



<b>AÑO:</b> 2019 - 2020	<b>PERIODO:</b> SEGUNDO TÉRMINO
<b>MATERIA:</b> ECUACIONES DIFERENCIALES <b>COORDINADOR:</b> Antonio Chong Escobar	<b>PROFESORES:</b> <b>P1:</b> Antonio Chong Escobar; <b>P4&amp;6&amp;11:</b> Jennifer Avilés Monroy; <b>P5&amp;12:</b> José Castro Carrasco; <b>P7&amp;17:</b> C. Mario Celleri Mujica; <b>P8&amp;14:</b> Elvis Aponte Valladares; <b>P9&amp;15:</b> Hernando Sánchez Caicedo; <b>P16:</b> Liliana Rebeca Pérez. (P: Paralelo)
<b>EVALUACIÓN:</b> SEGUNDA	<b>FECHA:</b> 27 DE ENERO DE 2020

<b>COMPONENTE TEÓRICO</b>	
EXAMEN (50 Puntos)	
PROM. LECCIONES + PROM. PRUEBAS DE LECTURA	
<b>TOTAL (100 Puntos)</b>	

### COMPROMISO DE HONOR QUE DEBE LLENAR PARA QUE SU EXAMEN SEA CALIFICADO

Yo, ..... al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que NO puedo usar calculadora ni equipos electrónicos, que sólo puedo usar lápiz o esferográfico, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción de esta evaluación y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte frontal del aula, junto con algún otro material que haya traído conmigo. Además, reconozco que no debo consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y que los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

*Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.*

"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni deajo copiar".

**FIRMA:** \_\_\_\_\_ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** \_\_\_\_\_ **PARALELO:** \_\_\_\_\_

### SOLUCIÓN Y RÚBRICA

#### **Tema 1 (5 Puntos: 1 punto cada literal)**

**Complete las siguientes frases.**

- a) Se conoce que  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^{-1}$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación  $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$ . Las funciones  $h_1(x)$  y  $h_2(x)$  de una solución particular de la forma  $y_p(x) = x h_1(x) + x^{-1} h_2(x)$  para la ecuación  $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x \ln(x)$  deben satisfacer el

sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} x h_1' + x^{-1} h_2' = 0 \\ h_1' - x^{-2} h_2' = \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$$

- b) La transformada inversa de Laplace de  $F(s) = 2 + 7e^{-s}$  es:  $f(t) = 2\delta_0(t) + 7\delta_1(t)$ ; donde  $\delta$  es la función delta de Dirac.

- c) La transformada de Laplace de la función  $f(t) = \mu_\pi(t)\mu_{2\pi}(t)$  es igual a  $F(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s}$ ;  $s > 0$ .

- d) La transformada inversa de Laplace de la función  $\frac{e^{-3s}}{s^2 - \pi^2}$  es igual a  $\frac{1}{\pi} u_3(t) \sinh(\pi(t - 3))$ .

- e) Sea  $B_{4 \times 4}$  una matriz con 4 valores propios reales y diferentes, tal que  $V_i$  es un vector propio para el valor propio  $r_i$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Entonces, la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales  $w'(t) = Bw(t)$  es:

$$w(t) = c_1 e^{r_1 t} V_1 + c_2 e^{r_2 t} V_2 + c_3 e^{r_3 t} V_3 + c_4 e^{r_4 t} V_4, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

---

**Tema 2 (9 Puntos)**

Resuelva el siguiente sistema  $\begin{cases} y''(t) - 4z(t) = 0 \\ z''(t) - 4y(t) = 0 \end{cases}$ , empleando el método del operador diferencial.

**Solución:**

Expresando el sistema en términos del operador diferencial se tiene:

$$\begin{cases} D^2y - 4z = 0 \\ D^2z - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D^2y - 4z = 0 \\ -4y + D^2z = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $D^2$  y la segunda ecuación por 4:

$$\begin{cases} D^4y - 4D^2z = 0 \\ -16y + 4D^2z = 0 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones resultantes se obtiene:  $D^4y - 16y = 0$ .

La solución de este tipo de ecuación se plantea de la forma:  $y(x) = e^{rx}$ , con lo cual:

$$y'(x) = re^{rx} \rightarrow y''(x) = r^2e^{rx} \rightarrow y'''(x) = r^3e^{rx} \rightarrow y^{(4)}(x) = r^4e^{rx}.$$

Al sustituir la solución planteada y sus derivadas en la ecuación se obtiene:

$$r^4e^{rx} - 16e^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx}(r^4 - 16) = 0 \rightarrow (r - 2)(r + 2)(r - 2i)(r + 2i) = 0$$

Así, los valores de  $r$  son:  $r_1 = 2$  ;  $r_2 = -2$  ;  $r_{3,4} = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\lambda} i$ .

Entonces, la solución general de la ecuación es igual a:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + c_3e^{\alpha t} \cos(2t) + c_4e^{\alpha t} \operatorname{sen}(2t); c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \\ y(t) &= c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3\cos(2t) + c_4\operatorname{sen}(2t); c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Con respecto a la incógnita  $z(t)$ , ésta puede ser obtenida de la primera ecuación del sistema como se indica a continuación:

$$y''(t) - 4z(t) = 0 \rightarrow z(t) = \frac{1}{4}y''(t)$$

La primera derivada de  $y(t)$  es igual a:

$$y'(t) = 2c_1e^{2t} - 2c_2e^{-2t} - 2c_3\operatorname{sen}(2t) + 2c_4\cos(2t); c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

La segunda derivada de  $y(t)$  es igual a:

$$y''(t) = 4c_1e^{2t} + 4c_2e^{-2t} - 4c_3\cos(2t) - 4c_4\operatorname{sen}(2t); c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$z(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\cos(2t) - c_4\operatorname{sen}(2t); c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

La solución del sistema está dada por:

$$\begin{cases} y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3\cos(2t) + c_4\operatorname{sen}(2t) \\ z(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3\cos(2t) - c_4\operatorname{sen}(2t) \end{cases}; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

### Tema 3 (9 Puntos)

Usando el método de los coeficientes indeterminados, halle la solución general de la ecuación diferencial:

$$\theta''(t) - 2\theta'(t) = \cos(t) - \operatorname{sen}(2t).$$

#### Solución:

Para hallar la solución complementaria  $\theta_c(t)$  se resuelve la ecuación homogénea  $\theta''(t) - 2\theta'(t) = 0$ , planteando la solución de la forma  $\theta(t) = e^{rt}$ , con lo cual:

$$\theta'(x) = re^{rt} \rightarrow \theta''(x) = r^2e^{rt}$$

Sustituyendo la solución planteada y sus derivadas en la ecuación se tiene:

$$r^2e^{rt} - 2re^{rt} = 0 \rightarrow e^{rt}(r^2 - 2r) = 0 \rightarrow r(r - 2) = 0$$

Así, los valores de  $r$  son:  $r_1 = 0$  y  $r_2 = 2$ .

Entonces, la solución complementaria es igual a:

$$\theta_c(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\theta_c(t) = c_1 + c_2e^{2t}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para hallar una solución particular  $\theta_p(t)$ , usando el método de los coeficientes indeterminados, se halla por separado las soluciones particulares  $\theta_{p1}(t)$  y  $\theta_{p2}(t)$  correspondientes respectivamente a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\theta''(t) - 2\theta'(t) &= \cos(t) \\ \theta''(t) - 2\theta'(t) &= -\operatorname{sen}(2t),\end{aligned}$$

y luego se aplica el principio de superposición:  $\theta_p(t) = \theta_{p1}(t) + \theta_{p2}(t)$ .

De acuerdo con el método de los coeficientes indeterminados, la solución particular  $\theta_{p1}(t)$  se plantea de la forma:  $\theta_{p1}(t) = (A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t))t^s$ , donde  $s = 0$  es suficiente para que cada término de  $\theta_{p1}$  sea linealmente independiente a cada término de  $\theta_c$ . Entonces:

$$\theta_{p1}(t) = A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t) \rightarrow \theta'_{p1}(t) = A\cos(t) - B\operatorname{sen}(t) \rightarrow \theta''_{p1}(t) = -A\operatorname{sen}(t) - B\cos(t)$$

Sustituyendo  $\theta_{p1}$  y sus derivadas en la ecuación se tiene:

$$-A\operatorname{sen}(t) - B\cos(t) - 2(A\cos(t) - B\operatorname{sen}(t)) = \cos(t)$$

$$(2B - A)\operatorname{sen}(t) + (-2A - B)\cos(t) = \cos(t)$$

$$2B - A = 0 \quad ; \quad -2A - B = 1$$

$$A = 2B \rightarrow B = -\frac{1}{5} \rightarrow A = -\frac{2}{5}$$

Entonces,  $\theta_{p1}(t) = -\frac{2}{5}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{5}\cos(t)$ .

De forma similar, la solución particular  $\theta_{p2}(t)$  se plantea de la forma:  $\theta_{p2}(t) = (A\operatorname{sen}(2t) + B\cos(2t))t^s$ , donde  $s = 0$  es suficiente para que cada término de  $\theta_{p2}$  sea linealmente independiente a cada término de  $\theta_c$ . Así:

$$\theta'_{p2}(t) = 2A\cos(2t) - 2B\operatorname{sen}(2t) \rightarrow \theta''_{p2}(t) = -4A\operatorname{sen}(2t) - 4B\cos(2t)$$

Sustituyendo  $\theta_{p2}$  y sus derivadas en la ecuación se tiene:

$$-4A\operatorname{sen}(2t) - 4B\cos(2t) - 2(2A\cos(2t) - 2B\operatorname{sen}(2t)) = -\operatorname{sen}(2t)$$

$$(4B - 4A)\operatorname{sen}(2t) + (-4A - 4B)\cos(2t) = -\operatorname{sen}(2t)$$

$$4B - 4A = -1 \quad ; \quad -4A - 4B = 0$$

$$B = \frac{1}{8} \quad \leftarrow \quad A = -\frac{1}{8} \quad \leftarrow \quad B = -A$$

Entonces,  $\theta_{p2}(t) = -\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{8}\cos(2t)$ .

Por lo tanto,  $\theta_p(t) = -\frac{2}{5}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{8}\cos(2t)$ .

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$\theta(t) = \theta_c(t) + \theta_p(t)$$

$$\theta(t) = c_1 + c_2e^{2t} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{8}\cos(2t); c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

**Tema 4 (9 Puntos)**

Sea  $F(s) = L[f(t)]$  la transformada de Laplace de  $f(t)$ . Determine  $f(t)$  si  $F(s) = \frac{1}{(s-4)^7} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$ .

Solución:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^7} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right]$$

Aplicando la propiedad de linealidad se tiene:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^7}\right] + \frac{1}{2} L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right]$$

Aplicando uno de los teoremas de traslación de la transformada de Laplace:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^7}\right] = e^{4t} L^{-1}\left[\frac{1}{s^7}\right] = e^{4t} \frac{1}{6!} L^{-1}\left[\frac{6!}{s^7}\right] = e^{4t} \frac{1}{6!} t^6; t \geq 0.$$

Aplicando propiedades de los logaritmos:

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = L^{-1}[2 \ln(s) - \ln(s^2 + 1)]$$

Usando la propiedad de linealidad de la transformada inversa de Laplace:

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = 2L^{-1}[\ln(s)] - L^{-1}[\ln(s^2 + 1)]$$

Utilizando el corolario que establece que  $L^{-1}[F(S)] = \frac{1}{t^n} (-1)^n L^{-1}\left[\frac{d^n}{dS^n}(F(S))\right]$  con  $n = 1$ :

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = -\frac{2}{t} L^{-1}\left[\frac{d}{ds}(\ln(s))\right] + \frac{1}{t} L^{-1}\left[\frac{d}{ds}(\ln(s^2 + 1))\right]$$

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = -\frac{2}{t} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{t} L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+1}\right]$$

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)\right] = -\frac{2}{t} + \frac{1}{t} 2\cos(t); t > 0$$

Finalmente, se tiene que:

$$f(t) = e^{4t} \frac{1}{6!} t^6 + \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{t} + \frac{1}{t} 2\cos(t)\right]; t > 0$$

$$f(t) = e^{4t} \frac{1}{6!} t^6 + \frac{\cos(t)-1}{t}; t > 0$$

---

**Tema 5 (9 Puntos)**

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, utilizando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x' + 4 \int_0^t y(x) dx = t - \operatorname{sen}(t) \\ x' = y' - \operatorname{sen}(t) \end{cases}, \text{ tal que } x(0) = y(0) = 0.$$

**Solución:**

Remplazando  $x'(t)$  de la segunda ecuación en la primera ecuación:

$$y'(t) - \operatorname{sen}(t) + 4 \int_0^t y(x) dx = t - \operatorname{sen}(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada lado de la ecuación y luego aplicando propiedad de linealidad se tiene:

$$L[y'(t)] + 4 L \left[ \int_0^t y(x) dx \right] = L[t]$$

- $L[y'(t)] = sY(s) - y(0) = sY(s)$
- $L \left[ \int_0^t y(x) dx \right] = \frac{1}{s} Y(s)$
- $L[t] = \frac{1}{s^2}$

Sustituyendo los resultados de las transformadas obtenidas:

$$sY(s) + \frac{4}{s} Y(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow Y(s) \left[ s + \frac{4}{s} \right] = \frac{1}{s^2} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left[ \left( \frac{1}{s} \right) \left( \frac{1}{s^2 + 4} \right) \right] \\ y(t) &= L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] * L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 4} \right] \\ y(t) &= 1 * \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) \\ y(t) &= \int_0^t \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) dx \\ y(t) &= \frac{1}{4} [-\cos(2x)]_0^t \\ y(t) &= \frac{1}{4} [-\cos(2t) + 1] \\ y(t) &= \frac{1 - \cos(2t)}{4} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación del sistema se tiene:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y'(t) - \operatorname{sen}(t) \\ x'(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) - \operatorname{sen}(t) \\ x(t) &= \int \left[ \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) - \operatorname{sen}(t) \right] dt \\ x(t) &= -\frac{1}{4} \cos(2t) + \cos(t) + c; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Evaluando la condición inicial  $x(0) = 0$ :

$$-\frac{1}{4} + 1 + c = 0 \rightarrow c = -\frac{3}{4}$$

Entonces:

$$x(t) = -\frac{1}{4} \cos(2t) + \cos(t) - \frac{3}{4}$$

La solución del problema está dada por:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{4} \cos(2t) + \cos(t) - \frac{3}{4} \\ y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2t) \end{cases}$$

## Tema 6 (9 Puntos)

Para la ecuación  $xy''(x) + y(x) = 0$  determine los puntos ordinarios y los puntos singulares. Luego, realice el cambio de variable  $z = x - 1$  para determinar la solución  $y(x)$  alrededor de  $x_0 = 1$ .

### Solución:

Sean  $P(x) = 1$ ,  $Q(x) = 0$  y  $R(x) = 1$ , los coeficientes de  $y''(x)$ ,  $y'(x)$  y  $y(x)$ . Puesto que estas funciones son polinomiales y no hay factores que las tres funciones tengan en común, entonces los valores  $x_0$  para los cuales  $P(x_0) \neq 0$  se denominan puntos ordinarios y los demás puntos se denominan singulares. Entonces,  $x_0 = 0$  es un punto singular y los demás números reales son puntos ordinarios para la ecuación analizada.

A partir del cambio de variable  $z = x - 1$  se tiene que:

$$\frac{dz}{dx} = 1 \quad ; \quad x = z + 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dz}\right)}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2} \quad ; \quad x_0 = 1 \equiv z_0 = 0$$

Sustituyendo en la ecuación las expresiones obtenidas se tiene:

$$(z + 1) \frac{d^2y}{dz^2} + y(z) = 0 \quad ; \quad z_0 = 0$$

Se plantea la solución de la forma  $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , con lo cual:

$$y'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad ; \quad y''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$(z + 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

Para que  $z$  tenga el mismo exponente en todas las series, se realiza el cambio de variable  $m = n - 1$  en la primera serie y  $m = n - 2$  en la segunda serie, y luego se realiza un cambio de variable adicional  $m = n$  en ambos resultados, como se muestra a continuación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

Desarrollando términos iniciales para que los índices de todas las series inicien en el mismo valor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} z^n + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 0 \\ a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1) n a_{n+1} + (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] z^n = 0$$

Igualando coeficientes se tiene:

$$a_0 + 2a_2 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$(n+1) n a_{n+1} + (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{n}{n+2} a_{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Generando algunos coeficientes iniciales adicionales:

$$n = 1: \quad a_3 = -\frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{3(2)} a_1 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3!} a_0 - \frac{1}{3!} a_1$$

$$n = 2: \quad a_4 = -\frac{1}{2} a_3 - \frac{1}{4(3)} a_2 \quad \rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{4(3)} a_0 + \frac{1}{3(4)} a_1 + \frac{1}{4!} a_0 \quad \rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{4!} a_0 + \frac{2}{4!} a_1$$

$$n = 3: \quad a_5 = -\frac{3}{5} a_4 - \frac{1}{5(4)} a_3 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{3}{5!} a_0 - \frac{3(2)}{5!} a_1 - \frac{1}{5!} a_0 + \frac{1}{5!} a_1 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{2}{5!} a_0 - \frac{5}{5!} a_1$$

$$n = 4: \quad a_6 = -\frac{4}{6} a_5 - \frac{1}{6(5)} a_4 \quad \rightarrow \quad a_6 = -\frac{8}{6!} a_0 + \frac{20}{6!} a_1 + \frac{1}{6!} a_0 - \frac{2}{6!} a_1 \quad \rightarrow \quad a_6 = -\frac{7}{6!} a_0 + \frac{18}{6!} a_1$$

Entonces la solución para  $y(z)$  está dada por:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \dots \\ y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z - \frac{a_0}{2} z^2 + \left(\frac{1}{3!} a_0 - \frac{1}{3!} a_1\right) z^3 + \left(-\frac{1}{4!} a_0 + \frac{2}{4!} a_1\right) z^4 + \left(\frac{2}{5!} a_0 - \frac{5}{5!} a_1\right) z^5 + \dots \\ y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 \left(1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 - \frac{1}{4!} z^4 + \frac{2}{5!} z^5 - \dots\right) + a_1 \left(z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{2}{4!} z^4 - \frac{5}{5!} z^5 + \dots\right)$$

Entonces la solución para  $y(x)$ , de acuerdo con el cambio de variable utilizado, está dada por:

$$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3!} (x-1)^3 - \frac{1}{4!} (x-1)^4 + \frac{2}{5!} (x-1)^5 - \dots\right) + \\ a_1 \left((x-1) - \frac{1}{3!} (x-1)^3 + \frac{2}{4!} (x-1)^4 - \frac{5}{5!} (x-1)^5 + \dots\right)$$

### Tema 1 (5 Puntos)

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje (PARA CADA LITERAL)	
	Inicial	Excelencia
Completar frases conceptuales relacionadas a los capítulos del segundo parcial.	Deja el espacio en blanco o completa de forma incorrecta.	Completa la frase conceptual de forma correcta (se debe presentar una justificación de la respuesta donde el profesor considere necesario).
<b>Puntaje</b>	0	1

### Tema 2 (9 Puntos)

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelencia
Determinar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, usando el método del operador diferencial.	Expresa el sistema en términos del operador diferencial, <b>pero no obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita.</b>	Expresa el sistema en términos del operador diferencial <b>y obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita, pero no</b> resuelve dicha ecuación.	Expresa el sistema en términos del operador diferencial, <b>obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita</b> y la resuelve, <b>pero no obtiene la segunda función incógnita.</b>	Expresa el sistema en términos del operador diferencial, <b>obtiene una ecuación en términos de una sola función incógnita</b> y la resuelve. <b>Finalmente, obtiene la segunda función incógnita.</b>
<b>Puntaje</b>	[0 , 2]	(2 , 3]	(3 , 7]	(7, 9]

### Tema 3 (9 Puntos)

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelencia
Determinar la solución general de una EDO lineal de segundo orden no homogénea, usando el método de los coeficientes indeterminados para hallar una solución particular.	Halla la solución complementaria, <b>pero no plantea la forma de la solución particular.</b>	Halla la solución complementaria <b>y plantea la forma de la solución particular, pero no</b> halla dicha solución particular.	Halla la solución complementaria, <b>plantea la forma de la solución particular y halla dicha solución particular, pero no</b> presenta la solución general.	Halla la solución complementaria, <b>plantea la forma de la solución particular, halla dicha solución particular</b> y presenta la solución general.
<b>Puntaje</b>	[0 , 2]	(2 , 4]	(4 , 8]	(8 , 9]

**Tema 4 (9 Puntos)**

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelencia
Determinar la transformada inversa de Laplace de una función, utilizando teoremas, corolarios y transformadas de funciones básicas.	Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa, <b>pero no obtiene las transformadas inversas planteadas.</b>	Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa <b>y halla la transformada inversa de <math>\frac{1}{(s-4)^7}</math>, pero no halla la transformada inversa de <math>\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)</math>.</b>	Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa, <b>halla la transformada inversa de <math>\frac{1}{(s-4)^7}</math> y plantea una manera de hallar la transformada inversa de <math>\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)</math>, pero no halla esta última transformada inversa.</b>	Aplica la propiedad de linealidad de la transformada inversa, <b>halla la transformada inversa de <math>\frac{1}{(s-4)^7}</math>, halla la transformada inversa de <math>\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)</math> y presenta la transformada inversa de <math>F(s)</math>.</b>
<b>Puntaje</b>	[0 , 1]	(1 , 4]	(4 , 6]	(6 , 9]

**Tema 5 (9 Puntos)**

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelencia
Determinar la solución de un sistema integro-diferencial, usando la transformada de Laplace.	Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida, <b>pero no halla las transformadas planteadas.</b>	Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida. <b>Halla las transformadas planteadas y obtiene una expresión para la transformada de una de las funciones incógnitas, pero no determina su transformada inversa.</b>	Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida. <b>Halla las transformadas planteadas, obtiene una expresión para la transformada de una de las funciones incógnitas y determina su transformada inversa, pero no determina la otra incógnita del sistema.</b>	Aplica la transformada a cada una de las ecuaciones del sistema, o sustituye una ecuación en la otra y aplica la transformada a la ecuación obtenida. <b>Halla las transformadas planteadas, obtiene una expresión para la transformada de una de las funciones incógnitas, determina su transformada inversa y determina la otra incógnita del sistema.</b>
<b>Puntaje</b>	[0 , 2]	(2 , 4]	(4 , 7]	(7 , 9]



**Tema 6 (9 Puntos)**

Capacidades por evaluar	Nivel de aprendizaje			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelencia
Obtener la solución general de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal usando series de potencias.	Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, <b>pero no realiza el cambio de variable ni plantea la solución usando serie de potencias alrededor de <math>z_0 = 0</math>.</b>	Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, <b>realiza el cambio de variable y plantea la solución usando serie de potencias alrededor de <math>z_0 = 0</math>, pero no</b> obtiene una ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie.	Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, <b>realiza el cambio de variable, plantea la solución usando serie de potencias alrededor de <math>z_0 = 0</math> y obtiene una ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, pero no genera coeficientes iniciales de la serie <math>y(z)</math> ni presenta la solución <math>y(x)</math>.</b>	Determina los puntos ordinarios y singulares de la EDO, <b>realiza el cambio de variable, plantea la solución usando serie de potencias alrededor de <math>z_0 = 0</math>, obtiene una ecuación de recurrencia para los coeficientes de la serie, genera coeficientes iniciales de la serie <math>y(z)</math> y presenta la solución <math>y(x)</math>.</b>
<b>Puntaje</b>	[0 , 2]	(2 , 4]	(4 , 6]	(6 , 9]