



| | |
|--|--|
| AÑO: 2020 – 2021 | PERIODO ACADÉMICO ORDINARIO 1 |
| MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES COORDINADOR: Antonio Chong Escobar | PROFESORES: Paralelos 01 y 02: Antonio Chong Escobar; Paralelos 03, 04 y 06: Hernando Sánchez Caicedo; Paralelos 07 y 08: Joseph Páez Chávez. |
| EVALUACIÓN: SEGUNDA | FECHA: 07 DE SEPTIEMBRE DE 2020 |

| COMPONENTE TEÓRICO | |
|--|--|
| EXAMEN (50 Puntos) | |
| PROM. LECCIONES + PROM. PRUEBAS DE LECTURA (50 Puntos) | |
| TOTAL (100 Puntos) | |

COMPROMISO DE HONOR

Como estudiante de la asignatura, reconozco que en la presente evaluación:

- 1) debo **ubicar la cámara de mi dispositivo**, como laptop o tablet, de forma que los profesores encargados de la evaluación tengan una visión panorámica de mi persona, las hojas en las que voy a desarrollar los temas y los apuntes que utilizaré durante la evaluación. Además, tendré **suficiente iluminación** para que mi rostro sea visible. **En el caso de que no ubique mi cámara correctamente o mi rostro no sea visible**, tendré una penalización del 100% de la calificación de la evaluación.
- 2) **estoy autorizado a comunicarme sólo con** los profesores responsables de la recepción de la evaluación.
- 3) el uso de **teléfono celular sólo es permitido para** tomar fotos de mis resoluciones escritas a mano que subiré a la plataforma establecida por el profesor de la asignatura en los formatos requeridos.
- 4) debo **resolver la evaluación de manera individual**, sin consultar con alguna otra persona de forma presencial o a través de un instrumento de comunicación, como un teléfono celular.
- 5) **no debo usar** gafas, relojes, gorras, ni audífonos.
- 6) **estoy autorizado a consultar sólo en** libros, notas o apuntes que posea en versión física.
- 7) **no debo usar calculadora**, ni cualquier otro instrumento para hacer cálculos como laptops o tablets.
- 8) **los temas los debo desarrollar de manera** ordenada y clara, siguiendo todos los lineamientos establecidos por el profesor.

Para que el examen del estudiante sea calificado:

Antes de iniciar el examen, el estudiante debe escribir a mano la siguiente **ACEPTACIÓN DEL COMPROMISO DE HONOR**, completarla, tomarle una foto en disposición vertical, convertirla en pdf, y enviarla a través de la plataforma indicada por el profesor como un archivo con el nombre:

Paralelo ## Primer Apellido Primer Nombre Ex2 CH

ACEPTACIÓN DEL COMPROMISO DE HONOR del examen de la 2da evaluación de Ecuaciones Diferenciales (2020-1)

Fecha: lunes 7 de septiembre de 2020

Yo, _____,

firmo a continuación, como constancia de haber leído y aceptado todos los 8 items del compromiso de honor.

"Como estudiante de la ESPOL **me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad**, por eso no copio ni deajo copiar".

FIRMA: _____ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** _____ **PARALELO:** _____

Ubicar aquí una identificación que tenga su foto, como cédula, carné ESPOL o licencia de conducir, para proceder a tomar la foto de la aceptación del compromiso de honor.

VERSIÓN 1 DEL EXAMEN
(EVALUADA A LOS PARALELOS 01 Y 02 DEL PROFESOR ANTONIO CHONG ESCOBAR)

(Por cada tema, debe enviar al email del profesor un archivo con el desarrollo a mano hasta la hora establecida.)

Tema 1

Literal a (10 puntos)

Utilizando series de potencias alrededor de $t_0 = 0$, determine la solución general de la ecuación diferencial ordinaria $ty''(t) + (3 + 2t)y'(t) + 6y(t) = 0$. En el caso de que alguna de las series que forman la solución general sea convergente a una función elemental, debe identificar dicha función.

Literal b (10 puntos)

Si conoce que la suma de las derivadas de primer y segundo orden de $y(x)$ da como resultado el producto entre las funciones $\sigma(x) = -x$ y $\omega(x) = \text{sen}(x)$, entonces determine la solución general de la ecuación diferencial que describe el comportamiento de $y(x)$. Para esto, no utilice la transformada de Laplace.

Tema 2

Literal a (7 Puntos)

Sea $A(S)$ la transformada de Laplace de $a(t)$. Determine una expresión para $a(1)$, si se conoce que

$$A(S) = \log_2 \left(\frac{S-2}{S+3} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-2)^n S e^{-3ns} \frac{1}{S^2 - 81} \right).$$

Literal b (13 Puntos)

Usando la transformada de Laplace, determine la solución del problema de valor inicial

$$\theta y''(\theta) - 2y'(\theta) + \theta y(\theta) = 0 ; y(0) = \frac{7}{3} ; y'(0) = k, \text{ tal que } k \text{ es una constante fija.}$$

Tema 3 (10 puntos)

Cierto sistema mecánico en el que están involucradas las constantes $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$ y $k_3 = 1$ se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/k_3 \\ -1/k_2 & -1/(k_1 k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Usando el método de valores y vectores propios, determine la solución general del sistema. Luego, encuentre $x(t)$ y $y(t)$ si $x(0) = 2$ y $y(0) = 1$. Finalmente, determine los valores límite de $x(t)$ y $y(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

VERSIÓN 2 DEL EXAMEN
(EVALUADA AL PARALELO 03 DEL PROFESOR HERNANDO SÁNCHEZ CAICEDO)

1) La solución de la ecuación $y'' + y' = 1$ es:

- a.- $y = t + c_1 e^{-t} + c_2$
- b.- $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + 1$
- c.- $y = t + c_1 e^{-t} + c_2 e^t$
- d.- $y = 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^t$

2) Para el problema siguiente determine el intervalo donde con certeza existe solución única dos veces diferenciable: $y'' + (\cos x)y' + 3(\ln|x-1|)y = 0$ $y(2) = 3$ $y'(2) = 1$

- a.- $1 < x < \infty$
- b.- $-\infty < x < \infty$
- c.- $x \geq 1$
- d.- $0 < x < 2$

3) Determine a_n de modo que se satisfaga la ecuación: $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- a.- $a_n = \frac{2^n}{n!} a_0$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- b.- $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!} a_0$ $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
- c.- $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!} a_0$ $n = 0, 1, 2, 3 \dots$
- d.- $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)!} a_0$ $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

4) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es la solución del problema $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ determine los coeficientes a_2 y a_3 .

- a.- $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = 0$
- b.- $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{2}$
- c.- $a_2 = 0$ $a_3 = \frac{1}{2}$
- d.- $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = -\frac{1}{2}$

5) Si $\mathcal{L}\{sent\} = \frac{1}{s^2+1}$ donde \mathcal{L} denota la transformada de Laplace, ¿cuál sería la transformada de $f(t) = t sent$?

- a.- $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$
- b.- $e^{-s} \left(\frac{1}{s^2+1}\right)$
- c.- $e^{-s} \left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2$
- d.- $(e^{-2s} - e^s)^2$

6) ¿Cuál es la transformada inversa de Laplace de la función: $\frac{2s}{s^2-2s-3}$?

- a.- $e^t(2 \cosh(2t) + \sinh(2t))$
- b.- $e^t(2 \cos(2t) + \sin(2t))$
- c.- $e^{2t} \cosh(2t) + e^t \sinh(2t)$
- d.- $e^{2t} \cos(2t) + e^t \sin(2t)$

7) Si $f(t) = 1 - u_1(t)$ entonces su transformada de Laplace $F(s)$ es:

- a.- $F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$
- b.- $F(s) = (1 - e^{-s})$
- c.- $F(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}$
- d.- $F(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} - 1)$

8) Para el par de vectores siguientes encuentre los puntos en que no son linealmente independientes:

$$x_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

- a.- Solo en $t = 0$
- b.- En $t = 0$ y en $t = 1$
- c.- Solo en $t = 1$
- d.- En $t = 1$ y en $t = 2$

9) (Subir archivo con detalles) Para el problema de valor inicial, muestre su solución con la transformada de Laplace:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

10) (Muestre todo el proceso) Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

VERSIÓN 3 DEL EXAMEN
(EVALUADA AL PARALELO 04 DEL PROFESOR HERNANDO SÁNCHEZ CAICEDO)

1) La solución de la ecuación $vv'' + (v')^2 = 0$ es:

- a.- $v^2 = c_1 t + c_2$
- b.- $v = \sqrt{c_1 t} + c_2$
- c.- $v = c_1 t^2 + c_2 t$
- d.- $v^2 = (c_1 t + c_2)^2$

2) Para el problema siguiente determine el intervalo donde con certeza existe solución única dos veces diferenciable: $x(x+4)y'' + 3xy' + 4y = 2$ $y(-3) = 0$ $y'(-3) = -1$

- a.- $-4 < x < 0$
- b.- $-3 < x \leq 4$
- c.- $0 < x < \infty$
- d.- $-\infty < x < 0$

3) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ calcule y'' y determine el coeficiente de x^n .

- a.- $(n+2)^2(n+1)$ para $n=0,1,2,3,\dots$
- b.- $n^2(n-1)$ para $n=0,1,2,3,\dots$
- c.- $(n+1)(n-1)$ para $n=0,1,2,3,\dots$
- d.- $(2n-2)(n+1)^2$ para $n=0,1,2,3,\dots$

4) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es la solución del problema $y'' - xy' - y = 0$ $y(0) = 1$ $y'(0) = -1$ determine los coeficientes a_2 y a_3 .

- a.- $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = -\frac{1}{3}$
- b.- $a_2 = \frac{1}{3}$ $a_3 = \frac{1}{2}$
- c.- $a_2 = 0$ $a_3 = -\frac{1}{3}$
- d.- $a_2 = \frac{1}{3}$ $a_3 = -\frac{1}{3}$

5) Si $\mathcal{L}\{cost\} = \frac{s}{s^2+1}$ donde \mathcal{L} denota la transformada de Laplace, ¿cuál sería la transformada de $f(t) = tcost$?

- a.- $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
- b.- $e^{-s} \left(\frac{1}{s^2+1}\right)$
- c.- $e^{-s} \left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2$
- d.- $(e^{-2s} - e^s)^2$

6) ¿Cuál es la transformada inversa de Laplace de la función: $\frac{2s-3}{s^2-4}$?

- a.- $2 \cosh(2t) - \frac{3}{2} \sinh(2t)$
- b.- $2 \cos(2t) - \frac{3}{2} \sen(2t)$
- c.- $2 \cos(2t) - 3 \sinh(2t)$
- d.- $2 \cos(2t) - 3 \sen(2t)$

7) Si $f(t) = tu_1(t)$ entonces su transformada de Laplace $F(s)$ es:

- a.- $F(s) = \frac{e^{-s}}{s} \left(1 + \frac{1}{s}\right)$
- b.- $F(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s})$
- c.- $F(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}$
- d.- $F(s) = \frac{1}{s} (e^{-s} - 1)$

8) Para el par de vectores siguientes encuentre los puntos en que no son linealmente independientes:

$$x_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

- a.- En $t = 0$ y en $t = 2$
- b.- Solo en $t = 0$
- c.- Solo en $t = 2$
- d.- En $t = 1$ y en $t = 2$

9) (Subir archivo con detalles) Para el problema de valor inicial, muestre su solución con la transformada de Laplace:

$$y'' - 4y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = -2 \quad y'''(0) = 0$$

10) (Muestre todo el proceso) Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

VERSIÓN 4 DEL EXAMEN
(EVALUADA AL PARALELO 06 DEL PROFESOR HERNANDO SÁNCHEZ CAICEDO)

1) La solución de la ecuación $t^2v'' + 2tv' - 1 = 0$ es:

- a.- $v = lnt + \frac{c_1}{t} + C_2$
- b.- $v = c_1lnt + \frac{c_2}{t} + 1$
- c.- $v = c_1lnt + \frac{1}{t} + C_2$
- d.- $v = \frac{c_1}{t} + C_2lnt + t$

2) Para el problema siguiente determine el intervalo donde con certeza existe solución única dos veces diferenciable: $(x + 1)y'' - 3xy' + 4y = \text{sen } x$ $y(-2) = 2$ $y'(-2) = 1$

- a.- $-\infty < x < -1$
- b.- $-1 < x < 1$
- c.- $-2 < x < 0$
- d.- $-\infty < x < -2$

3) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ calcule y'' y determine el coeficiente de x^4 en la segunda derivada.

- a.- $30a_3$
- b.- $56a_4$
- c.- $6a_3$
- d.- $12a_4$

4) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ es la solución del problema $y'' - xy' - y = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = -1$, determine los coeficientes a_2 y a_3 .

- a.- $a_2 = 0$ $a_3 = -\frac{1}{3}$
- b.- $a_2 = \frac{1}{3}$ $a_3 = -\frac{1}{3}$
- c.- $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = -\frac{1}{3}$
- d.- $a_2 = 0$ $a_3 = \frac{1}{2}$

5) Si $\mathcal{L}\{\text{cosht}\} = \frac{s}{s^2-1}$ donde \mathcal{L} denota la transformada de Laplace, ¿cuál sería la transformada de $f(t) = t \text{cosht}$?

- a.- $\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$
- b.- $e^{-s} \left(\frac{1}{s^2-1} \right)$
- c.- $e^{-s} \left(\frac{1}{s^2-1} \right)^2$
- d.- $(e^{-2s} + e^s)^2$

6) ¿Cuál es la transformada inversa de Laplace de la función: $\frac{1-2s}{s^2+4s+3}$?

- a.- $-e^{-2t}(\text{seh}(t) + 2\text{coh}(t))$
- b.- $e^t(2 \cos(t) + \text{sen}(t))$
- c.- $e^{2t} \cosh(t) + e^t \text{senh}(t)$
- d.- $e^{2t} \cos(t) + e^t \text{sen}(t)$

7) Si $f(t) = 1 - tu_1(t)$ entonces su transformada de Laplace $F(s)$ es:

- a.- $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} (1 + s)$
- b.- $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} (1 - s)$
- c.- $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} (1 - s)$
- d.- $F(s) = -\frac{e^{-s}}{s^2} (1 + s)$

8) Para el par de vectores siguientes encuentre los puntos en que no son linealmente independientes:

$$x_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a.- Solo en $t = 1$
- b.- En $t = 1$ y en $t = 2$
- c.- Solo en $t = 2$
- d.- En $t = 2$ y en $t = 3$

9) (Subir archivo con detalles) Para el problema de valor inicial, muestre su solución con la transformada de Laplace:

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

10) (Muestre todo el proceso) Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema:

$$z' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

VERSIÓN 5 DEL EXAMEN
(EVALUADA A LOS PARALELOS 07 Y 08 DEL PROFESOR JOSEPH PÁEZ CHÁVEZ)

Parte teórica

1

(5 Points)

Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de orden superior $n \geq 2$ (EDHn) estudiada en clase. Entonces, siempre se cumple que

- La EDHn tiene a lo mucho n soluciones linealmente independientes. ✓
- Si $y_1 \in C^n(I, \mathbb{R})$ es solución de la EDHn entonces αy_1 también es solución de la EDHn, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. ✓
- La EDHn tiene a lo mucho $n - 1$ soluciones linealmente independientes.
- La EDHn tiene a lo mucho 2 soluciones linealmente independientes.
- Ninguna de las opciones.

2

(5 Points)

Suponga que para una ecuación diferencial lineal homogénea (EDH) de coeficientes constantes se obtiene el polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2$. Entonces, siempre se cumple que

- La EDH es de orden 5. ✓
- Una solución de la EDH es $y(t) = t \cos(t)$. ✓
- La EDH es de orden 3.
- Una solución de la EDH es $y(t) = e^t$.
- Ninguna de las opciones.

3

(5 Points)

Considere el método de series de potencias aplicado al problema $xy'' + y = 0$ (EDH) alrededor del punto $x = 0$. Entonces, siempre se cumple que

- La EDH tiene el punto singular regular $x = 0$. ✓
- La EDH tiene la ecuación indicial $r(r - 1) = 0$. ✓
- La EDH tiene el punto ordinario $x = 0$.
- La EDH tiene la ecuación indicial $r(r + 1) = 0$.
- Ninguna de las opciones.

Parte práctica 1 (tema de desarrollo)

Considere la ecuación

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(z) \sin(t - z) dz, \quad t \geq 0.$$

Usando transformada de Laplace encuentre $y(t)$ para toda $t \geq 0$.

1

Usando transformada de Laplace el problema planteado se puede escribir como
(5 Points)

- $Y(s) = \frac{Y(s)}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^3}$ ✓
- $Y(s) = \int_0^s \frac{Y(s)}{s^2 + 1} ds + \frac{2}{s^3}$
- $Y(s) = \frac{Y(s)}{s^3} + \frac{2}{s^2 + 1}$
- $Y(s) = \int_0^s \frac{Y(s)}{s^3} ds + \frac{2}{s^2 + 1}$
- Ninguna de las opciones.

2

Despejando la transformada de Laplace de la solución buscada se tiene
(5 Points)

- $Y(s) = \frac{2s^2 + 2}{s^5}$ ✓
- $Y(s) = \frac{s^5}{2s^2 + 2}$
- $Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3}$
- $Y(s) = \frac{2s^2 + 2}{s^5} e^{-s}$
- Ninguna de las opciones.

3

La solución al problema planteado es
(5 Points)

- $y(t) = \frac{1}{12}t^4 + t^2$ ✓
- $y(t) = \frac{1}{12}t^2 + t^4$
- $y(t) = 12t^4 + t^2$
- $y(t) = \frac{1}{12}t^4 + t^2 u(t - 1)$
- Ninguna de las opciones.

Como validación del puntaje de las preguntas de esta sección, proceda a cargar un único archivo pdf que incluya el desarrollo paso a paso, de forma clara y ordenada. Para verificación de autenticidad, cada hoja deberá mostrar en la esquina inferior derecha el carnet universitario, cédula de identidad, papeleta de votación o licencia de conducir.

Parte práctica 2 (tema de desarrollo)

Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x'(t) + y'(t) - 4x(t) - y(t) = e^t, \\ x'(t) + 3x(t) + y(t) = 0. \end{cases}$$

Usando el método del operador diferencial (aplicando la regla de Cramer) encuentre $x(t)$, $y(t)$ para toda $t \geq 0$, asumiendo $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

1

Usando el método del operador diferencial el problema planteado contiene la ecuación (5 Points)

- $2(D - 2)x + (D - 1)y = e^t$ ✓
- $(D + 3)x + y = 0$ ✓
- $(D - 4)x + (D - 1)y = e^t$
- $(D + 3)x + Dy = 0$
- Ninguna de las opciones.

2

Usando la regla de Cramer se obtiene la ecuación (5 Points)

- $x''(t) + x(t) = -e^t$ ✓
- $y''(t) + y(t) = 4e^t$ ✓
- $x''(t) + 3x'(t) + x(t) = 0$
- $2y''(t) + y'(t) - 4y(t) = e^t$
- Ninguna de las opciones.

3

(5 Points)

La solución $x(t)$ al problema original es

- $x(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) - \sin(t) - e^t)$ ✓
- $x(t) = \cos(t) - \sin(t) - e^t$
- $x(t) = \cos(t) - \sin(t) - e^{-t}$
- $x(t) = 2e^t - \cos(t) + 2 \sin(t)$
- Ninguna de las opciones.

4

(5 Points)

La solución $y(t)$ al problema original es

- $y(t) = 2e^t - \cos(t) + 2 \sin(t)$ ✓
- $y(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) - \sin(t) - e^t)$
- $y(t) = e^t - 2 \sin(t)$
- $y(t) = e^t - \cos(t) + 2 \sin(t) + 1$
- Ninguna de las opciones.

Como validación del puntaje de las preguntas de esta sección, proceda a cargar un único archivo pdf que incluya el desarrollo paso a paso, de forma clara y ordenada. Para verificación de autenticidad, cada hoja deberá mostrar en la esquina inferior derecha el carnet universitario, cédula de identidad, papeleta de votación o licencia de conducir.