

Rúbrica

Pregunta 2

	Resuelve de forma satisfactoria
Determina una base para W	4
Se expresa un vector del dominio como combinación lineal de la base de W extendida.	3
Se define la transformación lineal .	3

2. Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}; -5a + 6b + 4c - 2d = 0 \right\}$ y

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (5, -5, 10)$$

2.2. Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}; 5a + 3b - 2c - d = 0 \right\}$ y

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (10, 5, 15)$$

2.3. Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; -5a + 6b + 4c - 2d = 0\}$ y

$$T(1,0,0,0) = 5x^2 - 5x + 10$$

2.4. Construya, de ser posible, una transformación lineal $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; 5a + 3b - 2c - d = 0\}$ y

$$T(1,0,0,0) = 10x^2 + 5x + 15.$$

Pregunta 3

	Resuelve de forma satisfactoria
Determina una base de S	2
Obtiene la base ortonormal de S	4
Determinar del vector v_1	2
Determina el vector v_2 y expresar v como $v_1 + v_2$	2

3.1. Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Escriba el vector $v = (1, -1, 2)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$.

3.2. Sea $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$. Escriba el vector $v = (4, -1, 1)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$.

3.3. Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3: x - 2y - z = 0\}$. Escriba el vector $v = (1, 0, -1)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$.

3.4. Sea $H = \{(x, y, z) \in R^3: 3x - y + z = 0\}$. Escriba el vector $v = \left(\frac{1}{3}, 1, -1\right)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$.

3.5. Sea $H = \{(x, y, z) \in R^3: x - y - 2z = 0\}$. Escriba el vector $v = (1, -1, 0)$ como la suma $v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^\perp$.

Pregunta 4

	Resuelve de forma satisfactoria	
Determina los valores propios de la matriz	2	
Determina el espacio propio (por lo menos el asociado al valor propio de multiplicidad dos) para cada caso de k obtenido	3	3
Justifica la elección del valor de k que hace a A diagonalizable.	2	

4.1. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 3 & -3 & k \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -3 & 0 \\ 6 & -5 - \lambda & 0 \\ 3 & -3 & k - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(4 - \lambda)(-5 - \lambda) + 18] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Si $k = -2$

$$E_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=-2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $k = 1$

$$E_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=-2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si $k \neq -2$ la matriz A es diagonalizable

4.2. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} k - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1 - \lambda & -2 \\ -1 & 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(-1 - \lambda)(4 - \lambda) + 4] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda)(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Si $k = 3$

$$E_{\lambda=0} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=3} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $k = 0$

$$E_{\lambda=0} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=3} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 0$ la matriz A es diagonalizable

4.3 Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & k & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -3 & -3 \\ 0 & k - \lambda & 0 \\ 6 & 6 & 5 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(-4 - \lambda)(5 - \lambda) + 18] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Si $k = -1$

$$E_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $k = 2$

$$E_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 2$ la matriz A es diagonalizable

4.4. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & k \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 4 - \lambda & 0 \\ -3 & 6 & k - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)(2 - \lambda)(4 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Si $k = 2$

$$E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $k = 4$

$$E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 4$ la matriz A es diagonalizable

4.5. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} k & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio λ cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} k - \lambda & 3 & -1 \\ 0 & 7 - \lambda & -1 \\ 0 & 6 & 2 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(7 - \lambda)(2 - \lambda) + 6] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Si $k = 4$

$$E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=5} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Si $k = 5$

$$E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=5} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si $k \neq 5$ la matriz A es diagonalizable

Pregunta 5

	Inadecuado	En desarrollo	Satisfactorio	Avanzado
	En blanco o sólo incoherencias	Intenta demostrar y escribe algo relacionado	Demuestra con procedimientos casi completos con pocas fallas	Demuestra satisfactoriamente
	0	$0 < \text{Calificación} \leq 5$	$5 < \text{Calificación} < 10$	10

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre que:

- T es inyectiva $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$
- T es sobreyectiva $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$
- T es inversible $\Rightarrow \dim V = \dim W$
- $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es L.I. en $W \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ es L.I. en V
- $\dim V \neq \dim W \Rightarrow T$ no es un isomorfismo

f) $\dim V > \dim W \Rightarrow T$ no es un inyectiva

Sea $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$

Hallar la distancia de $(4, -1, 1)$ a H y el punto de H más cercano a $(4, -1, 1)$

- Determinar una base para H

$$x_1 = 2x_2 + 2x_3$$

$$H = \{(2x_2 + 2x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H = \{(2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$$

- Determinar una base para H^\perp

$$\left((x_1, x_2, x_3) / (2, 1, 0) \right) = 0$$

$$\left((x_1, x_2, x_3) / (2, 0, 1) \right) = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}$$

$$H^\perp = \{(x_1, -2x_1, -2x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H^\perp = \{(-1, 2, 2)\}$$

- Determinar la base ortonormal de H^\perp

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1, 2, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- Determinar la distancia de $z = (4, -1, 1)$ a H

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{H^\perp} z &= \left((4, -1, 1) / \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right) \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right) \end{aligned}$$

$$d((4, -1, 1), H) = \left\| \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right) \right\| = \frac{4}{3}$$

- Determinar el punto de H más cercano a $(4, -1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{Proy}_H (4, -1, 1) &= (4, -1, 1) - \text{proy}_{H^\perp} (4, -1, 1) \\ &= (4, -1, 1) - \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right) \\ &= \left(\frac{32}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{17}{9}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Sea } S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Hallar la distancia de $(1, -1, 2)$ a S y el punto de S más cercano a $(1, -1, 2)$

- Determinar una base para S

$$x_3 = 2x_1 + 2x_2$$

$$S = \{(x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } S = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$$

- Determinar una base para S^\perp

$$((x_1, x_2, x_3) / (1, 0, 2)) = 0$$

$$((x_1, x_2, x_3) / (0, 1, 2)) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\text{Base } S^\perp = \{(2, 2, -1)\}$$

$$S^\perp = \{(-2x_3, -2x_3, x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\}$$

- Determinar la base ortonormal de S^\perp

$$v_1 = (2, 2, -1)$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Base}_{ON} S^\perp = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\}$$

- Determinar la distancia de $z = (1, -1, 2)$ a S

$$d((1, -1, 2), S) = \|\text{proj}_{S^\perp} z\|$$

$$= \left\| \left((1, -1, 2) / \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\|$$

$$= \left\| \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\|$$

$$= \left\| \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) \right\| = \frac{2}{3}$$

$$d((1, -1, 2), S) = \left\| \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) \right\| = \frac{2}{3}$$

- Determinar el punto de S más cercano a $(1, -1, 2)$

$$\text{proj}_S (1, -1, 2) = (1, -1, 2) - \text{proj}_{S^\perp} (1, -1, 2)$$

$$= (1, -1, 2) - \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{13}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{16}{9}\right)$$

$$\text{Sea } H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$$

Hallar la distancia de $(1, -1, 0)$ a H y el punto de H más cercano a $(1, -1, 0)$

- Determinar una base para H

$$x = y + 2z$$

$$H = \{(y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \quad (y + 2z, y, z) = (y, y, 0) + (2z, 0, z) \\ = y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

$$\text{Base } H = \{(1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$$

- Determinar una base para H^\perp

$$((x, y, z) \mid (1, 1, 0)) = 0$$

$$((x, y, z) \mid (2, 0, 1)) = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$$

$$H^\perp = \{(x, -x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H^\perp = \{(-1, 1, 2)\}$$

- Determinar la base ortonormal de H^\perp

$$v_1 = (-1, 1, 2)$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1, 1, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\text{Base } H^\perp_{\text{on}} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

- Calcular $\text{proj}_{H^\perp} v = (v \mid u_1) u_1$

$$\text{proj}_{H^\perp} (1, -1, 0) = \left((1, -1, 0) \mid \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ = -\frac{2}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- Halla la distancia

$$d((1, -1, 0), H) = \|\text{proj}_{H^\perp} v\| = \left\| \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- Determinar el punto de H más cercano a $(1, -1, 0)$

$$\text{proj}_H (1, -1, 0) = (1, -1, 0) - \text{proj}_{H^\perp} (1, -1, 0)$$

$$= (1, -1, 0) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Sea } H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 0 \right\}$$

Hallen la distancia de $(\frac{1}{3}, 1, -1)$ a H y el punto de H más cercano a $(\frac{1}{3}, 1, -1)$

- Determinar una base para H

$$z = 3x - y$$

$$H = \left\{ (x, y, 3x - y) / x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad (x, y, 3x - y) = (0, y, -y) + (x, 0, 3x)$$

$$\text{Base } H = \left\{ (0, 1, -1), (1, 0, 3) \right\} \quad = y(0, 1, -1) + x(1, 0, 3)$$

- Determinar una base para H^\perp

$$\left((x, y, z) / (0, 1, -1) \right) = 0$$

$$\left((x, y, z) / (1, 0, 3) \right) = 0$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -3z \end{cases}$$

$$H^\perp = \left\{ (-3z, z, z) / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Base } H^\perp = \left\{ (-3, 1, 1) \right\}$$

- Determinar la base ortonormal de H^\perp

$$v_1 = (-3, 1, 1)$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-3, 1, 1)}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\text{Base } H^\perp_{\text{ON}} = \left\{ \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \right\}$$

- Calcular $\text{proj}_{H^\perp} v$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{H^\perp} \left(\frac{1}{3}, 1, -1 \right) &= \left(\left(\frac{1}{3}, 1, -1 \right) / \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \right) \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{11}} \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \\ &= \left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11} \right) \end{aligned}$$

- Hallar la distancia

$$d \left(\left(\frac{1}{3}, 1, -1 \right), H \right) = \left\| \text{proj}_{H^\perp} v \right\| = \left\| \left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11} \right) \right\| = \frac{1}{11^2}$$

- Determinar el punto de H más cercano a $(\frac{1}{3}, 1, -1)$

$$\begin{aligned} \text{Proj}_H \left(\frac{1}{3}, 1, -1 \right) &= \left(\frac{1}{3}, 1, -1 \right) - \left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11} \right) \\ &= \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{12}{11} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Sea } S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0 \}$$

Hallar la distancia de $(1, 0, -1)$ a S y el punto de S más cercano a $(1, 0, -1)$

- Determinar una base para S

$$x = 2y + z$$

$$S = \{ (2y+z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \} \quad (2y+z, y, z) = (2y, y, 0) + (z, 0, z) \\ = y(2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$

$$\text{Base } S = \{ (2, 1, 0), (1, 0, 1) \}$$

- Determinar una base para S^\perp

$$\begin{cases} ((x, y, z) \mid (2, 1, 0)) = 0 \\ ((x, y, z) \mid (1, 0, 1)) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -x \end{cases}$$

$$S^\perp = \{ (x, -2x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{Base } S^\perp = \{ (-1, 2, 1) \}$$

- Determinar la base ortonormal de S^\perp

$$v_1 = (-1, 2, 1)$$

$$u_1 = \frac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\text{Base } S^\perp \text{ ON} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

- Determinar la distancia de $z = (1, 0, -1)$ a S

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{S^\perp} z &= (z \mid u_1) \cdot u_1 \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$d((1, 0, -1), S) = \|\text{Proy}_{S^\perp} z\| = \left\| \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\| = \frac{2}{3}$$

- Determinar el punto de S más cercano a $(1, 0, -1)$

$$\begin{aligned} \text{proy}_S(1, 0, -1) &= (1, 0, -1) - \text{proy}_{S^\perp}(1, 0, -1) \\ &= (1, 0, -1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$