

# Rúbrica

## Pregunta 2

	Resuelve de forma satisfactoria
Determina una base para $W$	4
Se expresa un vector del dominio como combinación lineal de la base de $W$ extendida.	3
Se define la transformación lineal .	3

2. Construya, de ser posible, una transformación lineal  $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto  $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}; -5a + 6b + 4c - 2d = 0 \right\}$  y

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (5, -5, 10)$$

2.2. Construya, de ser posible, una transformación lineal  $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto  $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}; 5a + 3b - 2c - d = 0 \right\}$  y

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (10, 5, 15)$$

2.3. Construya, de ser posible, una transformación lineal  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ , tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto  $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; -5a + 6b + 4c - 2d = 0\}$  y

$$T(1,0,0,0) = 5x^2 - 5x + 10$$

2.4. Construya, de ser posible, una transformación lineal  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ , tal que el núcleo de la transformación sea el conjunto  $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; 5a + 3b - 2c - d = 0\}$  y

$$T(1,0,0,0) = 10x^2 + 5x + 15.$$

## Pregunta 3

	Resuelve de forma satisfactoria
Determina una base de $S$	2
Obtiene la base ortonormal de $S$	4
Determinar del vector $v_1$	2
Determina el vector $v_2$ y expresar $v$ como $v_1 + v_2$	2

3.1. Sea  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ . Escriba el vector  $v = (1, -1, 2)$  como la suma  $v_1 + v_2$  donde  $v_1 \in S$  y  $v_2 \in S^\perp$ .

3.2. Sea  $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ . Escriba el vector  $v = (4, -1, 1)$  como la suma  $v_1 + v_2$  donde  $v_1 \in S$  y  $v_2 \in S^\perp$ .

3.3. Sea  $S = \{(x, y, z) \in R^3: x - 2y - z = 0\}$ . Escriba el vector  $v = (1, 0, -1)$  como la suma  $v_1 + v_2$  donde  $v_1 \in S$  y  $v_2 \in S^\perp$ .

3.4. Sea  $H = \{(x, y, z) \in R^3: 3x - y + z = 0\}$ . Escriba el vector  $v = \left(\frac{1}{3}, 1, -1\right)$  como la suma  $v_1 + v_2$  donde  $v_1 \in S$  y  $v_2 \in S^\perp$ .

3.5. Sea  $H = \{(x, y, z) \in R^3: x - y - 2z = 0\}$ . Escriba el vector  $v = (1, -1, 0)$  como la suma  $v_1 + v_2$  donde  $v_1 \in S$  y  $v_2 \in S^\perp$ .

#### Pregunta 4

	Resuelve de forma satisfactoria	
Determina los valores propios de la matriz	2	
Determina el espacio propio (por lo menos el asociado al valor propio de multiplicidad dos) para cada caso de k obtenido	3	3
Justifica la elección del valor de k que hace a A diagonalizable.	2	

4.1. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 3 & -3 & k \end{bmatrix}$$

#### Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio  $\lambda$  cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -3 & 0 \\ 6 & -5 - \lambda & 0 \\ 3 & -3 & k - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(4 - \lambda)(-5 - \lambda) + 18] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Si  $k = -2$

$$E_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=-2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si  $k = 1$

$$E_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=-2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si  $k \neq -2$  la matriz A es diagonalizable

#### 4.2. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

##### Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio  $\lambda$  cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} k - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1 - \lambda & -2 \\ -1 & 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(-1 - \lambda)(4 - \lambda) + 4] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda)(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Si  $k = 3$

$$E_{\lambda=0} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=3} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si  $k = 0$

$$E_{\lambda=0} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=3} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si  $k \neq 0$  la matriz A es diagonalizable

#### 4.3 Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & k & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

##### Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio  $\lambda$  cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -3 & -3 \\ 0 & k - \lambda & 0 \\ 6 & 6 & 5 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(-4 - \lambda)(5 - \lambda) + 18] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Si  $k = -1$

$$E_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Si  $k = 2$

$$E_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si  $k \neq 2$  la matriz A es diagonalizable

#### 4.4. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & k \end{bmatrix}$$

##### Solución enviada por Alfredo.

Si la matriz A de  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio  $\lambda$  cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 4 - \lambda & 0 \\ -3 & 6 & k - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)(2 - \lambda)(4 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Si  $k = 2$

$$E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Si  $k = 4$

$$E_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si  $k \neq 4$  la matriz A es diagonalizable

#### 4.5. Determinar los valores de la constante k para los cuales la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} k & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

**Solución enviada por Alfredo.**

Si la matriz A de  $n \times n$  tiene  $n$  valores propios diferentes entonces es diagonalizable, por lo tanto debemos encontrar un valor propio  $\lambda$  cuya multiplicidad algebraica sea mayor a 1 y que su multiplicidad geométrica sea menor que su multiplicidad algebraica

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} k - \lambda & 3 & -1 \\ 0 & 7 - \lambda & -1 \\ 0 & 6 & 2 - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ (k - \lambda)[(7 - \lambda)(2 - \lambda) + 6] &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) &= 0 \\ (k - \lambda)(\lambda - 4)(\lambda - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Si  $k = 4$

$$E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=5} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Si  $k = 5$

$$E_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad E_{\lambda=5} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto si  $k \neq 5$  la matriz A es diagonalizable

**Pregunta 5**

	<b>Inadecuado</b>	<b>En desarrollo</b>	<b>Satisfactorio</b>	<b>Avanzado</b>
	En blanco o sólo incoherencias	Intenta demostrar y escribe algo relacionado	Demuestra con procedimientos casi completos con pocas fallas	Demuestra satisfactoriamente
	0	$0 < \text{Calificación} \leq 5$	$5 < \text{Calificación} < 10$	10

Sea  $T: V \rightarrow W$  una transformación lineal. Demuestre que:

- a) T es inyectiva  $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$
- b) T es sobreyectiva  $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$
- c) T es inversible  $\Rightarrow \dim V = \dim W$
- d)  $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$  es L.I. en  $W \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$  es L.I. en  $V$
- e)  $\dim V \neq \dim W \Rightarrow T$  no es un isomorfismo

f)  $\dim V > \dim W \Rightarrow T$  no es un inyectiva

Sea  $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$

Hallar la distancia de  $(4, -1, 1)$  a  $H$  y el punto de  $H$  más cercano a  $(4, -1, 1)$

- Determinar una base para  $H$

$$x_1 = 2x_2 + 2x_3$$

$$H = \{(2x_2 + 2x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H = \{(2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$$

- Determinar una base para  $H^\perp$

$$\left( (x_1, x_2, x_3) / (2, 1, 0) \right) = 0$$

$$\left( (x_1, x_2, x_3) / (2, 0, 1) \right) = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}$$

$$H^\perp = \{(x_1, -2x_1, -2x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H^\perp = \{(-1, 2, 2)\}$$

- Determinar la base ortormal de  $H^\perp$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1, 2, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- Determinar la distancia de  $z = (4, -1, 1)$  a  $H$

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{H^\perp} z &= \left( (4, -1, 1) / \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right) \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right) \end{aligned}$$

$$d((4, -1, 1), H) = \left\| \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right) \right\| = \frac{4}{3}$$

- Determinar el punto de  $H$  más cercano a  $(4, -1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{Proy}_H (4, -1, 1) &= (4, -1, 1) - \text{proy}_{H^\perp} (4, -1, 1) \\ &= (4, -1, 1) - \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}\right) \\ &= \left(\frac{32}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{17}{9}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Sea } S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Hallar la distancia de  $(1, -1, 2)$  a  $S$  y el punto de  $S$  más cercano a  $(1, -1, 2)$

- Determinar una base para  $S$

$$x_3 = 2x_1 + 2x_2$$

$$S = \{(x_1, x_2, 2x_1 + 2x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } S = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$$

- Determinar una base para  $S^\perp$

$$((x_1, x_2, x_3) / (1, 0, 2)) = 0$$

$$((x_1, x_2, x_3) / (0, 1, 2)) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\text{Base } S^\perp = \{(2, 2, -1)\}$$

$$S^\perp = \{(-2x_3, -2x_3, x_3) / x_3 \in \mathbb{R}\}$$

- Determinar la base ortogonal de  $S^\perp$

$$v_1 = (2, 2, -1)$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Base}_{\text{ON}} S^\perp = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\}$$

- Determinar la distancia de  $z = (1, -1, 2)$  a  $S$

$$d((1, -1, 2), S) = \|\text{proj}_{S^\perp} z\|$$

$$= \left\| \left( (1, -1, 2) / \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\|$$

$$= \left\| \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\|$$

$$= \left\| \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) \right\| = \frac{2}{3}$$

$$d((1, -1, 2), S) = \left\| \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) \right\| = \frac{2}{3}$$

- Determinar el punto de  $S$  más cercano a  $(1, -1, 2)$

$$\text{proj}_S(1, -1, 2) = (1, -1, 2) - \text{proj}_{S^\perp}(1, -1, 2)$$

$$= (1, -1, 2) - \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{13}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{16}{9}\right)$$



Sea  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$

Hallar la distancia de  $(1, -1, 0)$  a  $H$  y el punto de  $H$  más cercano a  $(1, -1, 0)$

- Determinar una base para  $H$

$$x = y + 2z$$

$$H = \{(y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \quad (y + 2z, y, z) = (y, y, 0) + (2z, 0, z) = y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

$$\text{Base } H = \{(1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$$

- Determinar una base para  $H^\perp$

$$((x, y, z) \mid (1, 1, 0)) = 0$$

$$((x, y, z) \mid (2, 0, 1)) = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$$

$$H^\perp = \{(x, -x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } H^\perp = \{(-1, 1, 2)\}$$

- Determinar la base ortonormal de  $H^\perp$

$$v_1 = (-1, 1, 2)$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1, 1, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\text{Base } H^\perp_{\text{on}} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

- Calcular  $\text{proj}_{H^\perp} v = (v \mid u_1) u_1$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{H^\perp} (1, -1, 0) &= \left( (1, -1, 0) \mid \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

- Halla la distancia

$$d((1, -1, 0), H) = \|\text{proj}_{H^\perp} v\| = \left\| \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- Determinar el punto de  $H$  más cercano a  $(1, -1, 0)$

$$\begin{aligned} \text{proj}_H (1, -1, 0) &= (1, -1, 0) - \text{proj}_{H^\perp} (1, -1, 0) \\ &= (1, -1, 0) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Sea } H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 0 \right\}$$

Hallen la distancia de  $(\frac{1}{3}, 1, -1)$  a  $H$  y el punto de  $H$  más cercano a  $(\frac{1}{3}, 1, -1)$

- Determinar una base para  $H$

$$z = 3x - y$$

$$H = \left\{ (x, y, 3x - y) / x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad (x, y, 3x - y) = (0, y, -y) + (x, 0, 3x)$$

$$\text{Base } H = \left\{ (0, 1, -1), (1, 0, 3) \right\} \quad = y(0, 1, -1) + x(1, 0, 3)$$

- Determinar una base para  $H^\perp$

$$\left( (x, y, z) / (0, 1, -1) \right) = 0$$

$$\left( (x, y, z) / (1, 0, 3) \right) = 0$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -3z \end{cases}$$

$$H^\perp = \left\{ (-3z, z, z) / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Base } H^\perp = \left\{ (-3, 1, 1) \right\}$$

- Determinar la base ortonormal de  $H^\perp$

$$v_1 = (-3, 1, 1)$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-3, 1, 1)}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \left( -\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\text{Base } H^\perp_{\text{ON}} = \left\{ \left( -\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \right\}$$

- Calcular  $\text{proj}_{H^\perp} v$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{H^\perp} \left( \frac{1}{3}, 1, -1 \right) &= \left( \left( \frac{1}{3}, 1, -1 \right) / \left( -\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \right) \left( -\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{11}} \left( -\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \\ &= \left( \frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11} \right) \end{aligned}$$

- Hallar la distancia

$$d \left( \left( \frac{1}{3}, 1, -1 \right), H \right) = \left\| \text{proj}_{H^\perp} v \right\| = \left\| \left( \frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11} \right) \right\| = \frac{1}{11^2}$$

- Determinar el punto de  $H$  más cercano a  $(\frac{1}{3}, 1, -1)$

$$\begin{aligned} \text{Proj}_H \left( \frac{1}{3}, 1, -1 \right) &= \left( \frac{1}{3}, 1, -1 \right) - \left( \frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11} \right) \\ &= \left( \frac{8}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{12}{11} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Sea } S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0 \}$$

Hallar la distancia de  $(1, 0, -1)$  a  $S$  y el punto de  $S$  más cercano a  $(1, 0, -1)$

- Determinar una base para  $S$

$$x = 2y + z$$

$$S = \{ (2y+z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \} \quad (2y+z, y, z) = (2y, y, 0) + (z, 0, z) \\ = y(2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$

$$\text{Base } S = \{ (2, 1, 0), (1, 0, 1) \}$$

- Determinar una base para  $S^\perp$

$$\begin{cases} ((x, y, z) \mid (2, 1, 0)) = 0 \\ ((x, y, z) \mid (1, 0, 1)) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -x \end{cases}$$

$$S^\perp = \{ (x, -2x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{Base } S^\perp = \{ (-1, 2, 1) \}$$

- Determinar la base ortonormal de  $S^\perp$

$$v_1 = (-1, 2, 1)$$

$$u_1 = \frac{(-1, 2, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\text{Base } S^\perp \text{ ON} = \left\{ \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

- Determinar la distancia de  $z = (1, 0, -1)$  a  $S$

$$\begin{aligned} \text{Proy}_{S^\perp} z &= (z \mid u_1) \cdot u_1 \\ &= \left( -\frac{1}{\sqrt{6}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$d((1, 0, -1), S) = \|\text{Proy}_{S^\perp} z\| = \left\| \left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\| = \frac{2}{3}$$

- Determinar el punto de  $S$  más cercano a  $(1, 0, -1)$

$$\begin{aligned} \text{proy}_S(1, 0, -1) &= (1, 0, -1) - \text{proy}_{S^\perp}(1, 0, -1) \\ &= (1, 0, -1) - \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \\ &= \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$