^2}\right]}_{\text{Término no estacionario}} \quad (2.2)$$

El término de la derecha (sumatoria) de la ecuación (2.1), depende del tiempo y de la posición de las partículas en el eje "y". La función coseno es la responsable de originar la forma típica del flujo de Poiseuille, mientras que la exponencial se encarga del aumento de la velocidad en el tiempo hasta llegar al estado estacionario. Una explicación más detallada se encuentra en el capítulo 1.

Calculo del perfil de velocidad

Una vez incorporado el término dependiente del tiempo a todas las velocidades de las partículas de simulación, se procedió a medir el campo de velocidades. Para esto se toma una región del dominio de simulación y se registran las velocidades de las partículas que transitan en esta por unidad de tiempo. El promedio de velocidades proporciona el campo de velocidades en una región determinada. La figura 2.3 muestra un esquema de la realización esta medición; donde L es el ancho de la tubería, Lr es un factor de amplificación del largo de la tubería ($Lr \geq 1$) y df es la sección de medición que se ubicó en la mitad de la tubería.

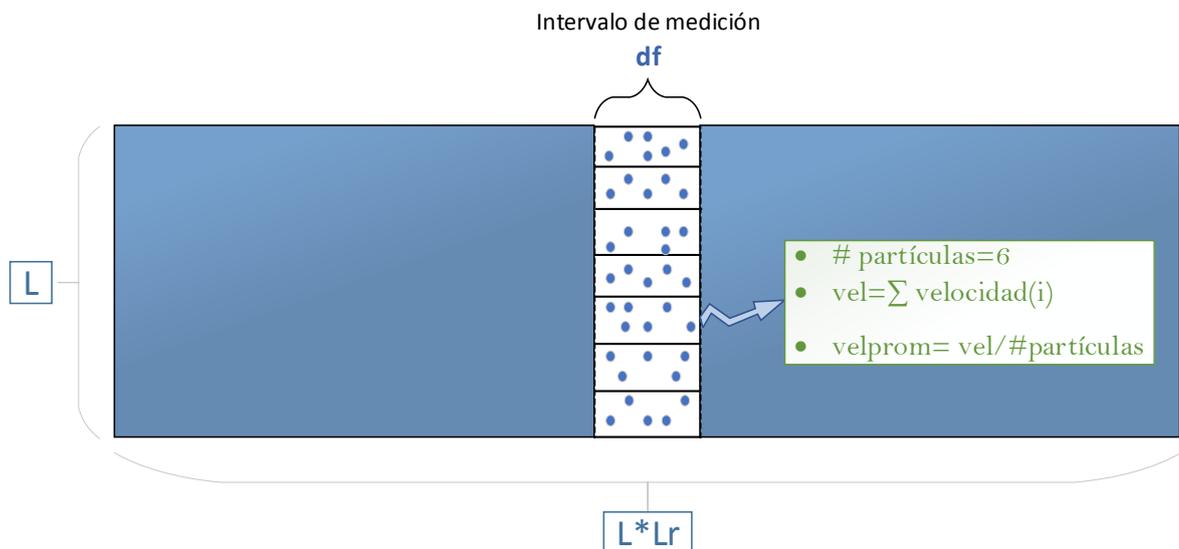


Figura 2.3 Esquema de medición del campo de velocidades

2.3 Comparar y analizar las soluciones analíticas y de fronteras periódicas convencionales con el modelo propuesto.

Se establecieron 2 casos de estudio, a través de la utilización de los kernel gaussiano y cuadrático, con 900, 2500 y 6400 partículas para dos escalas de simulación, las cuales fueron: 2×10^{-3} m y 1×10^{-3} m. Se calculó el error relativo promedio de los valores correspondientes al campo de velocidades en una zona determinada, para medir la influencia de las fronteras periódicas en la solución del sistema.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS

CAPÍTULO 3

3 RESULTADOS

Los problemas computacionales al simular las fronteras de una tubería utilizando el método SPH se estimaron cuantificando el error relativo a la solución analítica para mejorar la precisión en los resultados.

3.1 Desarrollar un código a partir de la técnica SPH que simule el flujo en una tubería.

A continuación, se muestra el código utilizado en la simulación (programado en MATLAB 2016a). El mismo ha sido subdividido utilizando el esquema mostrado en la figura 2.1.

Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales establecen los parámetros físicos y sus límites en la simulación. Estas condiciones pueden modificarse dependiendo de lo que se quiere analizar. En el código se establecieron condiciones para la tubería, las partículas, dimensión del espacio y para el fluido.

```
%% Condiciones iniciales  
nd = 2; % número de dimensiones del espacio  
step_num = 10000; % número de pasos de tiempo,  
dt_vid=10; % intervalos para la grabación del video (si es 2, el número  
total de pasos debe ser par, si es 5, el número total divisible entre 5, y así  
sucesivamente)  
numframes= step_num/dt_vid; % número de frame para grabar el video  
dt = 1e-9; % delta del tiempo  
np = 900; % número de partículas  
%% Condiciones de la tubería y partículas iniciales  
particledistri=1; % si es 1=caja simétrica 0=caja no simétrica  
2=aleatorio, debe tener raíz cuadrada exacta especialmente el 1 y 2.  
L=1e-3; % tamaño de la tubería (diámetro)  
Lr=3; % Razón de incremento del largo de la tubería con relación al ancho
```

```

d=L/2; % Radio de la tubería
d2=L/(n+1);
dL=L*0.02; % intervalo diferencial de frontera
ploti=2; %1=densidad 2=posiciones
velocidad=1; %si velocidad es 1, se hará el cálculo para la adición de la
velocidad
v0=1.25e-2; %velocidad inicial
m=100; %Límite de la serie
%% Constantes del fluido
h=1.73e-04; % radio de suavizado
Rho0=1000; %densidad inicial del agua a 4°C
gamma=7; %constante para líquidos incompresibles
c0=2.5e-5; %velocidad del sonido en agua

```

Distribución de las partículas y cálculo de sus posiciones iniciales

Dependiendo de la distribución usada en el código, la solución converge de diferentes formas. En primer lugar, se trabajó con una distribución aleatoria en donde la distancia entre las partículas no tiene un orden y distribución específico, por lo tanto, esto producía problemas al evaluar la función *kernel*. Por esta razón, se desarrolló una distribución ordenada para tener una distancia equidistante de las partículas, sin embargo, en algunos tramos del volumen de control no había presencia de partículas lo que ocasionó problemas al momento de realizar el cálculo de distancias. Debido a estos problemas se llegó a la conclusión que las partículas debían tener una distancia equidistante y ocupar todo el espacio del volumen de control, por lo que se implementó una distribución simétrica, obteniendo mejores resultados al evaluar la función *kernel*, además, otorgo un mejor resultado al momento de graficar el perfil de Poiseuille.

```

%% Distribución de las partículas
if(particledistri==0)
    ds=(L-aa)/sqrt(np);
    k=1;
    for i = 1: sqrt(np);
        for j = 1: sqrt(np);

```

```

        pos (k,1) =i*ds+aa/2;
        pos (k,2) =j*ds+aa/2;
        k=k+1;
    end
end
end

if (particledistri==1)
    pos=0;
    k=1;
    Xx= ((L*Lr)/ (sqrt (np) +1)) *[1: sqrt (np)];
    Yy=((L)/(sqrt(np)+1)) *[1: sqrt(np)];
    for i = 1: sqrt(np);
        for j = 1: sqrt(np);
            if(k<=np)
                pos (k,1) =Xx(i);
                pos (k,2) =Yy(j);
                k=k+1;
            end
        end
    end
end

if(particledistri==2)
    pos=(L*Lr-aa) . *rand(np,nd) + aa);
end

```

Cálculo de la distancia entre partículas.

Para realizar este cálculo se implementó el método de vectorización de matrices de MatLab, en donde se sustituye la forma tradicional de trabajar con loops “for” anidados, por un método que realiza operaciones múltiples en instrucciones simples, SIMD por sus siglas en inglés. El cálculo se realiza comparando cada partícula contra todas sus vecinas.

```

%% Forma Vectorial
x=pos (:,1);
y=pos (:,2);
dx = bsxfun(@minus,x(:),x(:).'); % la diferencia entre la distancia
al interior de las partículas en x.
dy = bsxfun(@minus,y(:),y(:).'); % la diferencia entre la distancia
al interior de las partículas en y
r = sqrt(dx.^2+dy.^2); % cálculo de la distancias vectorialmente
r2= (dx.^2+dy.^2);

```

```

%% Con los bucles del tipo "For"
for a=1:np % contador de partículas la que comparare
    for b=1:np % for de partículas para la comparación con índices a y b
        r=sqrt((pos(a,1)-pos(b,1))^2+(pos(a,2)-
            pos(b,2))^2);
        r2=r*r;
    end
end
end

```

Selección de la función kernel y cálculo de sus derivadas

Se inició trabajando con el kernel Gaussiano, sin embargo, la carga computacional que se origina debido al cálculo de un exponencial hace que el código se vuelva más lento y pesado. Por esta razón, se implementó el kernel de Cuadrático.

```

%% Kernel Gaussiano
Wb= ad*exp(-r2./(h^2)).*H;
W=sum(Wb,2);

% the kernel derivate
Wdx=(-2*ad*(1/h^2))*dx.*exp(-r2./(h^2)).*H;
Wdx=sum(Wdx,2);
Wdy=(-2*ad*(1/h^2))*dy.*exp(-r2./(h^2)).*H;
Wdy=sum(Wdy,2);

%% Kernel Cuadrático
Wb=(3/4)*ad*((1/4)*(r2./(h^2)-(r/h)+1)).*H;
W=sum(Wb,2);

% the kernel derivate
Wdx=(3/4)*ad*((dx/2*h)-(dx/r*h)).*H;
Wdx=sum(Wdx,2);
Wdy=(3/4)*ad*((dy/2*h)-(dy/r*h)).*H;
Wdy=sum(Wdy,2);

```

Cálculo de la viscosidad artificial.

Se añadió el término de viscosidad artificial de Monaghan para mejorar la aproximación de la simulación.

```

%% Viscosidad Artificial
Visc = zeros(np,1);
Ex=0.01;
for a=1:np;
    Tx=0;

```

```

Ty=0;
Txx=0;
Tyy=0;
for b=1:np;
    if r2(a,b)<= h;
        Tx=(-nu)*((vel(a,1)*pos(b,1))+
(vel(a,2)*pos(b,2)))/(r2(a,b)+Ex*(h^2));
        Txx = Txx+Tx;
    end
end
Visc(a,1)=Txx;
end

```

Cálculo de la presión, gradientes de presión y la velocidad de las partículas.

Para el cálculo de la presión se empleó la ecuación de estado de líquidos incompresibles. Una vez realizado el cálculo de los gradientes de presión, se le sumó la viscosidad artificial debido a que este término influye en la aceleración del fluido, físicamente se interpreta como una desaceleración del fluido, puesto que mientras más viscoso es un fluido, luego con la presión y viscosidad de las partículas se realizó el cálculo de la aceleración.

```

%% Gradiente de presión
% Vectorizado
P=beta*((Rho./Rho0).^gamma)-1);
Gp=bsxfun (@plus,(P./Rho.^2)',(P./Rho.^2));
Gp=sum(Gp,2);
Gpx=-(mass)*(Gp+Visc).*Wdx;
Gpy=-(mass)*(Gp+Visc).*Wdy;

% Con los For's
for a = 1: np
    for b = 1: np
        r=sqrt((pos(a,1)-pos(b,1))^2+(pos(a,2)-pos(b,2))^2);
        r2=r*r;
        if(r<h);
            Gpx=-Gpx+mass*(P(b)/(Rho(b)^2)+P(a)/(Rho(a)^2))
                +Visc)*Wdx(a);
            Gpy=-Gpy+mass*(P(b)/(Rho(b)^2)+P(a)/(Rho(a)^2))
                +Visc)*Wdy(a);
        end
    end
end

```

```

end

%% Calculo el gradiente de presión de las partículas a
Gpax(a) = Gpx;
Gpay(a) = Gpy;

%% Aceleración en x y y
acc(:1) = Gpax;
acc(:2) = Gpay + g;
end
Gpx = 0.0;
Gpy = 0.0;
end

%% Cálculo de la velocidad
vel(:,1) = (vel(:,1) + dt.*acc(:,1));
vel(:,2) = (vel(:,2) + dt.*acc(:,2));

```

3.2 Plantear un modelo que permita resolver los problemas al evaluar la función kernel en las fronteras para el caso de tuberías.

Implementación de condiciones de fronteras periódicas en el sistema propuesto.

Se crearon fronteras periódicas en función de la longitud de la tubería de tal forma que las partículas que abandonaban el dominio computacional sean reinsertadas en la entrada del dominio formando así una tubería con condiciones de fronteras periódicas.

```

%% Condiciones de frontera
for(i = 1:np)

%boundaries for x's
    if (pos(i,1) >= (Lr*L));
        vel(i,1) = vel(i,1);
        pos(i,1) = 0;
    end
    if(pos(i,1) <= 0);
        vel(i,1) = vel(i,1);
        pos(i,1) = 0;
    end

%boundaries for y's
    if (pos(i,2) >= (L));
        pos(i,2) = (L-dL);
    end
    if(pos(i,2) <= 0);

```

```

        pos(i,2) = dL;
    end
end
end

```

Implementación del término dependiente del tiempo para el flujo de Poiseuille.

Se incorporó una subrutina que permitió sumarle a la solución numérica un término de velocidad del estado no estacionario, la cual consistió en dividir toda la tubería en pequeños intervalos a lo largo del eje “y”, luego se identificó si la partícula se encontraba en un intervalo específico y si esto ocurría se le añade a la velocidad estacionaria.

```

%% Cálculo del término de adición de la velocidad
for a=1: np;
    for dyy=0:n;
        y=dyy- (n/2);
        R=0;
        if pos(a,2)>=dyy*d2 && pos(a,2)<(dyy+1)*d2;
            F= (2*nu*v0)/((d)^2);
            for s=1:m;
                A=16*((-1)^(-s))*((d)^2)/(pi^3*nu*
                    (2*s+1)^3);
                B=cos((2*s+1)*pi*y*d/(L));
                C=exp(-(pi^2*nu*dt*step*(2*s+1)^2)/(4*
                    (d)^2));
                R=R+(A*B*C);
            end
            vel(a,1) = vel(a,1) + R;
        end
    end
end
end

```

Desarrollo del código para medir el perfil de velocidad tipo Poiseuille.

Para la medición del perfil de velocidad, se tomó el ancho de toda la tubería y se lo dividió en pequeños intervalos a lo largo del eje” y”. Posterior a esto, en el eje “x” se verificó si la posición de la partícula se encontraba en la mitad de la tubería y dentro de un intervalo específico. Si esto ocurría, se guardaba la velocidad de esta partícula en un vector de velocidad. Este procedimiento se lo realizó para todas las partículas, obteniendo la suma total de las velocidades de las partículas y además la cantidad de partículas que cumplieron con estas condiciones.

```

%% Código del perfil de velocidad
cont = zeros(n,1);
veloc = zeros(n,1);
for i=1:n;
    for a=1: np;
        if pos(a,1)>=(L*Lr)/2&&pos(a,1)<=((L*Lr)/2+df);
            if pos(a,2)>(i-1)*d && pos(a,2)<d*(i) ;
                veloc(i)= veloc(i) + vel(a,1);
                cont(i) = cont(i,1)+1;
            end
        end
    end
end
veloc1=veloc./cont;

```

Cálculo de la posición en función de la velocidad, aceleración y tiempo

Con la aceleración que se calculó anteriormente y con los intervalos de tiempo (dt) establecidos al inicio de la simulación, se calculó la nueva velocidad de las partículas utilizando un algoritmo integrador de verlet.

```

%% Cálculo de la posición
pos(:,1) = pos(:,1) + vel(:,1)*dt + 0.5*acc(:,1)*dt^2;
pos(:,2) = pos(:,2) + vel(:,2)*dt + 0.5*acc(:,2)*dt^2;

```

Consistencia en las unidades.

Para llevar a cabo la comprobación de la consistencia en las unidades se realizó un análisis dimensional a cada una de las variables

$Wb=ad*\exp(-r^2./h^2) .^H$	$[1/m^2];$ %kernel
$Rho=mass*W$	$[Kg/m^3];$ %densidad
$P=beta*((Rho./Rho0) .^gamma) -1)$	$[Kg/m^2];$ %presión
$acc=mass*(Gp+Visc) .*dW$	$[m/s^2];$ %aceleración
$vel= vel +dt.*acc$	$[m/s];$ %velocidad
$pos=pos+vel*dt+0.5*acc*dt^2$	$[m];$ %posición
$beta=(c0^2)*Rho0/gamma$	$[Kg/ms^2];$ %beta
$ad=1/(((pi)^(3/2))*h^3)$	$[1/m^2];$ %alpha D para nd=2 (G)
$ad=2/(((pi)^(3/2))*h^3)$	$[1/m^2];$ %alpha D para nd=2 (C)

3.3 Comparación de la solución analítica para un flujo tipo Poiseuille y de fronteras periódicas convencionales con el modelo propuesto.

A través de la utilización del código se realizaron graficas de la evolución del perfil de velocidad para diferentes pasos de tiempo, y se comparó la solución numérica con la analítica en cada caso. Adicionalmente se presenta la evolución de las posiciones de las partículas para diferentes pasos de tiempo.

3.3.1 Simulación realizada con un diámetro de 2×10^{-3} [m], 900 partículas y 5 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.

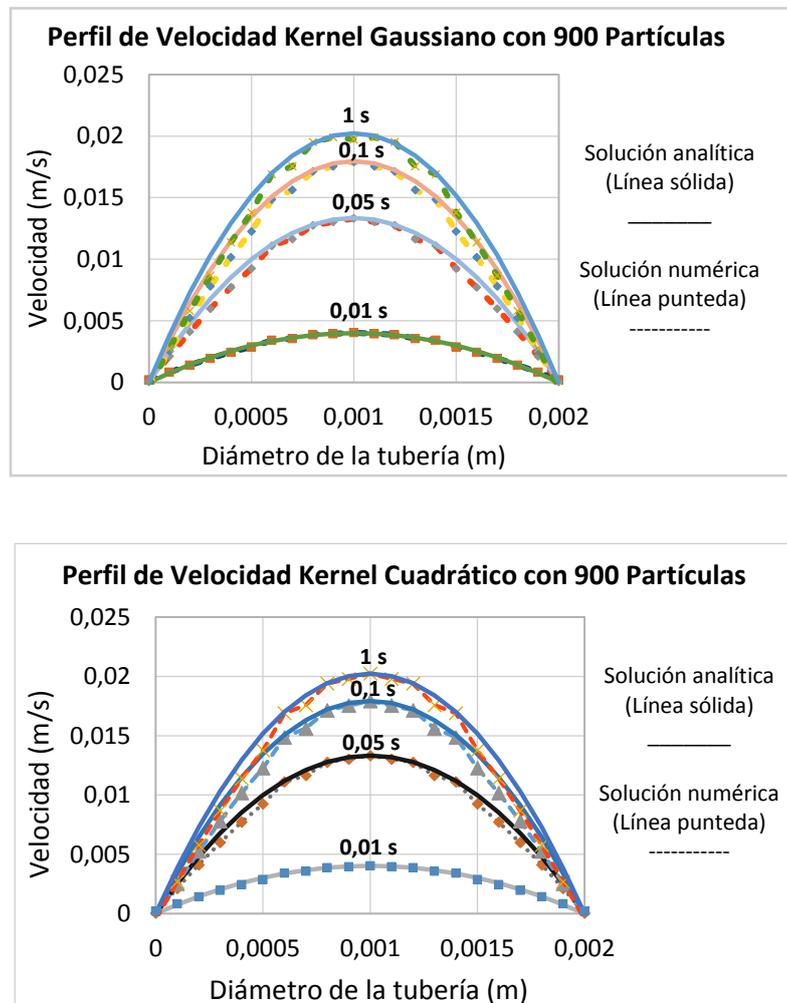


Figura 3.1 Gráficas de los perfiles de velocidad con 900 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.

3.3.2 Simulación realizada con un diámetro de 2×10^{-3} [m], 2500 partículas y 10 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.

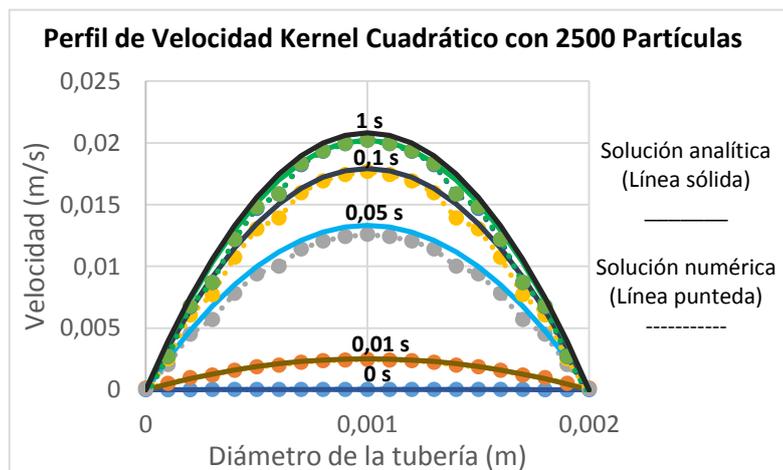
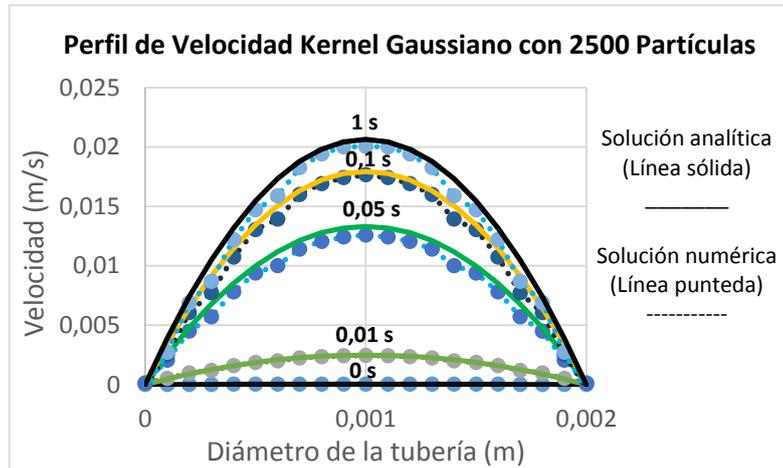


Figura 3.2 Gráficas de los perfiles de velocidad con 2500 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.

Las figuras (3.3, 3.4, 3.9 y 3.10) muestran la evolución de las posiciones de partículas en las simulaciones para diferentes pasos de tiempo.

Aplicando Kernel Gaussiano con un diámetro de $2 \times 10^{-3} \text{ m}$

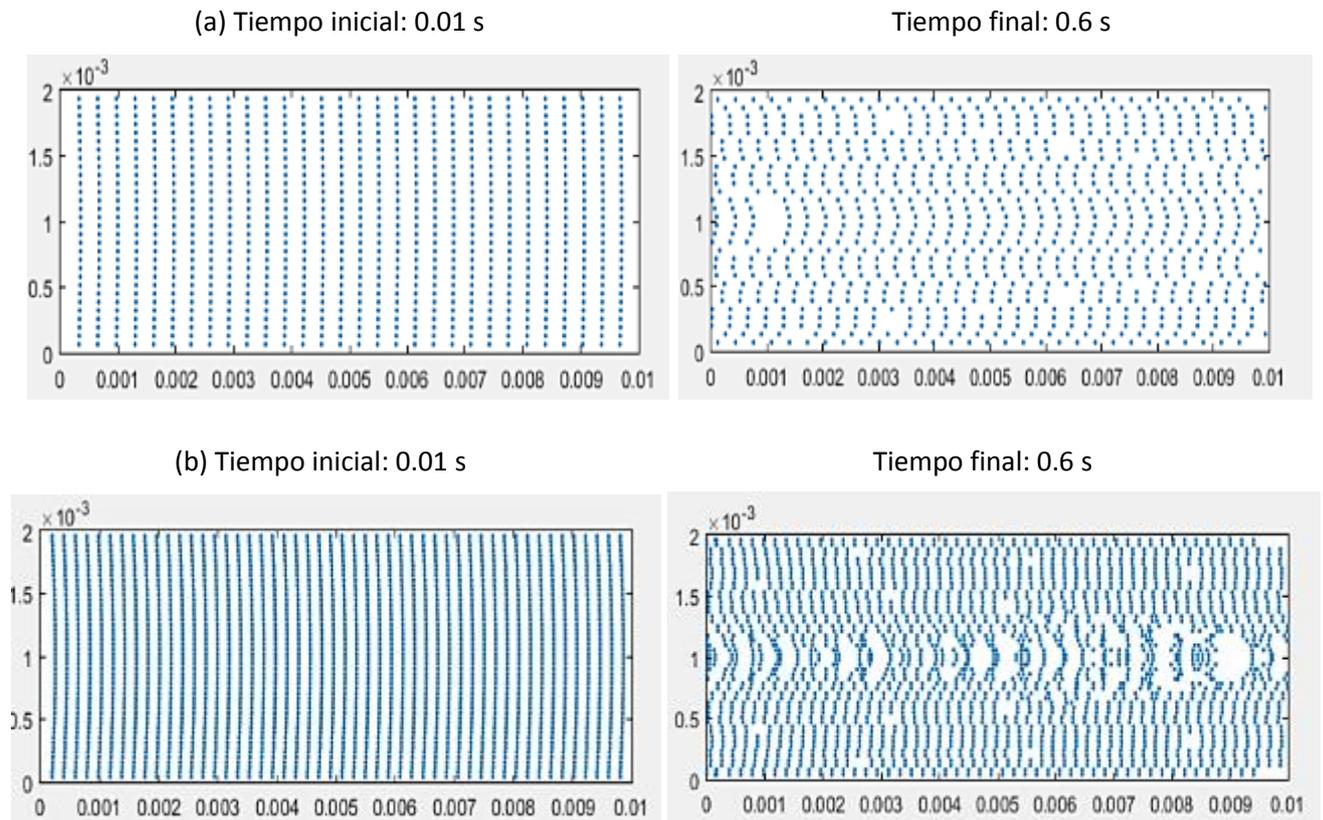


Figura 3.3 Simulación de (a) 900 partículas y (b) 2500 partículas aplicando el kernel gaussiano y diámetro de $2 \times 10^{-3} \text{ m}$. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.

Aplicando Kernel Cuadrático con un diámetro de $2 \times 10^{-3} \text{ m}$

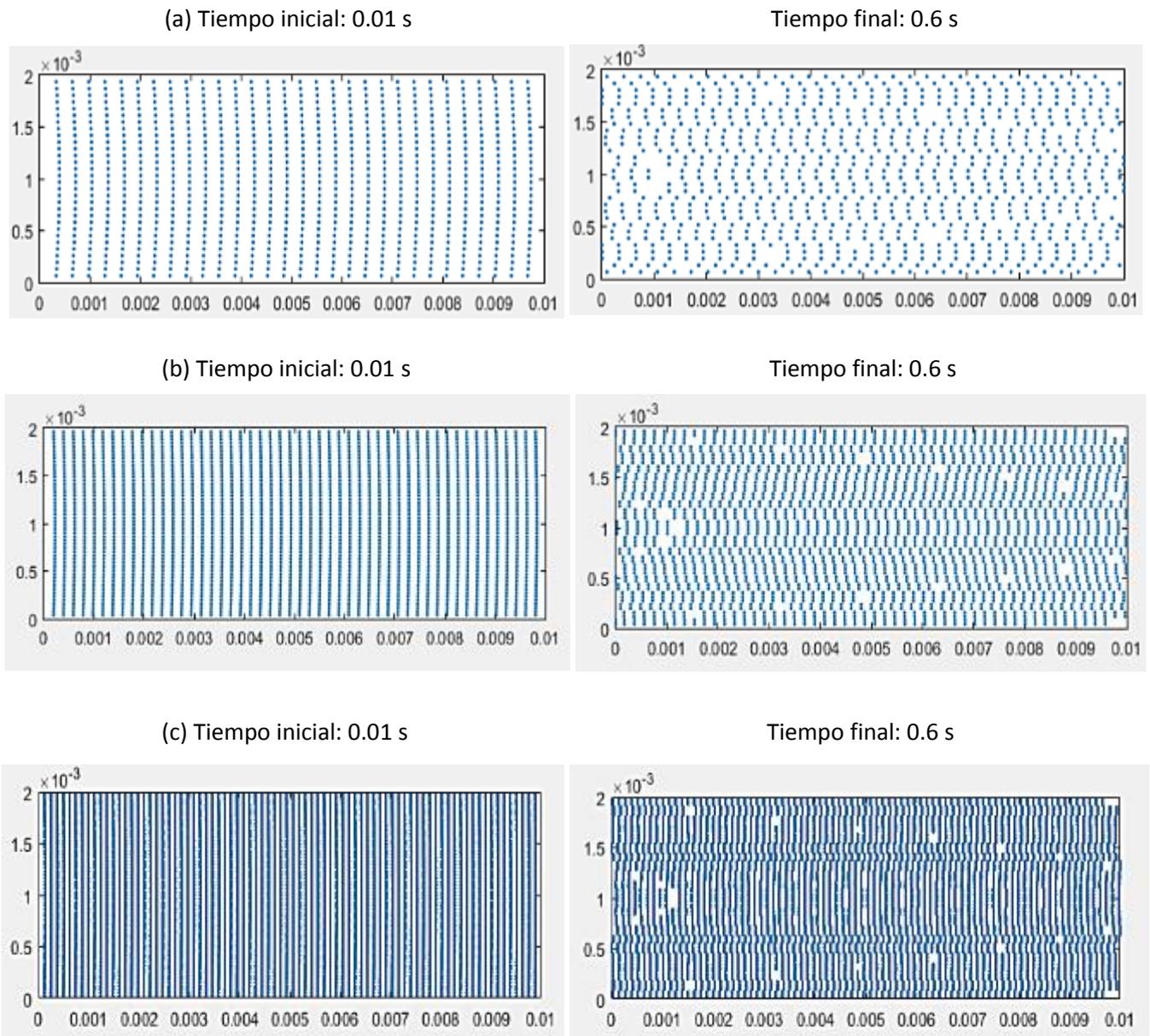


Figura 3.4 Simulación de (a) 900 partículas, (b) 2500 partículas y (c) 6400 partículas aplicando el kernel cuadrático y diámetro de $2 \times 10^{-3} \text{ m}$. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.

3.3.3 Simulación realizada con un diámetro de 1×10^{-3} [m], 900 partículas y 19 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.

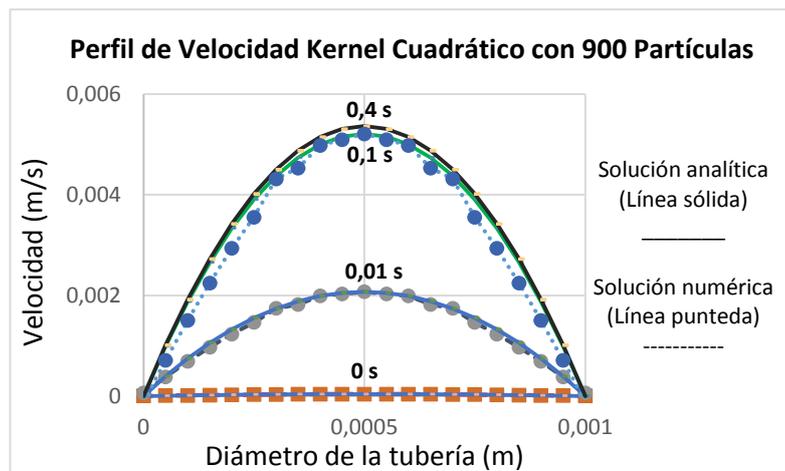
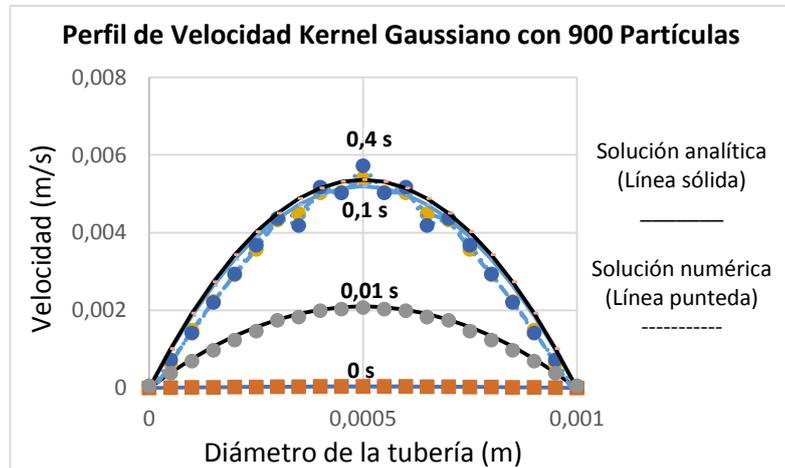


Figura 3.5 Gráficas de los perfiles de velocidad con 900 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.

3.3.4 Simulación realizada con un diámetro de 1×10^{-3} [m], 2500 partículas y 47 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.

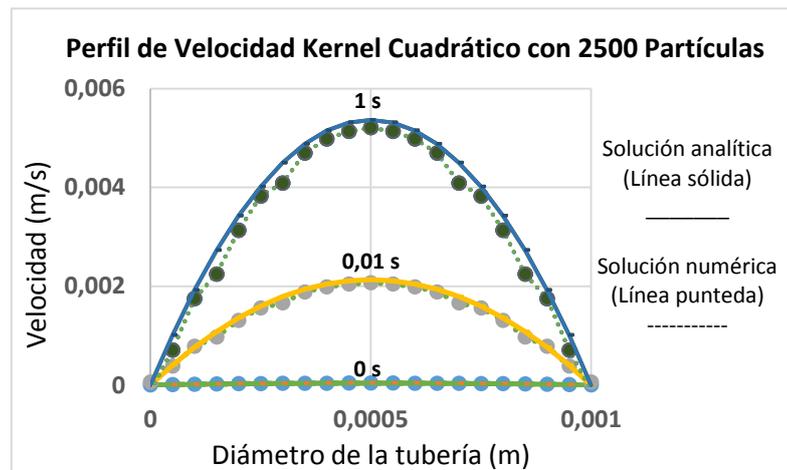
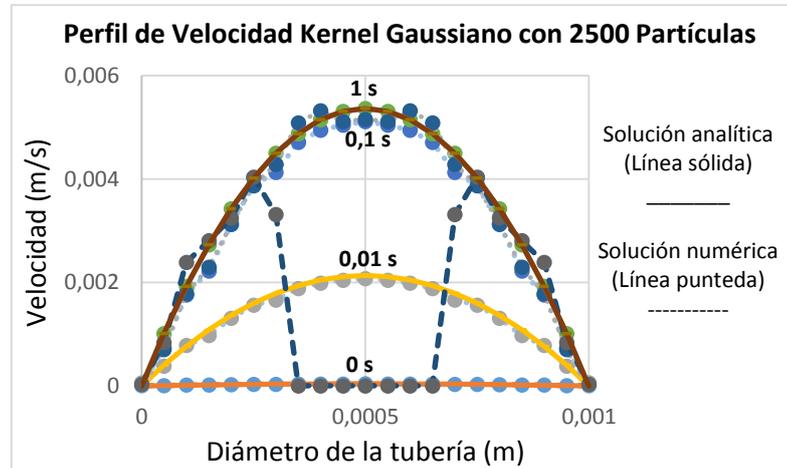


Figura 3.6 Gráficas de los perfiles de velocidad con 2500 partículas. Resultados analíticos y numéricos, aplicando el kernel gaussiano y cuadrático.

3.3.5 Simulación realizada con un diámetro de 1×10^{-3} [m], 6400 partículas y 100 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.

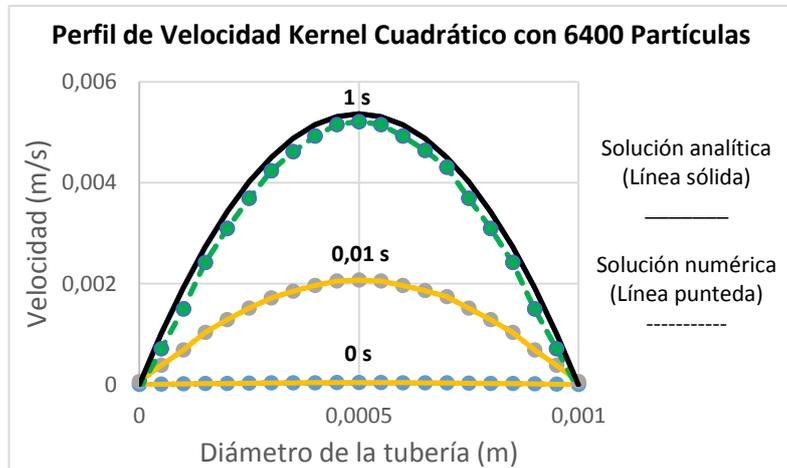


Figura 3.7 Gráfica del perfil de velocidad aplicando el kernel cuadrático con 6400 partículas. Resultados analíticos y teóricos para un diámetro de 1×10^{-3} m.

3.3.6 Simulación realizada con un diámetro de 2×10^{-3} [m], de 6400 partículas con 30 partículas vecinas, para diferentes tiempos de simulación.

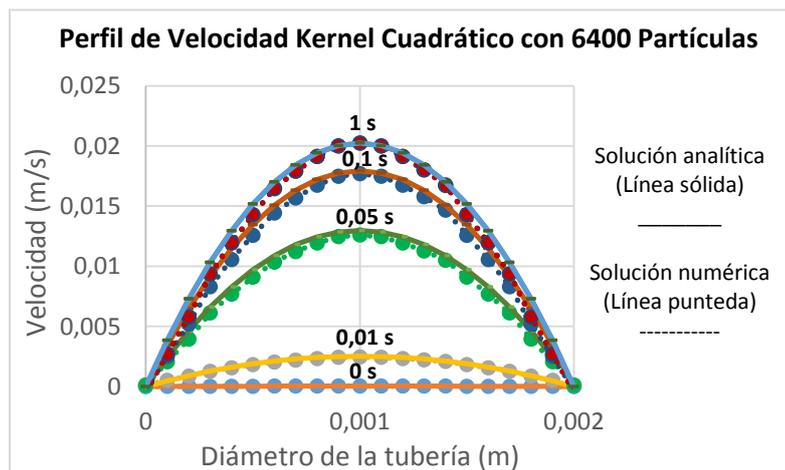
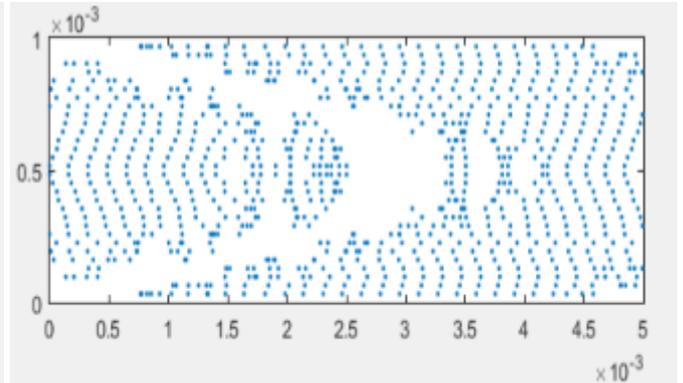
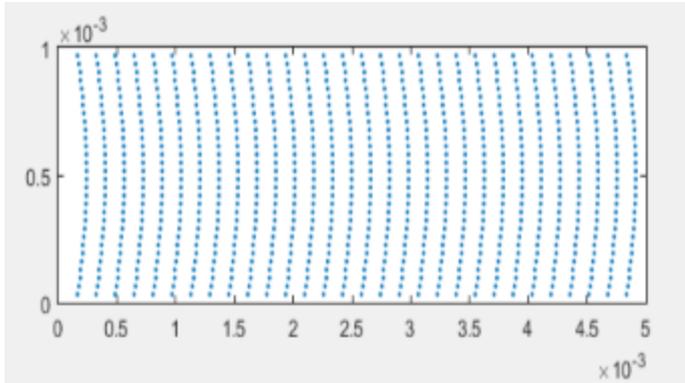


Figura 3.8 Gráfica del perfil de velocidad aplicando el kernel cuadrático con 6400 partículas. Resultados analíticos y teóricos para un diámetro de 2×10^{-3} m.

Aplicando Kernel Gaussiano con un diámetro de 1×10^{-3} m

(a) Tiempo inicial: 0.01 s

Tiempo final: 0.6 s



(b) Tiempo inicial: 0.01 s

Tiempo final: 0.6 s

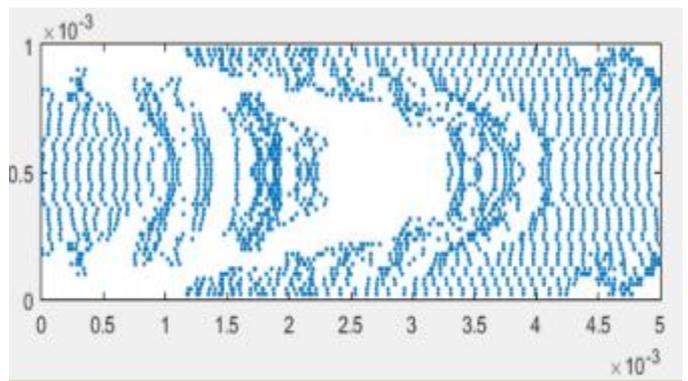
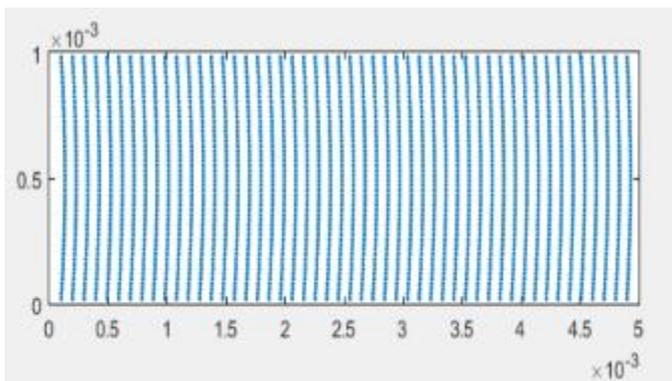
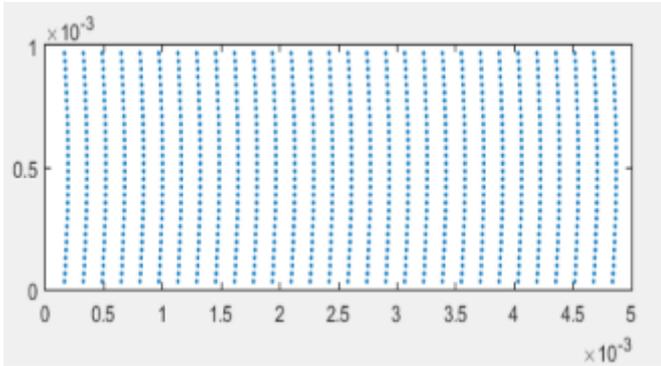


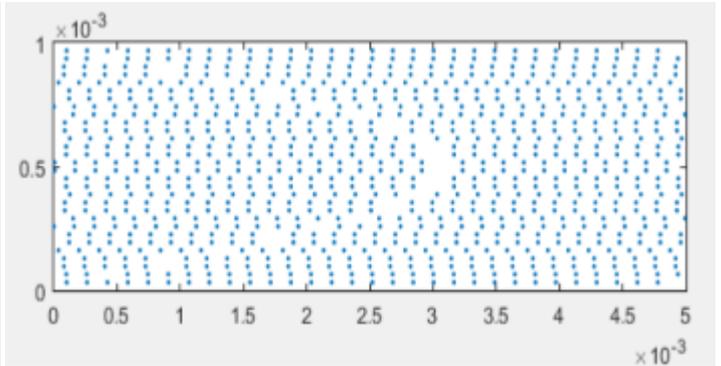
Figura 3.9 Simulación de (a) 900 partículas y (b) 2500 partículas aplicando el kernel gaussiano y diámetro de 1×10^{-3} m. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.

Aplicando Kernel Cuadrático con un diámetro de 1×10^{-3} m

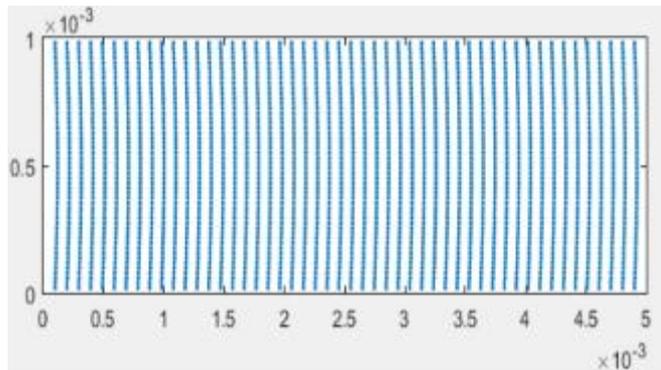
(a) Tiempo inicial: 0.01 s



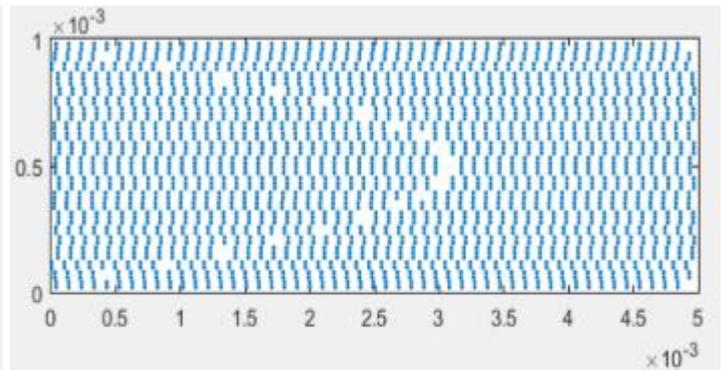
Tiempo final: 0.6 s



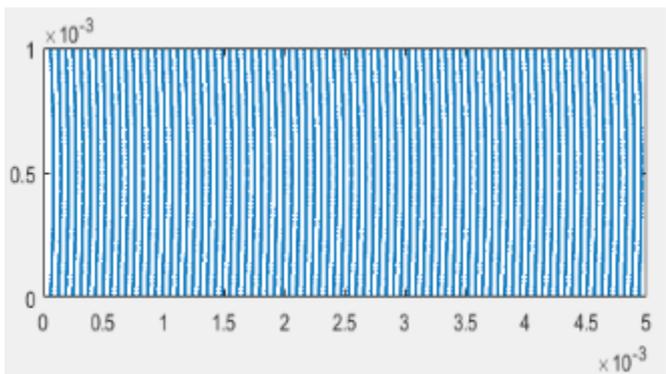
(b) Tiempo inicial: 0.01 s



Tiempo final: 0.6 s



(c) Tiempo inicial: 0.01 s



Tiempo final: 0.6 s

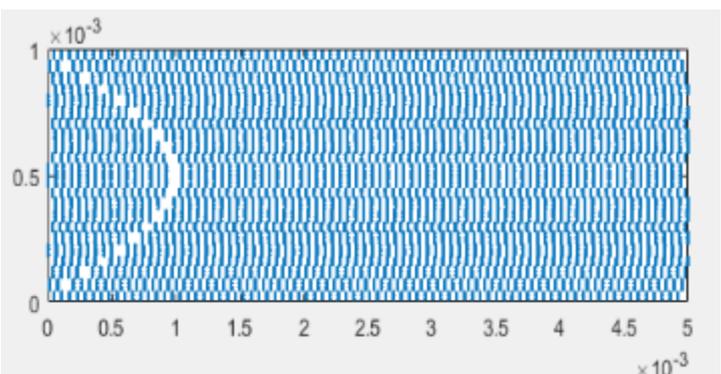


Figura 3.10 Simulación de (a) 900 partículas, (b) 2500 partículas y (c) 6400 partículas aplicando el kernel cuadrático y diámetro de 1×10^{-3} m. Posiciones de las partículas al inicio y final de la simulación.

Una vez que se obtuvo la solución numérica de la ecuación de NS para el flujo de Poiseuille no estacionario, se comparó con el modelo teórico para estimar un valor en el que las condiciones de simulación sean las de mayor precisión midiendo el error relativo a la solución analítica. Las tablas 5 y 6 muestran el error relativo obtenido para las configuraciones utilizadas en las simulaciones, para cada kernel de interpolación y diferentes longitudes de simulación.

Tabla 5. Error relativo obtenido con diámetro de la tubería de 2×10^{-3} m

	Error Relativo Kernel Gaussiano	Error Relativo Kernel Cuadrático
900 partículas simuladas (5 partículas de vecinas)	6.57%	5.54%
2500 partículas simuladas (10 partículas de vecinas)	4.28%	4.51%
6400 partículas simuladas (30 partículas de vecinas)	Diverge	3.86%

Tabla 6. Error relativo obtenido con diámetro de la tubería de 1×10^{-3} m

	Error Relativo Kernel Gaussiano	Error Relativo Kernel Cuadrático
900 partículas simuladas (19 partículas de vecinas)	11.9%	10%
2500 partículas simuladas (47 partículas de vecinas)	14.26%	6.07%
6400 partículas simuladas (100 partículas de vecinas)	Diverge	5.95%

Finalmente, se evaluó la evolución del error en función del tiempo, para las diferentes escalas de simulación y los dos kernel utilizados.

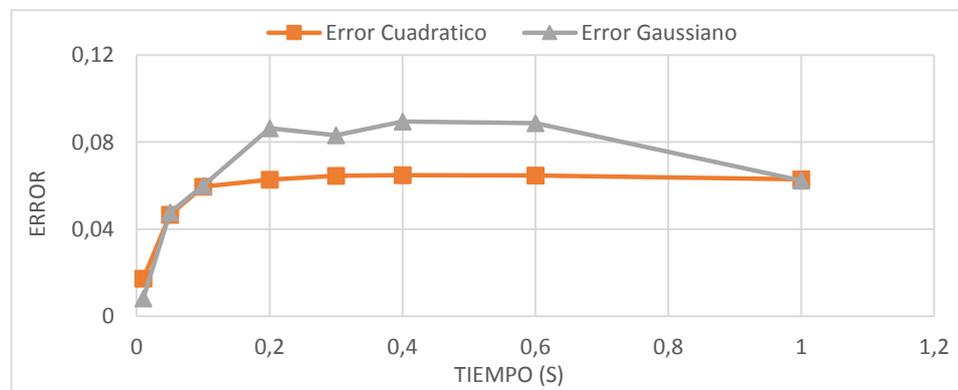


Figura 3.11 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 2×10^{-3} y 900 partículas.

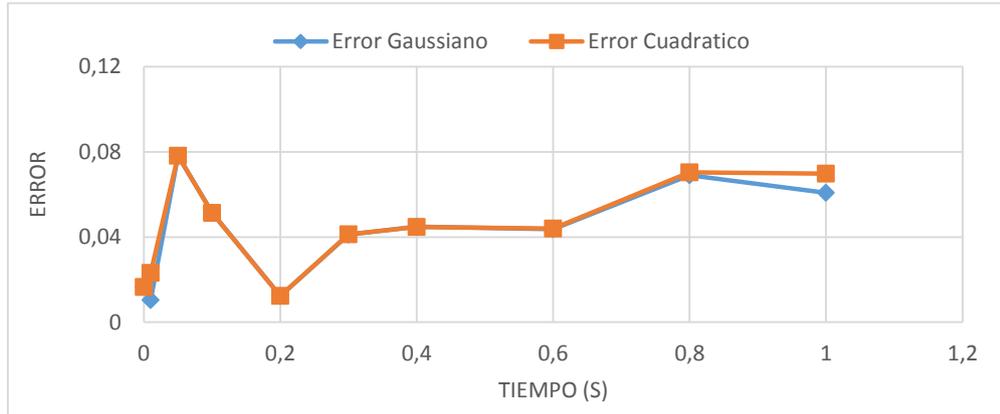


Figura 3.12 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 2×10^{-3} y 2500 partículas.

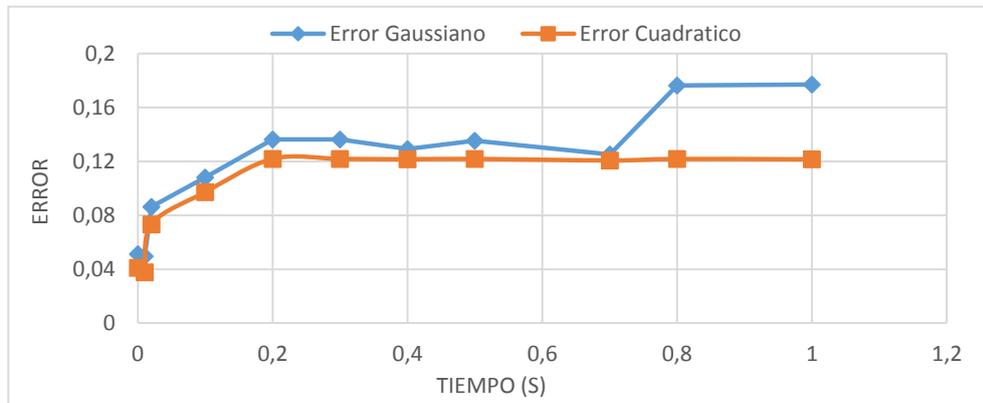


Figura 3.13 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 1×10^{-3} y 900 partículas.

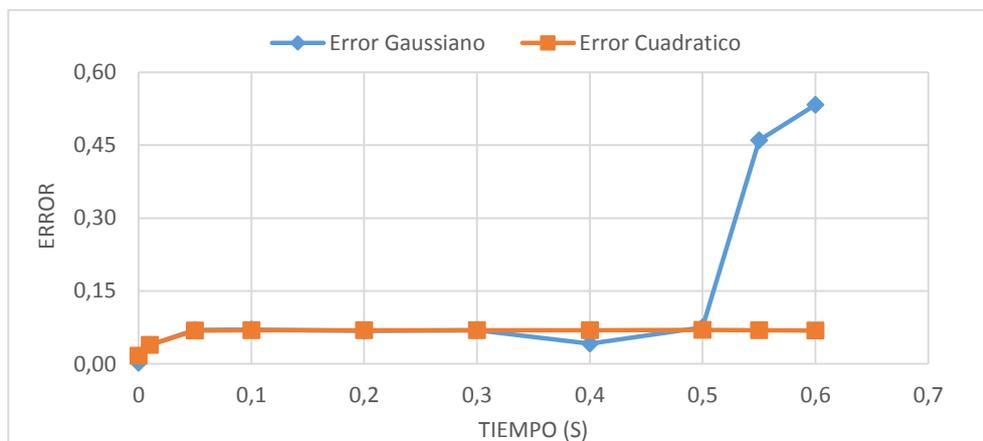


Figura 3.14 Comparación de los errores en función del tiempo, para el diámetro de tubería de 1×10^{-3} y 2500 partículas.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El código desarrollado mediante la técnica SPH permitió modelar la dinámica de un fluido en una tubería con fronteras periódicas, calcular el campo de velocidades como solución numérica, introducir el término de viscosidad artificial para mejorar la solución y estudiar el caso no estacionario.

Los resultados obtenidos en la comparación de la solución analítica para un flujo del tipo Poiseuille y de fronteras periódicas reportados en las figuras 3.1, 3.2, 3.7 y 3.8, muestran perfiles de velocidad parabólicos que concuerdan con la solución analítica. Sin embargo, para los casos 3.5 y 3.6 que corresponden al kernel gaussiano y cuadrático utilizando 900 y 2500 partículas se pierde el perfil parabólico, mostrando inconsistencias en la solución numérica, el caso de 6400 partículas utilizando el kernel gaussiano no se muestra debido a que los valores salieron del dominio numérico del computador.

Las tablas 5 y 6 muestran que el error relativo a la solución analítica disminuye al aumentar el número de partículas como ya ha sido reportado anteriormente (Gingold & Monaghan, 1977). Sin embargo, las simulaciones divergen para un número de partículas superior a 2500 cuando se emplea el kernel gaussiano. Mientras que para el Kernel Cuadrático la solución converge y el error relativo disminuye.

Las gráficas 3.11 y 3.12 de 900 y 2500 partículas para el diámetro de 2×10^{-3} [m] respectivamente muestran la evolución del error a diferentes pasos de tiempo, observando poca variación independientemente del kernel utilizado, sin embargo, en las gráficas 3.13 y 3.14 para un diámetro de 1×10^{-3} [m] muestran que el error se incrementa para el kernel gaussiano mientras que se mantiene estable para el cuadrático a medida que transcurre el tiempo de simulación.

Al analizar la influencia de la escala de la simulación se observa que para el caso de un diámetro mayor (2×10^{-3} m) el error porcentual disminuye. Esto es atribuible a que en las simulaciones el tamaño de la longitud de suavizado (h) se mantuvo fijo. Al disminuir el tamaño de la tubería, el tamaño de h comparativamente se hace mayor y el error aumenta, esto es también consistente con lo reportado en la literatura.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES Y
RECOMENDACIONES

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Se logró llevar a cabo la simulación de un líquido newtoniano que circula por una tubería a través de fronteras periódicas, mediante la elaboración de un código en MatLab a partir de la técnica SPH.

Se analizó y comparó la solución analítica con la solución numérica mediante las gráficas obtenidas de los perfiles de velocidad en estado no estacionario para cada paso de tiempo utilizando dos tipos de funciones de kernel.

A medida que se aumentaba el número de partículas y se disminuía el tamaño de “ h ” el error relativo a la solución numérica disminuyó, obteniendo un error de 3.86% con 6400 partículas y el Kernel cuadrático. El Kernel gaussiano divergía y presentaba problemas de estabilidad que se acentuaban al incrementar el número de partículas, por lo que solo puede ser utilizado para simulaciones de pocas partículas.

Los resultados muestran que las fronteras periódicas utilizadas introducen un error que puede ser minimizado al aumentar el número de partículas y disminuir el tamaño de “ h ”, en donde el kernel cuadrático genera resultados más estables y consistentes. Para fluidos incompresibles se debe tener en cuenta que la solución converge solo para números pequeños de Reynolds (flujos laminares), es decir, diámetros de la tubería pequeños y velocidades de flujo bajas.

RECOMENDACIONES

Se recomienda continuar con este método para la simulación de fluidos a través de tuberías, implementando nuevas variables que permitan mejorar la precisión a través de modificaciones que permitan:

- ✓ Aumentar el número de partículas en la simulación a través de la optimización de los métodos de búsqueda de vecinos.
- ✓ Utilizar un radio de suavizado (h) variable el cual se adapte a la configuración de la tubería, evitando así tomar partículas que están fuera del dominio computacional.
- ✓ Evaluar otras funciones de suavizado que ayuden a la convergencia de la solución del sistema.
- ✓ Incorporar partículas fantasmas en las fronteras del sistema, para tener consistencia en la densidad del fluido.

Utilizando el método SPH se podrían también evaluar fluidos dependientes de la temperatura al introducir un factor difusivo en las ecuaciones de movimiento.

REFERENCIAS

- Alvarado-Rodríguez, C. E., Klapp, J., Sigalotti, L. D. G., Domínguez, J. M., & Cruz Sánchez, E. de la. (2017). Nonreflecting outlet boundary conditions for incompressible flows using SPH. *Journal of Computers & Fluids*, 159, 177–188. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2017.09.020>
- Benz, W., & Asphaug, E. (1995). Simulations of brittle solids using SPH. *Computer Physics Communications*, 87, 253–265.
- Campbell, P. M. (1989). *Some New Algorithms for Boundary Value Problems in Smooth Particle Hydrodynamics* (Technical Report DNA-TR-88-286).
- Chen, Z., Zong, Z., Liu, M. B., Zou, L., Li, H. T., & Shu, C. (2015). An SPH model for multiphase flows with complex interfaces and large density differences. *Journal of Computational Physics*, 283, 169–188. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.11.037>
- Cleary, P. W., Prakash, M., Das, R., & Ha, J. (2012). Modelling of metal forging using SPH. *Applied Mathematical Modelling*, 36(8), 3836–3855. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.019>
- Costarelli, S. (2011). *Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando CUDA* (Tesina). Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Retrieved from <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/cimec-repo/article/view/3735../3657>
- Crespo, A. J. C. (2008). *Application of the Smoothed Particle Hydrodynamics model SPHysics to free-surface hydrodynamics* (PhD Thesis). Universidad de Vigo, Departamento de Física Aplicada.
- Friedrich, F. E., & Álvarez, F. J. . (2016). *La conservación de la energía en los fluidos: hidrodinámica, hidrostática y termodinámica*.
- Gingold, R. A., & Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(3), 375–389. <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>
- Gratton, J. (2002). *Introducción a la Mecánica de Fluidos*. Buenos Aires.
- Guo, K., Sun, P. nan, Cao, X. yan, & Huang, X. (2017). A 3-D SPH model for simulating water flooding of a damaged floating structure. *Journal of Hydrodynamics*, 29(5), 831–844. [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(16\)60795-3](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60795-3)
- Hirschler, M., Kunz, P., Huber, M., Hahn, F., & Nieken, U. (2016). Open boundary conditions for ISPH and their application to. *Journal of Computational Physics*, 307, 614–633. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.12.024>

- Jin, G., & Braza, M. (1993). A Nonreflecting Outlet Boundary Condition for Incompressible Unsteady Navier-Stokes Calculations. *Journal of Computational Physics*, 107, 239–253. <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1140>
- Libersky, L., Petschek, A., Carney, T., Hipp, J., & Allahdadi, F. (1993). High Strain Lagrangian Hydrodynamics A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response.pdf. *Journal of Computational Physics*, 109, 67–75. <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1199>
- Limache, A. C., & Rojas, P. S. (2012). Simulación en tiempo real de fluidos y sólidos rígidos, *XXXI*, 13–16.
- Liu, G., & Liu, M. (2003). *Smoothed Particle Hydrodynamics: A meshfree particle method*. World Scientific.
- Lo, E. Y. M., & Shao, S. (2002). Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method. *Applied Ocean Research*, 24(5), 275–286. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(03\)00002-6](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(03)00002-6)
- López Tapia, A. (2015). *Resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes* (Grado en Física). Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias. Retrieved from [https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/7798/Adriana Cavada Lopez-Tapia.pdf?sequence=1](https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/7798/Adriana_Cavada_Lopez-Tapia.pdf?sequence=1)
- Lucy, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82, 1013–1024. <https://doi.org/10.1086/112164>
- Maindl, T. I., Schäfer, C., Speith, R., Süli, A., Forgács-Dajka, E., & Dvorak, R. (2013). SPH-based simulation of multi-material asteroid collisions. *Astronomische Nachrichten*, 334(9), 996–999. <https://doi.org/10.1002/asna.201311979>
- Mokos, A., Rogers, B. D., Stansby, P. K., & Domínguez, J. M. (2015). Multi-phase SPH modelling of violent hydrodynamics on GPUs. *Computer Physics Communications*, 196, 304–316. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2015.06.020>
- Monaghan, J. J. (1988). An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, 48(1), 89–96. [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(88\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0010-4655(88)90026-4)
- Monaghan, J. J. (1990). Modelling the Universe. *Astronomical Society of Australia*, 8(3), 233–237.
- Monaghan, J. J. (1994). Simulating Free Surface Flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110(2), 399–406. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034>
- Monaghan, J. J. (2005). Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68(8), 1703–1759. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01>
- Nair, P., & Pöschel, T. (2018). Dynamic capillary phenomena using Incompressible SPH. *Chemical Engineering Science*, 176(October), 192–204. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.10.042>
- Niu, X., & Yu, J. (2015). A modified SPH model for simulating water surface waves. *Procedia Engineering*, 116(1), 254–261.

<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.288>

- Orrego, S. (2009). Simulación de fluidos utilizando computadores.
- Pereira, G. G., Cleary, P. W., & Lemiale, V. (2017). SPH method applied to compression of solid materials for a variety of loading conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 44, 72–90. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.12.009>
- Randles, P., & Libersky, L. (1996). Smoothed Particle Hydrodynamics : Some recent improvements and applications. *Journal of Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 7825(96), 375–408. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0)
- Rasio, F. A., & Lombardi, J. C. (1999). Smoothed Particle Hydrodynamics Calculation of Stellar Interactions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 109, 213–230. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(99\)00159-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(99)00159-4)
- Riaño, F. (2014). El nacimiento de la Hidrodinámica Teórica. *Revista de Ingeniería Hidráulica Y Ambiental*, XXXV(2), 66–78. Retrieved from http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1680-03382014000200005&lng=es&tlng=es
- Robinson, J. C. (2013). Attractors and Finite-Dimensional Behaviour in the 2D Navier-Stokes Equations. *ISRN Mathematical Analysis*, 2013, 29. <https://doi.org/10.1155/2013/291823>
- Sánchez, J. (2004). Dinámica de fluidos computacional (pp. 65–72).
- Schäfer, C., Riecker, S., Maindl, T. I., Speith, R., Scherrer, S., & Kley, W. (2016). A smooth particle hydrodynamics code to model collisions between solid, self-gravitating objects. *Astronomy & Astrophysics*, 19, 18. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201528060>
- Shadloo, M. S., Oger, G., & Le Touzé, D. (2016). Smoothed particle hydrodynamics method for fluid flows, towards industrial applications: Motivations, current state, and challenges. *Computers & Fluids*, 136, 11–34. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.05.029>
- Shames, I. H. (1995). Nociones Fundamentales. In *Mecánica de Fluidos* (3rd ed., pp. 3–27). Santafé de Bogotá: McGrawHill.
- Shi, H., Yu, X., & Dalrymple, R. A. (2017). Development of a two-phase SPH model for sediment laden flows. *Computer Physics Communications*, 221, 259–272. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.08.024>
- Sigalotti, L. D. G., Klapp, J., Sira, E., Meleán, Y., & Hasmy, A. (2003). SPH simulations of time-dependent Poiseuille flow at low Reynolds numbers. *Journal of Computational Physics*, 191(2), 622–638. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00343-7](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00343-7)
- Sokolowski, J., & Banks, C. (Eds.). (2009). A brief history of modeling and simulation. In *Principles of Modeling and Simulation: A multidisciplinary approach* (1st ed., pp. 7–15). Wiley.
- Violeau, D., Buvat, C., Abed-Meraim, K., & de Nanteuil, E. (2007). Numerical modelling of boom and oil spill with SPH. *Coastal Engineering*, 54(12), 895–

913. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2007.06.001>

White, F. M. (2003). *Mecánica De Fluidos* (5th ed.). Madrid: McGrawHill.

Xu, R., Stansby, P., & Laurence, D. (2009). Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach. *Journal of Computational Physics*, 228(18), 6703–6725. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.05.032>

Zhang, A., Sun, P., Ming, F., & Colagrossi, A. (2017). Smoothed particle hydrodynamics and its applications in fluid-structure. *Journal of Hydrodynamics*, 29(2), 187–216. [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(16\)60730-8](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60730-8)

SIMBOLOGÍA

ρ ; densidad

m ; masa

V ; volumen

p ; cantidad de movimiento

\vec{v} ; velocidad

U ; energía interna

E_c ; energía cinética

E_p ; energía potencial

Q ; calor

W ; trabajo

H ; entalpía

S ; entropía

T ; temperatura

A ; cualquier campo variable

W ; función de suavizado

δ ; función delta de dirac

h ; radio de suavizado

Π ; viscosidad artificial

t ; tiempo

d ; radio de la tubería

ν ; viscosidad cinemática

v_0 ; velocidad inicial

