

ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

Instituto de Ciencias Matemáticas

Ingeniería en Estadística Informática

“Construcción de un Modelo Teórico y Empírico para la Fuerza de Mortalidad para la Población Ecuatoriana”

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

INGENIERO EN ESTADÍSTICA INFORMÁTICA

Presentada por:

JOHNY JAVIER PAMBABAY CALERO

GUAYAQUIL – ECUADOR

AÑO

2001

AGRADECIMIENTO

A todas las personas que de uno u otro modo colaboraron en la realización de este trabajo y especialmente al Mat. Fernando Sandoya Director de Tesis, por su invaluable ayuda.

DEDICATORIA

A mi padre, a mis hermanas, a Dios y en especial a mi madre por su gran esfuerzo y estímulo brindado en todos los momentos, para que pueda culminar con mis estudios.

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

Mat. Jorge Medina
DIRECTOR
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Mat. Fernando Sandoya
DIRECTOR DE TESIS

M.Sc. César Guerrero
VOCAL

Ing. Mario Castro
VOCAL

DECLARACIÓN EXPRESA

“La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”

(Reglamento de Graduación de la ESPOL).

Johny Javier Pambabay Calero

RESUMEN

El presente trabajo desarrolla la construcción de tablas actuariales a través de un modelo teórico y empírico, tratando de ajustar el diseño de estas tablas actuariales a las condiciones y necesidades de nuestro país, enfocado principalmente al estudio de la Fuerza de Mortalidad, y finalmente evaluar la bondad de cada uno de estos modelos.

En su primera parte se revisan algunas consideraciones acerca del Seguro como su evolución y otros tópicos importantes para la teoría del Seguro, y en los siguientes capítulos se estudian y analizan los fundamentos teóricos para la estimación de la fuerza de mortalidad, tanto para el modelo teórico y empírico.

ÍNDICE GENERAL

	Pág
RESUMEN.....	VI
ÍNDICE GENERAL.....	VII
SIMBOLOGIA.....	XI
ÍNDICE DE FIGURAS.....	XII
ÍNDICE DE TABLAS.....	XIII
INTRODUCCIÓN.....	1
I. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL SEGURO.....	3
1.1 Proceso Evolutivo del Seguro.....	3
1.2 Introducción al Seguro.....	7
1.2.1 Consecuencia de la materialización del.....	13
1.3 Origen de las Tablas y Modelos de Mortalidad.....	15
1.3.1 Las primeras tablas de Seguro de Vida.....	17
1.4 ¿Qué es un Actuario?.....	19
1.4.1 De la “equitable” al genoma humano.....	20
II. TEORÍA DE LA SUPERVIVENCIA.....	25
2.1 El fenómeno actuarial.....	25
2.2 Tiempo biométrico.....	26
2.3 Variables Biométricas.....	27

2.3.1	Función de Supervivencia.....	28
2.3.2	Tiempo futuro de supervivencia.....	30
2.4	Modelos de supervivencia o quiebra. Tablas de mortalidad..	32
2.5	Tanto instantáneo de fallecimiento o quiebra.....	33
2.6	Esperanza de vida abreviada y completa.....	35
2.7	Vida probable.....	36
2.8	Número total esperado de años de supervivencia.....	37
2.9	Tanto central de fallecimiento a la edad x	37
III.	CONSTRUCCION DE UN MODELO TEÓRICO.....	39
3.1	Leyes biométricas.....	39
3.2	Estimación lineal del modelo biométrico.....	42
3.3	El Problema de la Interpolación.....	52
3.3.1	Interpolación.....	53
3.3.2	Interpolación por splines.....	55
3.3.2.1	Splines cúbicos.....	57
3.3.2.2	Cálculo de los splines cúbicos de Interpolación.....	60
3.3.3	Interpolación con Splines y el Modelo de Regresión Lineal.....	66

IV.	CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO EMPÍRICO PARA LA FUERZA DE MORTALIDAD PARA LA POBLACIÓN ECUATORIANA.....	77
4.1	Modelos Estáticos y Dinámicos.....	78
4.2	Modelos Cuantitativos y Cualitativos.....	79
4.3	Modelos Empíricos y Funcionales.....	79
4.4	Modelización y Matemáticas.....	80
4.5	Modelos de Supervivencia sobre una base empírica.....	81
4.6	Estadística Demográfica.....	82
4.7	Descripción de la base de datos.....	85
4.7.1	Omisión de personas.....	86
4.7.2	Omisión completa de áreas geográficas.....	87
4.7.3	Omisión de personas aisladas.....	87
4.7.4	Omisión completa de viviendas.....	87
4.7.5	Mala declaración de la edad.....	88
4.8	Estimación de los parámetros utilizando las estadísticas demográficas.....	88
4.9	Tablas de Mortalidad.....	92
V	COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS MODELOS “EMPIRICO Y TEORICO” Y ANALISIS DEL ERROR.....	98
5.1	Comparación de la Mortalidad de las Poblaciones de Estados Unidos de Norteamérica y Ecuador.....	102
5.2	Análisis del Error de Estimación.....	107

VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	111
6.1 Conclusiones.....	111
6.2 Recomendaciones.....	114

ANEXOS

BIBLIOGRAFIA

SIMBOLOGIA

$s(x)$	Función de supervivencia, nos da la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad de x años.
$T(x)$	Tiempo futuro de supervivencia de un individuo de edad x años.
${}_tq_x$	La probabilidad de que un individuo de edad x años, fallezca dentro de los t años siguientes.
${}_t p_x$	La probabilidad de que un individuo de edad x años, sobreviva los siguientes t años.
${}_{t/n}q_x$	La probabilidad de que un individuo de edad x , sobreviva t años mas y fallezca en los n años siguientes.
$K(x)$	Tiempo de vida futuro <<abreviada>>.
l_0	Número de recién nacidos de una población
$\lambda(x)$	Número de sobrevivientes a la edad x .
l_x	Valor esperado del número de sobrevivientes a la edad x .
${}_n\delta_x$	Número de fallecimientos ocurridos entre las edades x y $x+n$.
μ_x	Fuerza de mortalidad
e_x	Esperanza de vida abreviada
L_x	Número total esperado de años de supervivencia.
m_x	Tanto central de fallecimiento a la edad x
T_x	Número total de años vividos desde la edad x por el grupo de sobrevivientes procedente de un grupo inicial de l_0 .
D_x	Número total de muertes ocurridas de elementos de edad x .

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

Figura 3.1	Edades correspondientes al número de habitantes del Ecuador según el Censo Poblacional del año 1990.....	51
Figura 3.2	Aproximación polinómica segmentaria más común usando polinomios cúbicos entre parejas sucesivas de nodos.....	56
Figura 3.3	Gráfico suavizado seleccionando tres nodos, a partir de los datos del Censo poblacional del año 1990, mediante trazador cúbico.....	64
Figura 3.4	Gráfico suavizado seleccionando dos nodos, a partir de los datos del Censo poblacional del año 1990, mediante trazador cúbico.....	65
Figura 3.5	Gráfico suavizado seleccionando tres nodos, a partir de los datos del Censo poblacional del año 1990, mediante la curva de mejor ajuste.....	67
Figura 3.6	Gráfico suavizado seleccionando dos nodos, a partir de los datos del Censo poblacional del año 1990, mediante la curva de mejor ajuste.....	68
Figura 3.7	Gráfico de la fuerza de mortalidad (modelo teórico), población ecuatoriana.....	74

Figura 3.8	Gráfico del l_x a la edad x (Modelo teórico), población ecuatoriana.....	75
Figura 3.9	Gráfico del Número esperado de muertes a la edad x (Modelo teórico), población ecuatoriana.....	76
Figura 4.1	Gráfico de la fuerza de mortalidad (Modelo empírico), población ecuatoriana.....	95
Figura 4.2	Gráfico del Número esperado de sobrevivientes a la edad x (Modelo empírico), población ecuatoriana.....	96
Figura 4.3	Gráfico del Número esperado de fallecidos a la edad x (Modelo empírico), población ecuatoriana.....	97
Figura 5.1	Comparación de la fuerza de mortalidad entre el modelo empírico y el modelo teórico.....	99
Figura 5.2	Comparación del l_x entre el modelo empírico y el modelo teórico.....	101
Figura 5.3	Comparación del número esperado de fallecidos entre el modelo empírico y el modelo teórico.....	102
Figura 5.4	Comparación de la fuerza de mortalidad entre la población de Estados Unidos de Norteamérica y Ecuador.....	104
Figura 5.5	Comparación del l_x entre la población de Estados Unidos de Norteamérica y Ecuador.....	105
Figura 5.6	Comparación del número esperado de fallecidos entre la población de Estados Unidos de Norteamérica y Ecuador.....	107

ÍNDICE DE TABLAS

	Pag.
Tabla I Tabla de Mortalidad (Modelo Teórico).....	72
Tabla II Tabla de Mortalidad (Modelo Empírico).....	94

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata sobre la construcción de modelos empíricos y teóricos para el análisis de la mortalidad de la población ecuatoriana. Los modelos empíricos están basados en los datos de los censos, tablas de defunciones y nacimientos, en cambio los modelos teóricos generales son contruidos sobre una base matemática que busca explicar el comportamiento de la mortalidad de las poblaciones; por último se pretende evaluar la bondad de cada uno de estos modelos.

La importancia de tener un conocimiento de las tablas de mortalidad para el país radica en la necesidad de definir políticas de salud en diferentes grupos de edades de la población, es necesario tener una tabla basada en nuestra realidad pues la población de otros países puede comportarse de un modo diferente a la nuestra y por tanto al usar tablas de otros países estamos tratando de ajustarnos a realidades distintas.

Otro de los puntos que definen la importancia de tener tablas de mortalidad, es que estas son vitales para el desarrollo de los seguros de vida y planes de pensiones de los individuos de una población. En cambio, la disposición de modelos de mortalidad teóricos es muy importante para ciertos cálculos actuariales, y para hacer análisis más exactos de determinados parámetros;

pues son contruidos sobre la base de suposiciones sobre la dinámica de la mortalidad de la población, y se pueden ajustar bastante bien en muchas circunstancias.

Antes de desarrollar la Teoría de Supervivencia es necesario conocer como evolucionó la idea del seguro, el origen de las tablas de mortalidad, una introducción a la teoría del Seguro, definir que es un actuario y el rol que tiene este en la sociedad actual.

CAPITULO 1

1. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL SEGURO

1.1 Proceso Evolutivo del Seguro

La practica comercial de los seguros nació como una antigua institución del Comercio Marítimo, cuyos orígenes remotos pueden ubicarse varios siglos antes de Cristo, en la antigua Mesopotamia, pero solo se cuenta con registros de su incipiente desarrollo durante el Imperio Romano y posteriormente un acentuado crecimiento en la Edad Media.

Inicialmente la actividad se desarrollaba como una forma de préstamo, que consistía en una operación entre un banquero o prestamista y un comerciante marítimo o armador (dueño de un barco) mediante la cual; y sujeto a una elevada tasa de interés, el banquero prestaba a un comerciante marítimo, y éste se

comprometía a devolver el préstamo más los intereses al finalizar el viaje. Sin embargo, si la aventura marítima fracasaba el comerciante quedaba libre de deudas.

Obviamente para el prestamista existía el riesgo no sólo de que la aventura fracasara por causas fortuitas, sino también de que el comerciante marítimo fuera deshonesto y no regresara a pagar la deuda.

Con el fin de compartir la deshonestidad de algunos comerciantes que tomaban el préstamo y luego no volvían, se generalizaba la práctica que el banquero cobraba el interés por anticipado, así reducían su pérdida en caso de naufragio o de deshonestidad y por otra parte desestimulaba tales prácticas al reducir la ganancia de los eventuales delincuentes.

Va a ser sin embargo, entre los siglos XIII y XIV cuando se comienza a generalizar la última forma de Préstamo a la Guesa. El Comerciante pagaba el interés por anticipado y el Banquero sólo entregaba el monto del préstamo cuando después del naufragio el Comerciante Marítimo les presentaba las pruebas de lo ocurrido. Recién en el año 1.347 aparece por escrito el verbo asegurar para describir esta clase de operaciones, y puede por tanto hablarse de

esta fecha como la del nacimiento del Seguro Marítimo, el más antiguo de los Seguros.

Para el siglo XV, esta practica se había extendido sobre la base de los principios ya conocidos del Préstamo a la Gruesa y de los primeros Seguros Marítimos, una forma rudimentaria de Seguro de vida, que era una especie de apuesta a corto plazo en que la persona, cuya vida se aseguraba, no necesariamente conocía de la existencia del Seguro.

Puede observarse que lo mencionado antes no podía constituir una base sólida para una actividad tan necesaria para las personas y las empresas, pues, lo corto del plazo y la frecuente ausencia de un interés asegurable, convertía a este Seguro en una operación altamente especulativa.

Será necesario que diversos instrumentos legales, como por ejemplo las ordenanzas de Burgos dictadas por el Rey Felipe II cerca de 1.570, establezcan una serie de normas regulares que permitirán en lo sucesivo la práctica del Seguro de Vida tal como lo conocemos en la actualidad; es decir, una medida de previsión socioeconómica sólidamente basada en principios jurídicos y

científicos, cuyo principal objetivo es determinar el impacto financiero producido por posibles pérdidas en la actividad corriente de una persona o una empresa.

Durante la Edad Media van a aparecer en las ciudades libres del Norte de Europa unas organizaciones mutuales de carácter gremial denominadas Guildas (Giels) cuyo propósito era el de proteger a sus afiliados contra las consecuencias económicas de determinados eventos dañinos.

Estas Guildas constituyen la manifestación más antigua de instituciones efectivas de previsión fuera del ambiente Marítimo y va a ser en el futuro la raíz de la forma más avanzada de organización tanto mutuales como de seguro.

Luego, durante el siglo XVI es cuando comienza a aparecer una forma de previsión distinta de las Guildas, aunque paralela a ellas, la compañía aseguradora. En una provincia no costera y por tanto más bien agrícola y ganadera surge una persona, cuyo sentido de responsabilidad social y capacidad de observación lo van a convertir en el pionero de los Seguros de Incendio, se trata del Conde Anton Von Oldenburg, quien observó que los incendios que afectaban

viviendas y casas de labor en los campos mostraban una cierta regularidad en su ocurrencia. Von Oldenburg pensó que un estudio estadístico lo suficientemente amplio podía permitir la creación de alguna clase de forma de previsión. Su estudio lo llevó a la conclusión de que si cada propietario de vivienda destinaba a un fondo el 1% del valor de la propiedad entonces ese fondo estaría en condiciones de pagar las pérdidas por incendio que ocurrieran durante un período dado. En la práctica funcionó tan bien que Von Oldenburg resolvió retirarse del negocio, pues alegaba que su trabajo no era por ganancia personal. Lo verdaderamente importante es que a partir de ese momento comienzan a formarse en Alemania Mutualidades de Incendios llamadas Brandkassen que aún hoy en día funcionan y también comenzarán a aparecer Compañías de Seguros de Incendios tanto en Alemania, como en Francia, Holanda e Inglaterra principalmente, y va a ser precisamente en Inglaterra donde tras el Gran Incendio de Londres de 1.666 comienza a desarrollarse a gran escala el Seguro de Incendio en el ámbito comercial, para proteger a las empresas de las posibles pérdidas por incendios.

1.2 Introducción al Seguro

Bajo la reglamentación del derecho, la humanidad se ha ido desarrollando, surgiendo con ello una enorme creación de riquezas y el establecimiento de los derechos de propiedad sobre las mismas. Estas propiedades, ayer, hoy y siempre, estuvieron, están y estarán, en mayor o menor grado una de otra, expuestas a sufrir daños o pérdidas en virtud de los variados peligros, riesgos o amenazas que las asechan.

Estos peligros o amenazas de destrucción a las cuales están expuestos los bienes y propiedades del ser humano, no son excluyentes para la integridad física de la persona. De allí que se afirme que la inseguridad "es la esencia misma de la vida y de las cosas que con ellas se relacionan", siendo productora directa de dichos peligros o amenazas, en razón del desconocimiento que se tienen del cuánto, cuándo, dónde y cómo se podrá manifestar o materializarse sobre nosotros, nuestras propiedades, o ambos a la vez, dichos riesgos o peligros.

Esta falta de seguridad en que cada día estamos envueltos, nos plantea la disyuntiva de que los referidos peligros, riesgos o amenazas pueden ocurrir o no, lo único cierto es que los mismos

están latentes en cuanto a su acaecimiento u ocurrencia con el subsiguiente resultado negativo de su materialización.

Podría decirse que desde su creación según la tradición, el hombre y con él todas sus pertenencias, han estado en todo momento, expuestos a su destrucción parcial o total, debido a riesgos o peligros que al momento de producirse pueden ocasionar, según la magnitud, medianos o grandes daños o pérdidas. Estas amenazas o peligros marchan a la par de toda actividad humana y evolucionan en forma directamente proporcional a la misma. Siendo la navegación una de las primeras actividades a las que se dedicó el hombre y debido a la importancia que cobró en aquellos tiempos, bien sea por sus fines de descubrimiento, comercio o colonización de la cual se vistió, tampoco escapó a ciertos peligros.

Además de estas dificultades e incertidumbres propias de la navegación de aquellos tiempos, siempre estaban latentes en cuanto a su realización o acaecimiento, sucesos como la guerra, el motín, etc., en los cuales se basaba el temor por los mares desconocidos e inmersos y que posteriormente el hombre fue venciendo en la medida en que progresaba la humanidad.

Así, en virtud de esa inseguridad a través de los tiempos, no se ha pasado por alto tal situación y se han creado mecanismos de defensa y de protección ante las amenazas de riesgos a los cuales ha estado expuesto el hombre y sus propiedades.

Desde la antigüedad hasta nuestros días han sido muy variados los esfuerzos de control de riesgos o peligros a los cuales se está expuesto, en virtud de la constante búsqueda de soluciones, así como, por la gran variedad de factores de pérdidas que deben ser anulados. De hecho la historia nos muestra actos de pérdida con su consecuente método de control, a través de pactos, leyes y asociaciones diversas.

Paralelamente a la evolución de la humanidad, los peligros o riesgos han aumentado y hoy en día las posibilidades de pérdidas o de sufrir algún daño son mayormente considerables, producto precisamente de ese desarrollo industrial y la sofisticación de la vida social que trajo consigo el establecimiento de los derechos de propiedad sobre las riquezas creadas por la civilización como resultados de la expansión de la economía mundial. Claro está, que las características de los anteriores han variado, por su novedad, cuantía y posibles causas, aunque persisten muchos todavía.

Cada uno de nosotros, nos enfrentamos en todo momento, a la posibilidad de pérdidas de diversas características y magnitudes que nos depara instantáneamente la inseguridad y la incertidumbre, de cómo, cuándo, dónde y a cuánto ascenderá el monto de dicha(s) pérdida(s) en caso de que se materialice un riesgo.

Estas amenazas, peligros o posibilidades de pérdidas a las cuales se ha hecho referencia, constituyen la esencia o la base del Seguro y se le denomina técnicamente en la actividad aseguradora como **Riesgo**.

Desde el punto de vista del diccionario, se nos presenta la siguiente definición de Riesgo:

"**Peligro**, contingencia de un daño. Proximidad de un daño. Posibilidad de que ocurra una pérdida."

Entre las diversas definiciones todas ellas validas aunque con limitaciones, tenemos:

❖ "El **Riesgo** se define como la incertidumbre que existe de que un suceso pueda ocurrir"

- ❖ "Un peligro puede definirse como una contingencia que pueda causar una pérdida"
- ❖ "Hay que entender por **riesgo** las causas de los daños materiales y pérdidas"
- ❖ "**Riesgo** es simplemente la posibilidad de que el siniestro ocurra".
- ❖ "Se entiende por **riesgo** la eventualidad de todo caso fortuito o de fuerza mayor, que pueda causar la pérdida o deterioro de los objetos expuestos a ellos en caso de que se materialicen"
- ❖ "Es la posibilidad de pérdida o desembolso y que se identifica con el peligro que amenaza la vida o el patrimonio de las personas"
- ❖ "Cualquiera de las contingencias que puedan ser objeto de un Contrato de Seguros y que al momento de producirse da lugar a consecuencias perjudiciales".
- ❖ "Contingencia a la posibilidad de sufrir un daño o una pérdida, constituyéndose siempre en el azote de la existencia humana".

1.2.1 CONSECUENCIA DE LA MATERIALIZACIÓN DEL RIESGO

Los riesgos, esos peligros que amenazan con destruir al hombre y/o a sus propiedades, en general fueron definidos como la "incertidumbre" que existe de que un suceso pueda ocurrir.

Esta ocurrencia de un suceso sólo es factible en caso de que dichos riesgos se materialicen. Una vez que el riesgo se materializa puede dar origen a dos situaciones; una, ganancia si habláramos de juegos y apuestas; o dos, de pérdida o daño.

En esta ocasión nos referiremos al riesgo como posibilidad de pérdida, no de ganancia, ya que cualquiera que sea su forma, el riesgo de pérdida es algo que se desea evitar, más no así la otra situación.

Son muchos los conceptos o definiciones que se les asignan a las pérdidas o daños: por un lado, la posición literal; por el otro, la jurídica y por último, la del Seguro.

Consciente del alto grado jurídico que contiene el Seguro y el relevante contenido técnico de nuestra actividad aseguradora, el tema debe ser abordado tomando en cuenta ambos conocimientos.

En sentido literal amplio, **pérdida significa privación de una cosa; el desgaste, fallecimiento, mengua, perjuicio, daño, menoscabo, disminución, merma, gasto o desembolso, agravio.** Cada uno de los anteriores términos tiene acogida técnica por el Seguro.

Desde el punto de vista técnico del Seguro, **la pérdida es sinónimo indistintamente, tanto de daño como de siniestro, siendo definidos en general como la materialización de un riesgo asegurado.** Sin embargo, tenemos lo siguiente:

Pérdida: es la cuantificación económica del daño y se produce en el momento en que el contratante o Titular del Seguro pierde la posesión del bien expuesto a los riesgos asegurados.

1.3 Origen de las Tablas y Modelos de Mortalidad

La primera de las Tablas regulares de Mortalidad semanal existentes, se desarrollo en Londres en la Casa de los Sacristanes, que inician del 29 de Diciembre de 1603, primer año del reino de Jacobo, en las cuales se llevaban un recuento semanal de los Entierros y Bautizos.

Se asume que la necesidad de guardar estos informes fue originada de la **Peste**: por lo que parece que empezaron a realizarse en el año de 1592, tiempo de gran **Mortandad**; y después de algún desuso, se volvieron a emplear en 1603, tras la gran Peste que acaeció.

Estas tablas eran Impresas y publicadas, no únicamente cada jueves, sino que también se daba un informe general de todo el Año el jueves antes de Navidad; así, dichos informes generales habían sido presentados en diversas maneras, del año 1603, al año 1624.

Ahora veremos como estaban estructuradas. Cuando alguien moría, por cualquier causa, el **Sepulturero** se comunicaba con los **Registradores** (que eran antiguas Matronas, juradas a su cargo). Ellos se dirigían al lugar donde descansaba el muerto, y a su vista, o

por otras investigaciones, examinaba de que enfermedad o accidente moría la persona. Sobre esto, hacían su informe al Sacristán, y él, cada Martes por la noche llevaba un Recuento de todos los Entierros y Bautizos, habidos en la semana, al Sacristán de la casa. El Miércoles se hacía el Recuento general, se imprimía, y el jueves se publicaba y distribuía a las diversas Familias, que pagaban cuatro **Chelines** al año por ello. Tan laborioso trabajo se lo realizaba para los siguientes propósitos.

- ❖ Para conocer la cifra de la Población.
- ❖ Conocer, el número de hombres y mujeres.
- ❖ Conocer, el número de casados y de solteros.
- ❖ Conocer, el número de mujeres fértiles.
- ❖ El número de vivos de cada Septenario o Década de años
- ❖ El número de combatientes.
- ❖ Establecer, la población de Londres, y sus causas de incremento.
- ❖ Establecer, la proporción de los que morían de causas generales y causas comunes.
- ❖ Conocer, la proporción de los hombres desobedientes a las Ordenanzas de la Iglesia, y el porcentaje de aumento de seguidores de Sectas.

- ❖ Las causas de que los Entierros superen los Bautizos en Londres, cuando lo contrario era evidente en el campo.

1.3.1 LAS PRIMERAS TABLAS DE SEGURO DE VIDA

La contemplación de la *mortalidad* de la *humanidad* tiene además de moral, sus usos físicos y políticos, los cuales fueron concienzudamente considerados, hace varios siglos por Sir William Petty, en sus observaciones naturales y políticas sobre la lista de mortalidad de Londres propiedad del capitán John Graunt. Y luego en un tratado parecido sobre las listas de mortalidad de Dublín. Pero la deducción de estas listas de mortalidad parecían deficientes, incluso para los autores. Primero, en cuanto a lo que requerían la **cifra** de la gente. Segundo, no se tenían las edades de las personas que morían. Y por último, que tanto Londres como Dublín no podían ser patrones para este fin, debido al gran número de extranjeros que morían allí.

Esta deficiencia se había subsanado en gran medida en unas curiosas tablas de las listas de mortalidad de la ciudad de Breslau, que fue comunicada a la sociedad londinense por Mr. Justell, donde se daban mensualmente las edades y los sexos

de todos los que habían fallecidos, y se las comparaba con el número de nacimientos, para los años 1687, 88, 89, 90 y 91, pareciendo haber sido realizadas con toda exactitud y sinceridad posibles.

Esta ciudad de Breslau era la ciudad principal de la provincia de Silesia; o Schlesia, como la llaman los *alemanes*, y está situada en la orilla occidental del río Oder, antiguamente llamado *Viadrus*, cerca de la frontera de *Alemania* y *Polonia*, y muy próxima a la latitud de Londres. Esta muy lejos del mar, y es un lugar tan mediterráneo como puede desearse, donde la confluencia de extranjeros solo era muy pequeña, y la manufactura de lino empleaba principalmente a la gente pobre del lugar, así como de la comarca circundante, de donde provenía esa clase de lino que generalmente se denominaba *lino de Silesia*; que era la principal, sino la única mercancía del lugar. Por estos motivos, los habitantes de esta ciudad parecían mas adecuados para un patrón, y tanto mas cuanto los *nacimientos* superaban, un poco, a los *funerales*.

A partir de estas consideraciones, se formó la tabla, cuyos usos eran diversos, y daba una idea más exacta del *estado* y

condición de la humanidad, ya que en ese tiempo no existía una tabla parecida. Presentaba el número de habitantes de la ciudad de Breslau de todas las edades, desde el nacimiento hasta la vejez extrema, y revelaba con ello las **probabilidades de mortalidad** a todas las edades, y análogamente como hacer un cálculo seguro del valor de las **anualidades de las vidas**, que por aquellos años se lo realizaba por medio de una valorización imaginaria; y también las *probabilidades* que hay que una persona de cualquier **edad** propuesta viva hasta cualquiera otra edad dada.

1.4 ¿Qué es un Actuario?

Si bien es cierto que estamos frente a un entorno dinámico y de cambios radicales en la forma de hacer negocios, que a veces tiene al Actuario como protagonista y otras como espectador, no es menos cierto que la profesión de Actuario en el Ecuador, por múltiples circunstancias, ha sido de las menos difundidas.

Las bases de aplicación de la profesión de Actuario se centran, básicamente, en el impacto financiero y económico de acontecimientos que involucran riesgo e incertidumbre. Esto comprende su evaluación, administración y control, asociado a las

incertidumbres que origina.

La experiencia y las observaciones permiten al Actuario ir construyendo, validando y aplicando modelos que conducen a la evaluación de los efectos económicos y financieros asociados a fenómenos que están sujetos a algún grado de incertidumbre, relativos a su ocurrencia, oportunidad e intensidad, aplicando principios que derivan de la matemática, la estadística, la economía y las finanzas.

1.4.1 De la "Equitable" al genoma humano

Las bases de la profesión de Actuario encuentran sus orígenes en el seguro de vida. Haciendo un poco de historia, podemos identificar el nacimiento de la ciencia actuarial cuando se aplicó por primera vez la tabla de mortalidad -modelo estadístico que relaciona la edad con la probabilidad de muerte- permitiendo una mejor definición de tarifas.

Este hecho se desencadenó cuando al fundador de la Compañía de Seguros de Vida "Equitable" (Londres 1762) no le fue otorgada la cobertura de seguro de vida en razón de su edad relativamente avanzada. Se debe a él el uso de las

tablas de mortalidad, herramienta que permitió una mejor suscripción de este riesgo.

A partir de allí, su actuación se focalizó en la órbita del negocio asegurador y de los sistemas de pensiones y de salud, todos ellos relacionados con los riesgos inherentes a la vida humana. Luego se expandió hacia otros riesgos.

A partir de los avances científicos y tecnológicos, como la disponibilidad de procesadores y el acceso a la información, la forma de ejercer la profesión ha sufrido cambios importantes. Como es de esperar, lejos de haber terminado, los cambios se hacen más frecuentes y drásticos. Es el caso del grado de desarrollo alcanzado en la biotecnología y la genética. La posibilidad de prediagnosticar cierto tipo de enfermedades que se originan en una predisposición genética podría ser utilizada como herramienta de suscripción de riesgos en estos negocios. Si bien no existe consenso respecto del impacto que esta herramienta podría tener, sí hay coincidencia en que él dependerá de los costos asociados a los exámenes y las tendencias en cuestiones éticas y legales. Esta situación cobró ahora una gran importancia, sobretudo por el anuncio

realizado por los científicos de la publicación del mapa genético humano, denominado GENOMA HUMANO, mediante el cual se podrá determinar con mayor exactitud la mortalidad o la propensión a las enfermedades de cada persona en particular.

Estos cambios tienden a limitar el riesgo en los seguros de vida, y adquiere así mayor importancia la incidencia de la arista financiera pura del producto.

La integración de los negocios de seguros, bancarios y otros relacionados en grandes conglomerados de servicios financieros es una clara tendencia del mercado actual. Hoy al Actuario no sólo se lo identifica con las cuestiones técnicas propias del seguro, sino que, a partir de los modelos que domina y de su conocimiento del mercado, es de utilidad en el manejo y en el control del riesgo de activos y pasivos financieros, instrumentos derivados (futuros, opciones, swaps) y la administración de carteras (Portafolio).

Originalmente, las técnicas actuariales fueron de aplicación principalmente en aquellos negocios en los cuales el riesgo es

propio de los términos contractuales entre las partes. No obstante, el resto de los negocios que no participan de esta definición también se expone a múltiples riesgos que en parte justifican su rentabilidad.

Si bien los orígenes de la rentabilidad son muy distintos en cada modelo de negocios y las variables críticas para obtenerla lo son mucho más, difícilmente puede estarse ajeno a la evolución de ciertas variables, como la tasa de interés o la evolución de los activos financieros. Tampoco estarán ajenos a la evolución de los precios de ciertos insumos críticos. Ante estos casos, el Actuario podrá aplicar sus conocimientos y técnicas en evaluar el impacto potencial de las variables analizadas y encontrar aquellos instrumentos que permitan su control. Es el caso de los instrumentos derivados (futuros, opciones, swaps), cuya base teórica es compartida con las técnicas actuariales. Adecuadamente utilizados, ellos permiten definir estrategias que posibiliten el control de aquellas variables identificadas como críticas.

Estamos presenciando un momento crítico en la forma de hacer negocios, en el que la tecnología ha facilitado el acceso

a la información clave, tratando de reproducir modelos exitosos para que lo sean en cualquier parte del planeta. Hoy es más fácil acceder a la información, pero es mucho más difícil encontrar experiencias replicables.

Es por ello que el entorno cambiante e impredecible de los negocios que estamos viviendo no limita el ámbito de actuación de los actuarios. Por el contrario, lo refuerza y lo expande hacia todos aquellos modelos de negocios riesgosos de por sí o por su entorno, en los cuales el empresario o los accionistas no estén dispuestos a convivir con un nivel de riesgo no deseado.

CAPITULO 2

2 TEORIA DE LA SUPERVIVENCIA

2.1 El fenómeno actuarial

El fenómeno actuarial se encuentra definido por dos aspectos, por su aleatoriedad, y por que sus sucesos influyen en términos financieros. Se trata entonces de un fenómeno aleatorio-financiero. Una definición matemática del fenómeno actuarial, sería a través de una variable estocástica, cuya función vendría dada por la aplicación $x = g(\omega)$, donde ω son los puntos aleatorios del espacio Ω de los posibles sucesos y x los valores financieros, es decir dinero a un tiempo determinado. Tal es el caso de los seguros de vida, en el cual la persona que contrata dicho servicio tiene derecho a recibir una determinada cantidad de dinero cuando se realiza el acaecimiento del fallecimiento del asegurado.

Esta cantidad de dinero que percibe el asegurado recibe el nombre de "indemnización" al realizarse el siniestro o suceso aleatorio. El

fenómeno actuarial se relacionara con la obtención de su función de distribución o espacio de probabilidad, ya que se trata de una variable estocástica; y es ahí donde entra la Estadística Actuarial.

La Estadística Actuarial tiene por objetivos definir y analizar los modelos de probabilidades de los fenómenos actuariales. Por lo tanto, dentro de la Estadística Actuarial está comprendida la Biometría Humana, la elaboración de tablas de mortalidad, el estudio de invalidez, y todo el estudio llamado de riesgos elementales, sobre cosas, accidentes, grupos, etc., en cuanto a la elaboración de los correspondientes modelos de probabilidades. Se debe considerar como parte de la Estadística Actuarial el análisis de los modelos de probabilidad correspondientes a la posible quiebra de la entidad aseguradora, y la valoración de su riesgo financiero, es decir asumiendo el riesgo de todas sus operaciones de cobertura.

2.2 Tiempo biométrico

El fenómeno de la supervivencia se caracteriza porque sus sucesos se relacionan con el hecho de que un individuo cualquiera perteneciente a un grupo específico alcance y supere una edad concreta. Es claro que el hecho de que una persona sobreviva se

debe a causas biológicas. Así pues toda la teoría de supervivencia y las consecuencias de que ella se deriven están integradas en la ciencia denominada BIOMETRIA, cuyo objetivo es el estudio de los organismos vivos con métodos matemático-estadísticos.

Al plantearnos algunas cuestiones para definir el fenómeno de la supervivencia aparece como elemento principal la edad, la cual es un *parámetro* fundamental del fenómeno, la misma que la denominaremos *tiempo biométrico*.

2.3 Variables Biométricas

Los principales modelos estocásticos del fenómeno de supervivencia se expresan mediante dos variables que recogen el hecho de sobrevivir a una edad concreta o de no superarla.

Evidentemente ambas variables se refieren a hechos contrarios.

La variable correspondiente al hecho de sobrevivir a la edad concreta x se caracteriza porque su dominio pertenece al campo numérico \mathbb{R}^+ y viene definido por el intervalo (x, ω) , en el que ω representa la edad límite accesible.

La variable biométrica correspondiente al hecho de no superar una determinada edad x , tiene como dominio el intervalo $(0, x)$. Es claro

que los estudios de las variables biométricas propuestas puede realizarse a partir de la definición de otra variable que llamaremos edad de muerte (ξ).

En efecto, si $F(x) = P(\xi < x)$ es la función de distribución de probabilidad de la variable edad de muerte (fallecimiento o quiebra) del ente, la probabilidad de no sobrevivir a la edad x es justamente $F(x)$ y la probabilidad de superar dicha edad es $1 - F(x)$, ya que se trata del suceso complemento (contrario). Las hipótesis hechas con relación a 0 y ω se reflejan en las siguientes condiciones formales de $F(x)$:

$$F(0) = 0, \quad F(\omega) = 1$$

Así pues, si se conoce la función de distribución $F(x)$ correspondiente a un individuo, pueden definirse las siguientes funciones:

2.3.1 Función de Supervivencia:

Denotemos por x la edad, en periodos anuales, de un individuo. Consideremos un recién nacido y asociemos la

variable aleatoria ξ a la edad de fallecimiento del ente considerado. Sea $F(x)$ la función de distribución de ξ

$$F(x) = P(\xi < x), x > 0$$

y establezcamos

$$s(x) = 1 - F(x) = P(\xi > x), x > 0$$

Donde como ya se sabe $F(0) = 0$, lo cual implica que $s(0) = 1$.

La función $s(x)$ se denomina <<función de supervivencia>>, ya que para cualquier valor positivo de x , la $s(x)$ nos da la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x .

La distribución de ξ como ya se sabe se puede definir por la función $F(x)$, o bien, por la $s(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(x < \xi < z) &= F(z) - F(x) \\ &= s(x) - s(z) \end{aligned}$$

La probabilidad de que un recién nacido fallezca entre x e y , sobreviviendo a la edad x , sería:

$$P(x \leq \xi \leq y \mid \xi \geq x) = \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(y)}{s(x)}$$

Ahora veamos que propiedades se pueden atribuir a la función de supervivencia $s(x)$:

- ❖ La función $s(x)$ es una función decreciente o no_creciente cuando x crece.
- ❖ Puede ser conveniente y razonable suponer que $s(x)$ sea una función continua de x .
- ❖ $s(0) = 1$ y en el extremo superior ω de x , $s(\omega) = 0$.

2.3.2 Tiempo futuro de supervivencia

Denotemos por (x) un individuo de edad x y por $T(x)$, o solamente por T , el tiempo futuro de supervivencia de (x) , es decir, $T = \xi - x$, se tendría:

- ❖ La probabilidad de que (x) , fallezca o quiebre dentro de t años vendría dada por:

$${}_tq_x = P[T(x) < t], t > 0$$

y la probabilidad de que (x) sobreviva t años mas vendría dada por:

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P[T(x) > t], t > 0$$

En particular, si consideremos un recién nacido se tendría

$$T(0) = \xi \text{ y, por tanto,}$$

$${}_xp_0 = s(x), x > 0$$

- ❖ Las probabilidades de supervivencia y fallecimiento referidas a un año serían, respectivamente:

$$p_x = P[(x), \text{viva un año mas}]$$

$$q_x = P[(x), \text{fallezca o quiebre dentro de un año}]$$

- ❖ La probabilidad de que (x) sobreviva t años mas y fallezca en los n años siguientes vendría dada por la expresión:

$${}_{t/n}q_x = P[t < T < t+n] = {}_{t+n}q_x - {}_tq_x = {}_t p_x - {}_{t+n} p_x$$

$$= \frac{s(x+t) - s(x+t+n)}{s(x)}$$

$$= \frac{e(x)}{e(x+t)} * \frac{e(x+t)}{e(x+t) - e(x+t+n)} = {}_t p_x * {}_n q_{x+t}$$

$${}_t p_x = \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$${}_t q_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

Denotemos por $K(x)$ una variable aleatoria discreta, asociada al tiempo de vida futura, denominada tiempo de vida futura <<abreviada>>, la cual tiene una función de distribución:

$$P[K(x) = k] = P[k < T(x) < k+1] = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x$$

$$= {}_k p_x * q_{x+k} = {}_k | 1 q_x, k = 0, 1, 2, \dots$$

La variable aleatoria $K(x)$ se puede interpretar como el número de años futuros <<completos>> vividos por (x) , y podemos escribir que:

$${}_k p_x = P[k < t(x) < k+1]$$

2.4 Modelos de supervivencia o quiebra. Tablas de mortalidad

Las tablas de mortalidad generalmente contienen los valores tabulados de l_x , d_x , q_x y, a veces, los valores correspondientes a otras funciones derivadas.

Denotaremos por l_0 al número de recién nacidos de una población cuya mortalidad va a ser estudiada. Cada edad de fallecimiento de un recién nacido tiene asociada una determinada distribución de probabilidad especificada por la función de supervivencia $s(x)$. Por otra parte, denotemos por $\lambda(x)$ al número de sobrevivientes a la edad x y por \bar{k} a su valor esperado, es decir $\bar{k} = E(\lambda(x))$; entonces $\lambda(x)$ tiene una distribución de probabilidad binomial con parámetros l_0 y probabilidad de éxito $s(x)$, por tanto:

$$l_x = l_0 * s(x)$$

De manera similar, denotemos con ${}_n\delta_x$ el número de fallecimientos ocurridos entre las edades x y $x+n$, de entre los l_0 iniciales y con ${}_nd_x$ a su valor esperado, es decir:

$${}_nd_x = E[{}_n\delta_x] = l_0[s(x) - s(x+n)] = l_x - l_{x+n}$$

2.5 Tanto instantáneo de fallecimiento o quiebra

Como ya sabemos que q_x nos mide la probabilidad de fallecimiento o quiebra (f/q) dentro de un año, entonces puede ser considerado como un índice del fallecimiento promedio efectivo entre las personas de edad x .

Como es evidente que la intensidad de los fallecimientos varía en cada momento, es interesante disponer de alguna forma de medir tal variación instantánea. Para ello, consideremos la probabilidad:

$$P[x \leq \xi \leq x + \Delta x \mid \xi \geq x] = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{F'(x) \Delta x}{1 - F(x)} = \frac{f(x) \Delta x}{1 - F(x)}$$

donde $f(x)/1-F(x)$ es una función de densidad de probabilidad condicionada que nos da, para cada edad x , el valor de la función de densidad de probabilidad condicionada de ξ a la edad exacta x , sobreviviendo a aquella edad. Esta función se denomina <<tanto

instantáneo de fallecimientos>> o <<fuerza de mortalidad>> y se denota con μ_x .

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{d[\ln s(x)]}{dx}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de la función de densidad $f(x)$ y de la función de distribución, el tanto instantáneo $\mu_x > 0$. De la anterior expresión se deduce que:

$$-\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \mu_x$$

Haciendo un cambio de variable $x = y$, obtenemos lo siguiente

$$-\mu_y dy = d \ln s(y)$$

e integrando entre x y $x+n$, tenemos:

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \int_x^{x+n} d \ln s(y) = \ln(s(x+n)) - \ln(s(x)) = \ln \left[\frac{s(x+n)}{s(x)} \right] = \ln [{}_n p_x]$$

de donde

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y dy}$$

y mediante el cambio de variable $t = y-x$, se tiene

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dy}$$

2.6 Esperanza de vida abreviada y completa

La esperanza de vida abreviada se representa con e_x y se define

$$e_x = E[x] = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k \cdot g(k) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k+1 p_x$$

como:

$$= \frac{e_{x+1} + e_{x+2} + \dots + e_{\omega-1}}{e_x}$$

Que es el valor esperado de años completos vividos por un individuo de edad x desde esa edad.

Mientras que la esperanza de vida completa se denota con

${}^o e_x$

Y es igual a

$${}^o e_x = E[T] = \int_0^{\omega-x} t \cdot g(t) dt = \int_0^{\omega-x} t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$$

Mediante la integración por partes:

$$e_x^o = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

La función e_x^o se puede interpretar como que representan el tiempo medio de vida futuro.

Una aproximación a la relación entre las dos esperanzas se puede basar en un razonamiento general, es decir, no tener en cuenta los años fraccionados de vida en media:

$$e_x^o \approx e_x + \frac{1}{2}$$

La esperanza de vida anticipada vendría dada por la expresión:

$$\ddot{e}_x = e_{x+1}$$

2.7 Vida probable

Para definir la << vida probable τ >>, supongamos que la función de t , ${}_t p_x$ es, continua y decreciente de 1 a 0 al crecer t de 0 en adelante.

Entonces, existirá un valor τ , tal que:

$${}_{\tau} p_x = \frac{l_{x+\tau}}{l_x} = \frac{1}{2} = {}_{\tau} q_x$$

es decir, (x) tiene igual probabilidad de f/q dentro de los τ años o de sobrevivir a la edad $x+\tau$. El valor de τ representa la denominada <<vida probable>>.

2.8 Número total esperado de años de supervivencia

Considerando un determinado grupo de personas o sector de empresas constituido por l_x elementos iniciales, denotamos por L_x <<el número total esperado de años de supervivencia>> vividos por los elementos del grupo, que es igual a:

$$L_x = \int_0^1 t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} dt + l_{x+1}$$

Integrando por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} L_x &= -\int_0^1 t \cdot dl_{x+t} + l_{x+1} = -t \cdot l_{x+t} \Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} \\ &= -l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t} dt \end{aligned}$$

2.9 Tanto central de fallecimiento a la edad x

Se define el tanto central de fallecimiento a la edad x por la expresión:

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}$$

Se denota por T_x el número total de años vividos desde la edad x por el grupo de sobreviviente procedente de un grupo inicial de l_x elementos y se puede expresar de la forma siguiente:

$$T_x = \int_0^{\infty} t \cdot l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} dt = - \int_0^{\infty} t dl_{x+t} = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} = l_{xt} p_x \mu_{x+t}$$

El número medio de años de supervivencia futura de los l_x sobrevivientes del grupo a la edad x sería:

$$\frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_0^{\infty} l_{x+t} dt}{l_x} = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt = e_x^{\circ}$$

CAPITULO 3

3. CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO TEÓRICO (BIOMÉTRICO)

3.1 Leyes Biométricas.

Supongamos que el incremento del tanto instantáneo de fallecimiento es de la forma:

$$\Delta \mu_x = k \mu_x \Delta x + h \Delta x + O(\Delta x)$$

Donde $O(\Delta x)$ representa la función 'O grande', es decir es un infinitesimo de orden superior respecto a Δx , si aplicamos el criterio de la derivada tendríamos que:

$$\frac{\Delta \mu_x}{\Delta x} = k\mu_x + h + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\mu_{x+\Delta x} - \mu_x}{\Delta x} = k\mu_x + h + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mu_{x+\Delta x} - \mu_x}{\Delta x} = k\mu_x + h + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$d\mu_x = (k\mu_x + h)dx$$

De donde se observa que la última ecuación es una ecuación diferencial lineal de la forma $\mu'_x - k\mu_x = h$, cuya solución es, según la fórmula de Abel:

$$\mu_x = e^{-\int -kdx} \left[\int e^{\int -kdx} \cdot h dx + c \right]$$

$$\mu_x = e^{kx} \left[h \cdot \frac{e^{-kx}}{-k} + c \right], \text{ entonces } \mu_x = ce^{kx} - \frac{h}{k}$$

Reemplazando $a = -h/k$, $b=c$ obtenemos el llamado Modelo de Makeham.

$$\mu_x = be^{kx} + a$$

Si $h=0$, tendríamos la fuerza de mortalidad correspondiente a ley de **Gompertz**. Nótese que bajo la hipótesis de Gompertz la mortalidad crece geoméricamente con razón e^k , pues la fuerza de mortalidad sería:

$$\mu_x = be^{kx}, \text{ con razón } c = e^k$$

Para que el tanto μ_x sea creciente con x se debe tener $k > 0$, es decir, $c > 1$. La experiencia indica que una vez superados los primeros meses de vida, el tanto de mortalidad decrece, pudiendo situarse su valor mínimo en alguna edad cercana a los trece años de edad, para, a partir de esa edad, pasar a ser creciente. Por tal motivo, los modelos de Gompertz y Makeham, no son confiables para edades infantiles.

Para eliminar tal limitación, se generaliza el modelo de Makeham, introduciendo un nuevo término,

$$\mu^x = a + p^1 c_x^1 + p^2 c_x^2$$

Donde por razones prácticas $c_1 > 1$ y $c_2 < 1$.

Esta expresión corresponde, al modelo de Lazarus. La importancia de esta hipótesis sobre la de Makeham estriba en que así como el modelo de Makeham no da un valor servible para edades jóvenes, ya que el tanto instantáneo es permanentemente creciente, el de Lazarus, presenta un mínimo único para alguna edad, que se puede calcular así:

$$\frac{d\mu_x}{dx} = \frac{da}{dx} + \frac{de^{x \ln c_1}}{dx} b_1 + \frac{de^{x \ln c_2}}{dx} b_2$$

$$c_1^x b_1 \ln c_1 + c_2^x b_2 \ln c_2 = 0$$

$$\frac{b_1 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^x}{b_2} = - \frac{\ln c_2}{\ln c_1}$$

$$x^* = \frac{\ln(-\ln c_2) - \ln(\ln c_1) + \ln(b_2) - \ln(b_1)}{\ln(c_1) - \ln(c_2)}; (1)$$

Luego se trata de un tanto decreciente hasta X^* y creciente a partir de esta edad, es decir el modelo de Lazarus sirve para edades jóvenes, y puede utilizarse para ajustar los datos de la mortalidad observados en una población cualquiera.

3.2 Estimación lineal del modelo biométrico

Haremos la hipótesis de que son conocidos c_1 y c_2 , por lo que el modelo a estimar será:

$$p^t \alpha = a + b_1 c_1^x + b_2 c_2^x$$

en la que

$$\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} 1 \\ c_1^x \\ c_2^x \end{pmatrix}$$

La ecuación de observación será

$$\mu = A \alpha + \varepsilon ; (2)$$

en la que

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \dots \\ \mu_{x_n} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c_1^{x_1} & c_2^{x_1} \\ 1 & c_1^{x_2} & c_2^{x_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & c_1^{x_n} & c_2^{x_n} \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

suponemos también,

$$E(\varepsilon) = 0; L_\varepsilon = \sigma^2 I$$

Este supuesto significa que la función de densidad de los errores del modelo (2) tiende a una normal con media 0 y varianza σ^2 . Donde I es la matriz identidad. Evidentemente tendremos

$$A^t A = S = n \begin{pmatrix} 1 & \overline{c_1} & \overline{c_2} \\ \overline{c_1} & \overline{c_1^2} & \overline{c_1 c_2} \\ \overline{c_2} & \overline{c_1 c_2} & \overline{c_2^2} \end{pmatrix} \quad \overline{c_1} = \frac{\sum_{i=1}^n c_1^{x_i}}{n} \quad \overline{c_2} = \frac{\sum_{i=1}^n c_2^{x_i}}{n}$$

$$\overline{c_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^n c_1^{2x_i}}{n} \quad \overline{c_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^n c_2^{2x_i}}{n} \quad \overline{c_1 c_2} = \frac{\sum_{i=1}^n (c_1 c_2)^{x_i}}{n}$$

Sabemos que el determinante de S es

$$|S| = n^3 * (\overline{c_1^2 c_2^2} - (\overline{c_1 c_2})^2 - (\overline{c_1})^2 \overline{c_2^2} + 2\overline{c_1 c_2} (\overline{c_1 c_2}) - (\overline{c_2})^2 \overline{c_1^2})$$

Aplicando el método de los cofactores para encontrar la inversa de la matriz S, el cual consiste en dividir los diferentes cofactores de cada elemento de la matriz para su determinante tenemos que su inversa es:

$$S^{-1} = \frac{n^2}{|S|} \begin{pmatrix} \overline{c_1^2 c_2^2} - (\overline{c_1 c_2})^2 & -\overline{c_1} (\overline{c_2^2}) + \overline{c_2} (\overline{c_1 c_2}) & \overline{c_1} (\overline{c_1 c_2}) - (\overline{c_1^2}) \overline{c_2} \\ -\overline{c_1} (\overline{c_2^2}) + \overline{c_2} (\overline{c_1 c_2}) & n\overline{c_2^2} - (\overline{c_2})^2 & -n\overline{c_1 c_2} + (\overline{c_1}) \overline{c_2} \\ \overline{c_1} (\overline{c_1 c_2}) - (\overline{c_1^2}) \overline{c_2} & -n\overline{c_1 c_2} + (\overline{c_1}) \overline{c_2} & n\overline{c_1^2} - (\overline{c_1})^2 \end{pmatrix}$$

La solución viene dada, por las expresiones,

$$\hat{\alpha} = S^{-1} A^t \mu = S^{-1} \begin{pmatrix} n\overline{\mu} \\ \sum_{i=1}^n c_1^{x_i} \mu_{x_i} \\ \sum_{i=1}^n c_2^{x_i} \mu_{x_i} \end{pmatrix}$$

Donde

$$\overline{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{x_i}}{n}$$

Luego los estimadores de los parámetros desconocidos del modelo de Lazarus son:

$$\hat{a} = \frac{n^2}{|S|} \left[n\bar{\mu}(\bar{c}_1^2 \bar{c}_2^2 - (\bar{c}_1 \bar{c}_2)^2) + \sum_{i=1}^n c_1^{x_i} \mu_{x_i} (-\bar{c}_1(\bar{c}_2^2) + \bar{c}_2(\bar{c}_1 \bar{c}_2)) + \sum_{i=1}^n c_2^{x_i} \mu_{x_i} (\bar{c}_1(\bar{c}_1 \bar{c}_2) - \bar{c}_1^2(\bar{c}_2)) \right]$$

$$\hat{b}_1 = \frac{n^2}{|S|} \left[n\bar{\mu}(-\bar{c}_1(\bar{c}_2^2) + \bar{c}_2(\bar{c}_1 \bar{c}_2)) + \sum_{i=1}^n c_1^{x_i} \mu_{x_i} (n(\bar{c}_2^2) - (\bar{c}_2)^2) + \sum_{i=1}^n c_2^{x_i} \mu_{x_i} (-n(\bar{c}_1 \bar{c}_2) + \bar{c}_1(\bar{c}_2)) \right]$$

$$\hat{b}_2 = \frac{n^2}{|S|} \left[n\bar{\mu}(\bar{c}_1(\bar{c}_1 \bar{c}_2) - \bar{c}_1^2(\bar{c}_2)) + \sum_{i=1}^n c_1^{x_i} \mu_{x_i} (-n\bar{c}_1 \bar{c}_2 + (\bar{c}_1) \bar{c}_2) + \sum_{i=1}^n c_2^{x_i} \mu_{x_i} (n\bar{c}_1^2 - (\bar{c}_1)^2) \right]$$

Hemos supuesto conocido c_1 y c_2 . En el caso de que no dispusiéramos información de c_1 o de c_2 , se procederá de la siguiente forma.

Sabemos que:

$$I_x = e^{\left[-\int_0^x \mu_y dy \right]} = e^{\left[-\int_0^x (a + b_1 c_1^y + b_2 c_2^y) dy \right]} = e^{[A + Bx + Dc_1^x + Ec_2^x]}$$

$$\ln(I_x) = A + Bx + Dc_1^x + Ec_2^x$$

$$\Delta \ln(I_x) = \ln(I_{x+1}) - \ln(I_x) = B + D(c_1 - 1)c_1^x + E(c_2 - 1)c_2^x$$

$$\Delta^2 \ln(I_x) = \ln(I_{x+2}) - 2\ln(I_{x+1}) + \ln(I_x) = D(c_1 - 1)^2 c_1^x + E(c_2 - 1)^2 c_2^x$$

$$\Delta^2 \ln(I_x) = Fc_1^x + Gc_2^x$$

En donde

$$Z_x = \Delta^2 \ln(I_x)$$

Es solución de la ecuación en diferencias finitas.

$$Z_{x+2} + B_1 Z_{x+1} + B_2 Z_x = 0; (3)$$

En donde $B_1 = -(c_1 + c_2)$; $B_2 = (c_1 c_2)$, resolviendo la ecuación de la parte de arriba tenemos que su solución será igual a Z_x .

$$y'' + B_1 y' + B_2 y = 0$$

$$y = e^{rx}$$

$$r^2 + B_1 r + B_2 = 0$$

$$r = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_2}}{2}$$

$$r_1 = c_1$$

$$r_2 = c_2$$

$$y = F e^{c_1 x} + G e^{c_2 x}$$

Despejando c_2 de la ecuación en diferencias tenemos que

$$c_2 = \frac{Z_{x+2} - c_1 Z_{x+1}}{Z_{x+1} - c_1 Z_x}$$

La estimación de c_2 se realizará mediante la mediana de las observaciones a partir de la muestra ordenada

$$\gamma_{x(1)} \leq \gamma_{x(2)} \leq \gamma_{x(3)} \leq \dots \leq \gamma_{x(n)}$$

$$\gamma_x = \frac{Z_{x+2} - c_1 Z_{x+1}}{Z_{x+1} - c_1 Z_x}$$

Elegiremos, por tanto, para Q_2 un valor cualquiera del intervalo de confianza, donde Q_2 representa la mediana, también suele ser representada como $\zeta_{0.5}$

Como se demuestra luego, el intervalo de confianza para la mediana es calculado como:

$$P[\gamma_{x(i)} \leq Q_2 \leq \gamma_{x(j)}] = \sum_{r=i}^{j-1} \binom{n}{r} \frac{1}{2^n}$$

En efecto, determinemos la fórmula anterior para el intervalo de confianza para la mediana $Q_2 = \zeta_{0.5}$, si se tiene una población con distribución $F_x(x)$ cuya mediana es Q_2 y se extrae una muestra aleatoria de tamaño n ; x_1, x_2, \dots, x_n ; un estimador natural de Q_2 si n es impar es $X_{\{(n+1)/2\}}$.

Como $F_x(Q_2) = 0.5$, observemos que $E(F_x(X_{\{(n+1)/2\}}))$, donde $Y = F_x(x)$ como se sabe, tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$; luego $E(Y_{\{(n+1)/2\}}) = \{(n+1)/2\}/n+1 = 0.5$, donde $X_{\{(n+1)/2\}}$ es un buen estimador de la mediana.

Ahora bien: $P(X_{(k)} < \zeta_p) = P(F_x(X_{(k)}) < F(\zeta_p)) = P(Y_{(k)} < p)$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^p k \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx; u = (1-x)^{n-k}; du = -(n-k)(1-x)^{n-k-1} \\
&dv = x^{k-1} dx; v = \frac{x^k}{k} \\
&= k \binom{n}{k} \left[\left[\frac{x^k (1-x)^{n-k}}{k} \right]_0^p + \left(\frac{n-k}{k} \right) \int_0^p x^k (1-x)^{n-k-1} dx \right] \\
&u = (1-x)^{n-k-1}; du = -(n-k-1)(1-x)^{n-k-2} dx \\
&dv = x^k dx; v = \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + \dots + \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 \\
P(X_{(k)} \leq \zeta_p) &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}
\end{aligned}$$

Bien, ahora generaremos un intervalo de confianza bilateral: Sea $k < m$ y los eventos

$$\{X_{(k)} \leq \zeta_p \leq X_{(m)}\}, \{X_{(k)} \leq X_{(m)} \leq \zeta_p\}$$

Son mutuamente excluyentes y su unión da como resultado el siguiente evento

$$\begin{aligned}
&\{X_{(k)} \leq \zeta_p \leq X_{(m)}\} \cup \{X_{(k)} \leq X_{(m)} \leq \zeta_p\} = \{X_{(k)} \leq \zeta_p\} \\
P(X_{(k)} \leq \zeta_p) &= P(X_{(k)} \leq \zeta_p \leq X_{(m)}) + P(X_{(m)} \leq \zeta_p) \\
P(X_{(k)} \leq \zeta_p \leq X_{(m)}) &= P(X_{(k)} \leq \zeta_p) - P(X_{(m)} \leq \zeta_p) \\
P(X_{(k)} \leq \zeta_p \leq X_{(m)}) &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} - \sum_{i=m}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
P(X_{(k)} \leq \zeta_p \leq X_{(m)}) &= \sum_{i=k}^{m-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar, para el caso particular de la mediana $p=1/2$ y por tanto:

$$P(x_{(k)} \leq \zeta_{0.5} \leq x_{(m)}) = \sum_{i=k}^m \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En el caso de que no dispongamos información de c_1 y c_2 , suponemos lo siguiente que $c_1=1+\delta$, $c_2=1-\delta$. Si reemplazamos estos valores en la ecuación (3) la ecuación en diferencias será entonces,

$$\begin{aligned} Z_{x+2} - 2Z_{x+1} + (1 - \delta^2)Z_x &= 0 \\ Z_{x+2} - 2Z_{x+1} + Z_x &= \delta^2 Z_x \\ \delta^2 &= \frac{\Delta^2 Z_x}{Z_x} \end{aligned}$$

Podemos ahora estimar δ^2 mediante la mediana de la muestra ordenada en que

$$g_{x(1)} \leq g_{x(2)} \leq \dots \leq g_{x(n)}$$

Nota: En poblaciones continuas, la distribución marginal del i -ésimo estadístico de orden es:

$$\begin{aligned} f_{x(i)}(x) &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} f_x(x) [F_x(x)]^{i-1} [1-F_x(x)]^{n-i}; i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{1}{i} = \binom{n}{i} \end{aligned}$$

Así por ejemplo: Si tenemos una muestra aleatoria de tamaño n , tomada de una población con distribución uniforme con parámetros 0 y 1, la densidad del i -ésimo estadístico de orden es una beta con parámetros $i, n-i+1$, como vemos a continuación.

$$f_x(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sino} \end{cases}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_{x(i)}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} x^{i-1} (1-x)^{n-i} & \end{cases}$$

Este último resultado demuestra que la densidad del i -ésimo estadístico de orden tiene la densidad de una Beta con $\alpha=i$, y $\beta=n-i+1$, de donde se concluye que su valor esperado es:

$$E(X_{(i)}) = \frac{i}{n-i+1+i} = \frac{i}{n+1}$$

Para la estimación de los parámetros del modelo de Lazarus necesitamos la población por edades estimadas por el Inec para el año 2000 a partir del Censo de Población efectuado en 1990, las edades correspondientes al Censo de Población y a la estimación respectivamente presenta la siguiente forma.

Gráfico de la Población del Censo de 1990

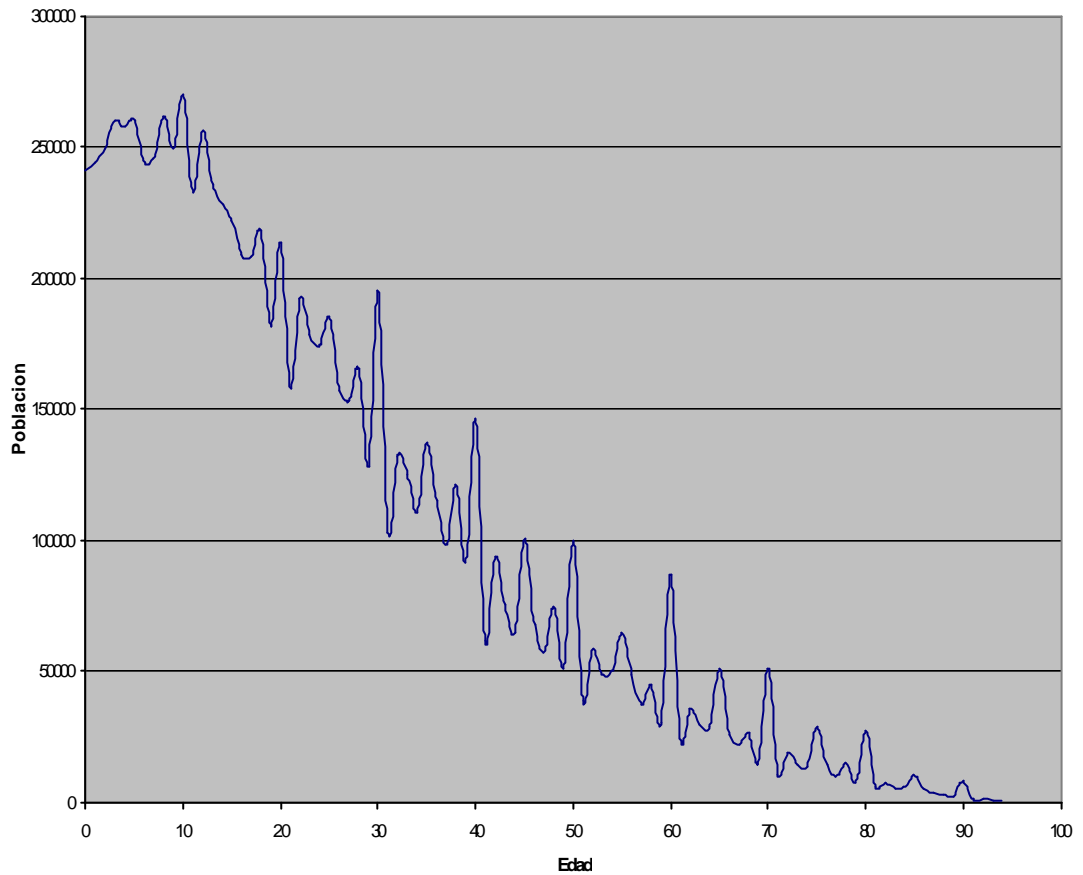


figura 3.1

Como se puede notar en el gráfico anterior existen mucha variabilidad entre las diferentes edades, las causas pueden ser muchos factores uno de ellos posiblemente la mala declaración de las edades por parte de los individuos censados, sobre todo se

observan picos en edades múltiplos de cinco por ejemplo, 40, 45, 50, 55, etcétera, esto puede deberse también a que las personas desde cierta edad tienden a declarar una edad en un número múltiplo de cinco, por lo que se hace necesario tratar de suavizar estas curvas mediante la interpolación cubica o Splines, que haga mas “natural” la curva de la población en distintas edades. Pasamos a estudiar el problema de la interpolación y los mecanismos numéricos para resolverlo.

3.3 El Problema de la Interpolación

Muchas veces, de una función sólo conocemos un conjunto de valores. Esto puede suceder, por ejemplo, porque son los resultados de un experimento gobernado por una ley que desconocemos. Si queremos calcular el valor de la función para una abscisa diferente de las conocidas, debemos utilizar otra función que la aproxime y, naturalmente, el valor que obtengamos será una aproximación del valor real. También puede suceder que sepamos la expresión analítica de la función, pero sea lo suficientemente complicada como para calcular aproximaciones a los valores de la función a partir de otros ya conocidos.

Existen varias formas de hacer esto, pero la más sencilla y una de las más utilizadas es la **interpolación**, que consiste en construir una función que pase por los valores conocidos (llamados **polos**) y utilizar ésta como aproximación de la función primitiva. Si se utilizan polinomios como funciones de aproximación, hablamos de **interpolación polinómica**.

Si la abscisa para la que queremos encontrar un valor aproximado de la función se encuentra fuera del mayor intervalo definido por las abscisas de los polos, se dice que estamos haciendo **extrapolación**.

3.3.1 Interpolación

Supongamos que se conocen los $n+1$ valores que toma una función $f(x)$, en los puntos del conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ denominado soporte, es decir supongamos conocidos $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$

El problema de la interpolación consiste en encontrar una función $g(x)$ de determinadas características y tal que $g(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. En caso de existir, se dice que $g(x)$ interpola a $f(x)$ en el soporte $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Al decir de determinadas características nos referimos a que se exige que $g(x)$ sea, por ejemplo, un polinomio, un cociente de polinomios, una función trigonométrica, etc.

La finalidad de encontrar una función $g(x)$ que interpola a otra $f(x)$ en el soporte $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es la de aproximar la función $f(x)$ en un punto x de tal forma que se pueda decir que $f(x) \approx g(x)$ una vez encontrada $g(x)$. (Otra cosa es la evaluación de $f(x) - g(x)$).

Si el valor de x se encuentran en el intervalo $[X_0, X_n]$ se dice que estamos interpolando. Si se encuentran fuera de dicho intervalo, se dice que estamos extrapolando.

Como aplicaciones más directas tenemos:

- ❖ **Evaluación:** (una aproximación) de una función complicada f , en un cierto punto x .

- ❖ Si $g(x)$ es cómoda de derivar o integrar, la sustitución, en cierta medida, de f' por f

3.3.2 Interpolación por splines

Consideremos una partición del intervalo $[a,b]$

$$\Delta = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

en la que los puntos x_i reciben el nombre de nodos. Una interpolación por splines no es más que tomar un soporte en cada subintervalo $[X_{i-1}, X_i]$ y construir un polinomio de interpolación, de grado no superior a k (para un k prefijado) sobre dicho soporte, por lo que el método se conoce también como interpolación polinomial a trozos (véase la siguiente figura). Damos a continuación una definición formal de lo que denominaremos función spline.

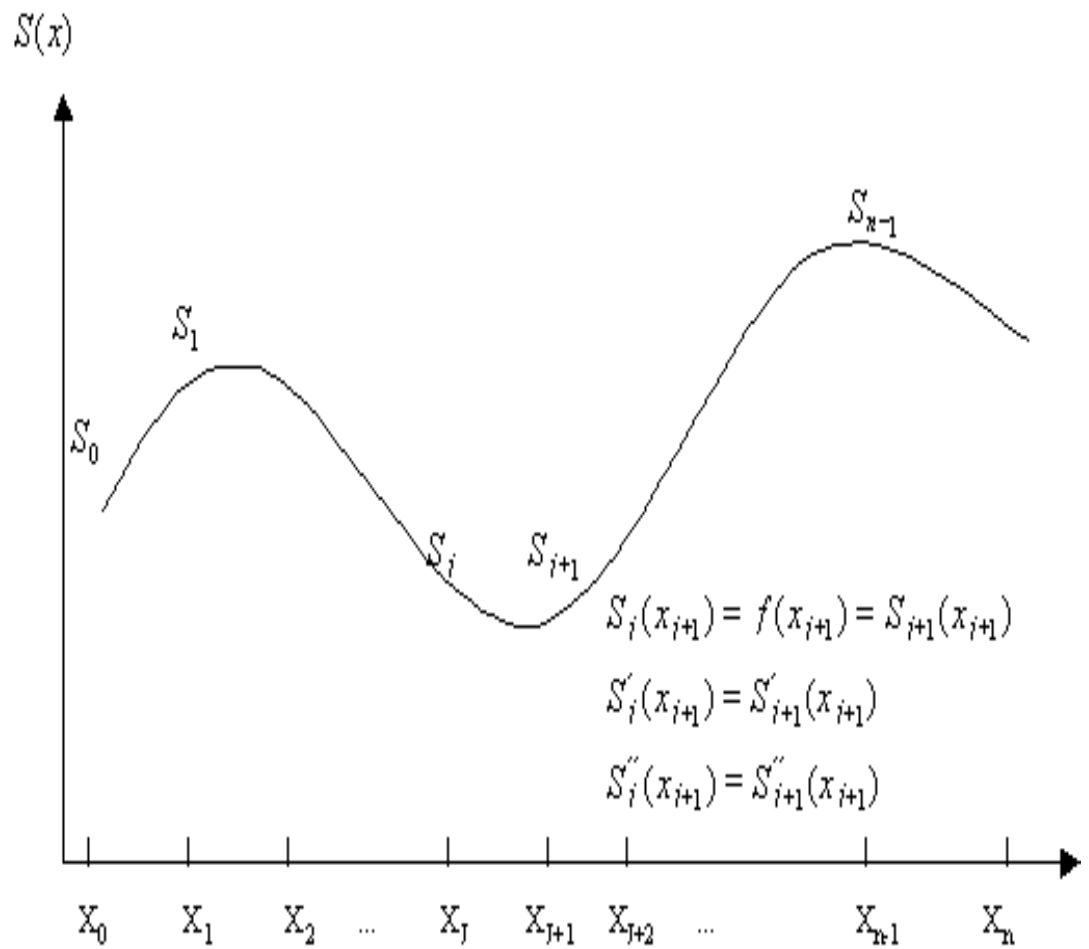


figura 3.2

Definición. Una función spline de grado k con nodos en X_0, X_1, \dots, X_n es una función $S(x)$ formada por varios polinomios, cada uno de ellos definido sobre un subintervalo y que se unen entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad. Las condiciones que debe cumplir $S(x)$ son las siguientes:

- ❖ En cada intervalo $[X_{i-1}, X_i)$, $S(x)$ es un polinomio de grado $\text{gr}[S(x)] < k$,
- ❖ $S(x)$ admite derivada continua de orden $k-1$ en $[X_0, X_n]$.

En general, pueden crearse funciones spline de grado k cualquiera, pero la interpolación más frecuente es a través de funciones spline de grado 3, es decir, de splines cúbicos.

3.3.2.1 Splines cúbicos

Dado que a partir de ahora vamos a trabajar con splines cúbicos, vamos a concretar la definición anterior al caso de $k=3$.

Definición. Dado el conjunto de puntos $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$, diremos que la función S_Δ es un **spline cúbico** asociado a Δ si cumple las siguientes condiciones:

- La restricción de S_Δ a cada intervalo $[x_{i-1}, x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ es un polinomio de grado no superior a tres. Es decir, $S_{\Delta|_{[x_{i-1}, x_i]}} \in \mathcal{P}_3[x]$, donde $\mathcal{P}_3[x]$ representa al conjunto de los polinomios de grado menor o igual a tres.

- $S_{\Delta} \in C^2[a, b]$, es decir, S_{Δ} es una función continua, dos veces derivable y con derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$.

Definición. Diremos que $S_{\Delta}(x)$ es un **spline de interpolación** en x según la partición $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$, si

- $S_{\Delta}(x)$ es un [spline cúbico](#) asociado a Δ .
- $S_{\Delta}(x_i) = f(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$, es decir, cumple las condiciones de interpolación.

Antes de construir un spline cúbico vamos a ver cuántas condiciones ha de cumplir y cuántas incógnitas van a hacernos falta. Si en cada intervalo de la partición intentamos construir un polinomio de grado tres que aproxime a la función, deberemos calcular cuatro incógnitas (los cuatro coeficientes del polinomio de grado tres) por intervalo, es decir, $4n$ incógnitas. Por otro lado, estos polinomios deben cumplir, en cada uno de los nodos, las condiciones:

$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta[x_{i-1}, x_i]}(x_i) &= S_{\Delta[x_i, x_{i+1}]}(x_i) \\ S'_{\Delta[x_{i-1}, x_i]}(x_i) &= S'_{\Delta[x_i, x_{i+1}]}(x_i) \\ S''_{\Delta[x_{i-1}, x_i]}(x_i) &= S''_{\Delta[x_i, x_{i+1}]}(x_i) \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n-1$$

Es decir, se deben cumplir un total de $3(n-1)$ condiciones además de las $n+1$ condiciones de interpolación.

$$S_{\Delta}(x_i) = f(x_i), \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Dado que tenemos un total de $4n$ incógnitas para $4n-2$ condiciones, debemos imponer dos nuevas condiciones para poder determinar los coeficientes de la función spline. Dependiendo de las condiciones que impongamos, obtendremos un tipo de spline u otro.

- Si exigimos que las derivadas segundas se anulen en los extremos, es decir, si $S_{\Delta}(a) = S_{\Delta}(a)$ diremos que $S_{\Delta}(x)$ es el spline natural asociado a la partición Δ , y físicamente se puede demostrar que es

la forma que adoptaría una barra elástica a la que se fuerza a pasar por los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$

• Si exigimos que $S_{\Delta}'(a) = S_{\Delta}'(b) \wedge S_{\Delta}''(a) = S_{\Delta}''(b)$ diremos que se trata de un spline periódico.

3.3.2.2 Cálculo de los splines cúbicos de interpolación

Nos centraremos en el cálculo de los splines naturales y con al fin de simplificar la notación, llamaremos

$$h_i = x_i - x_{i-1}; i = 1, 2, \dots, n$$

$$M_i = S_{\Delta}''(x_i); i = 0, 1, \dots, n$$

Los valores M_i se denominan momentos y determinarán completamente los splines cúbicos.

Obsérvese, en primer lugar, que como en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ el spline S_{Δ} es un polinomio de grado tres, su segunda derivada es una recta (un polinomio de grado uno). En consecuencia, al imponer las condiciones sobre la igualdad de las derivadas segundas en los nodos, obligamos a que la segunda derivada de la función spline S_{Δ}'' constituya un

conjunto de rectas que se intersecan en los nodos de la partición elegida. Ahora bien, dado que cada recta queda determinado por dos puntos, podemos escribir el valor de las restricciones sobre S_{Δ} como

$$S''_{\Delta[x_i, x_{i+1}]}(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$$

Integrando respecto a x obtenemos el valor de la primera derivada del spline en este intervalo.

$$S'_{\Delta[x_i, x_{i+1}]}(x) = -\frac{M_i}{2} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{h_{i+1}} + \frac{M_{i+1}}{2} \frac{(x - x_i)^2}{h_{i+1}} + A_i$$

Volviendo a integrar respecto a x obtenemos

$$S_{\Delta[x_i, x_{i+1}]}(x) = \frac{M_i}{6} \frac{(x_{i+1} - x)^3}{h_{i+1}} + \frac{M_{i+1}}{6} \frac{(x - x_i)^3}{h_{i+1}} + A_i(x - x_i) + B_i$$

Si imponemos ahora las condiciones de interpolacion

$$S_{\Delta}(x_i) = y_i \wedge S_{\Delta}(x_{i+1}) = y_{i+1} \text{ obtenemos}$$

$$\frac{M_i}{6} h_{i+1}^2 + B_i = y_i \Rightarrow B_i = y_i - \frac{M_i}{6} h_{i+1}^2$$

$$\frac{M_{i+1}}{6} h_{i+1}^2 + A_i h_{i+1} + B_i = y_{i+1} \Rightarrow A_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6} (M_{i+1} - M_i)$$

Podemos hallar así los valores de las constantes A_i y B_i , que determinan $S_{\Delta}(x)$ en el intervalo $[X_i, X_{i+1}]$, en función de los momentos.

El problema se reduce, por tanto, a calcular los momentos para cada uno de los intervalos, para lo que utilizaremos la única condición de que no hemos utilizado:

$$S'_{\Delta[x_{i-1}, x_i]}(x_i) = S'_{\Delta[x_i, x_{i+1}]}(x_i)$$

Esta condición nos da, para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$, una ecuación:

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$$

En el caso del spline natural tenemos que $M_0 = M_n = 0$, quedándonos el sistema tridiagonal de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{h_2}{h_1+h_2} & & & & \\ \frac{h_2}{h_2+h_3} & 2 & \frac{h_3}{h_2+h_3} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}+h_{n-1}} & \\ & & & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_n} & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{h_1+h_2} \left(\frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1} \right) \\ \frac{6}{h_2+h_3} \left(\frac{y_3-y_2}{h_3} - \frac{y_2-y_1}{h_2} \right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{6}{h_{n-1}+h_n} \left(\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}} \right) \end{pmatrix}$$

Este sistema puede resolverse por cualquiera de los métodos iterados tales como Gauss Seidel o Jacobi ya que, al ser la matriz del sistema de diagonal dominante, todos ellos son convergentes.

Una vez definido lo que es un spline procederemos a interpolar los valores obtenidos a partir del Censo de Población realizadas por el INEC en el año de 1990, luego realizamos una afijación proporcional a las proyecciones del 2 000. El resultado de interpolar los valores estimados se muestran a continuación.

Gráfico Suavizado

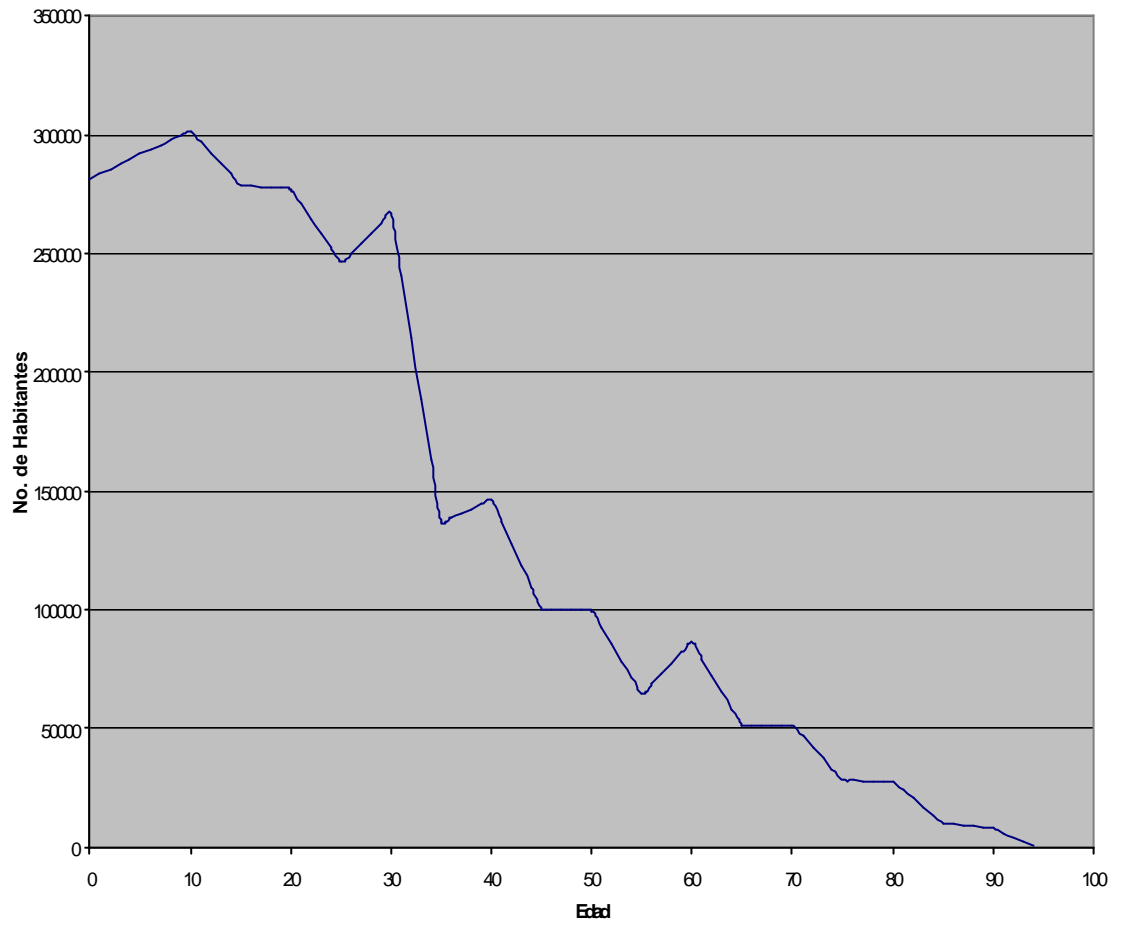


figura 3.3

TRES NODOS

Gráfico Suavizado

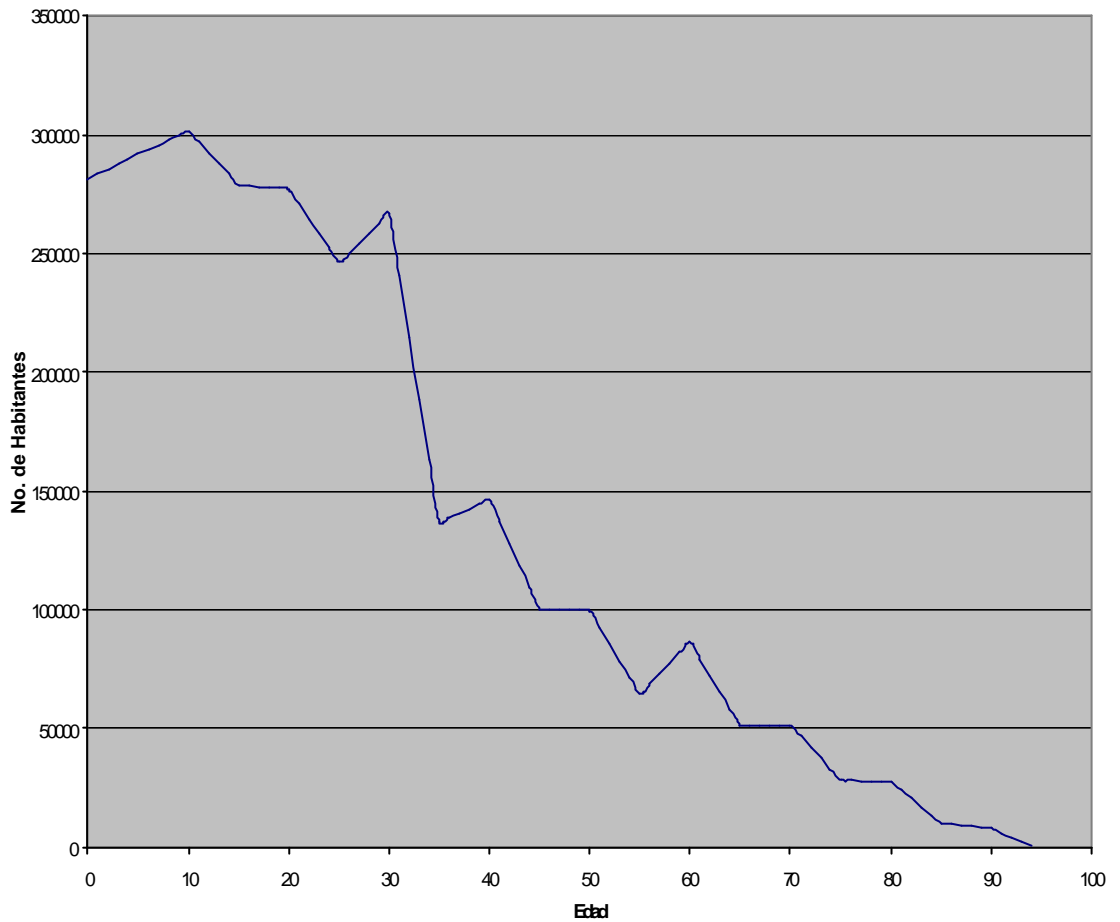


figura 3.4

DOS NODOS

Nótese, que en el primer gráfico se selecciono tres nodos para la interpolación y en el segundo gráfico se escogió dos nodos, lo que demuestra que a mayor nodos seleccionados más suave resulta la curva interpolada.

3.3.3 Interpolación con Splines y el Modelo de Regresión

Lineal

Observemos que en el procedimiento de interpolación por Spline Cúbico, forzamos al interpolante $S(x)$ a pasar por los puntos (x_i, x_{i+1}) , ahora bien, si esos puntos han sido obtenidos con error (como es el caso del registro de las edades en los censos), nuestro interpolante $S(x)$ arrastra no solo el error de truncamiento asociado al método numérico, sino también un error aleatorio debido al registro de los datos, en ese sentido sería mejor construir un $S(x)$ que no interseque necesariamente a los puntos (x_i, x_{i+1}) , sino que mas bien sea la curva que mejor se ajuste a los puntos (x_i, x_{i+1}) ; $i=0,1,2,\dots,n$; es cuando este procedimiento de suavización de curvas se lo puede realizar, mediante un modelo de regresión cubica, es decir donde el modelo a aplicar sería:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

En donde la variable dependiente, Y representa el número de habitantes en la edad X . Con la ayuda de SYSTAT, se estimaron los parámetros del modelo propuesto anteriormente.

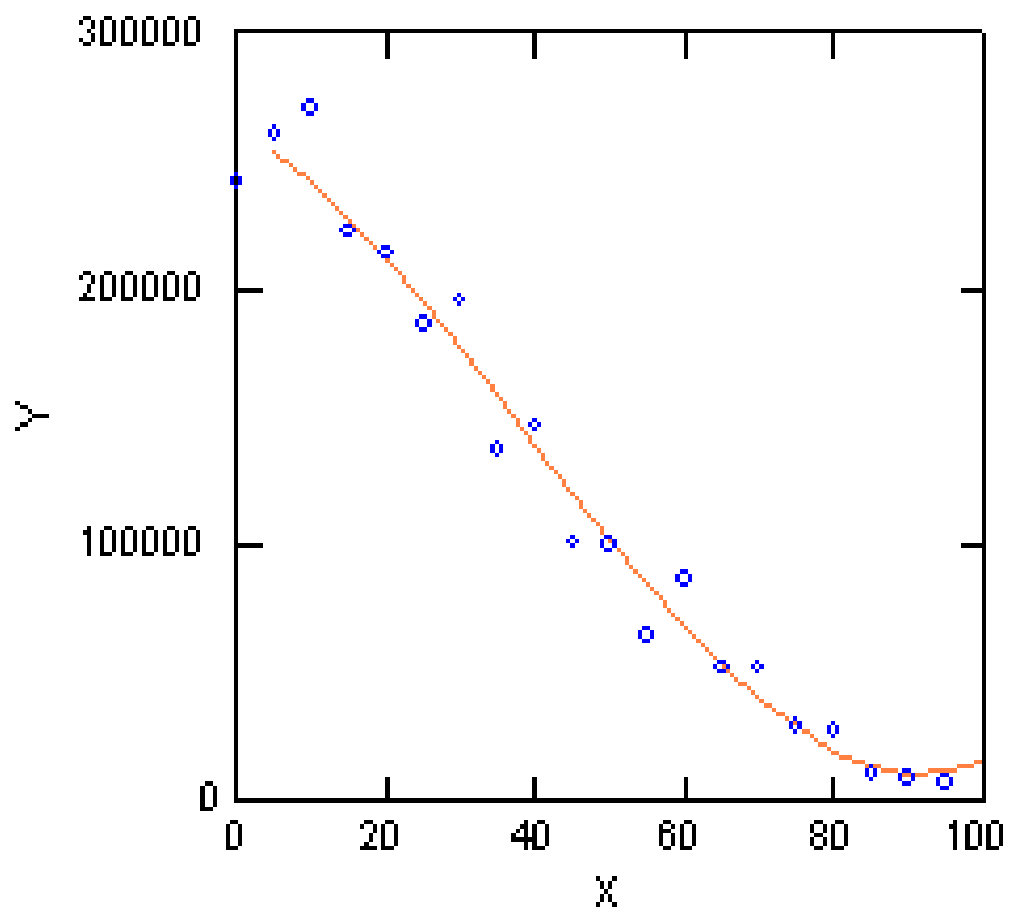


figura 3.5

TRES NODOS

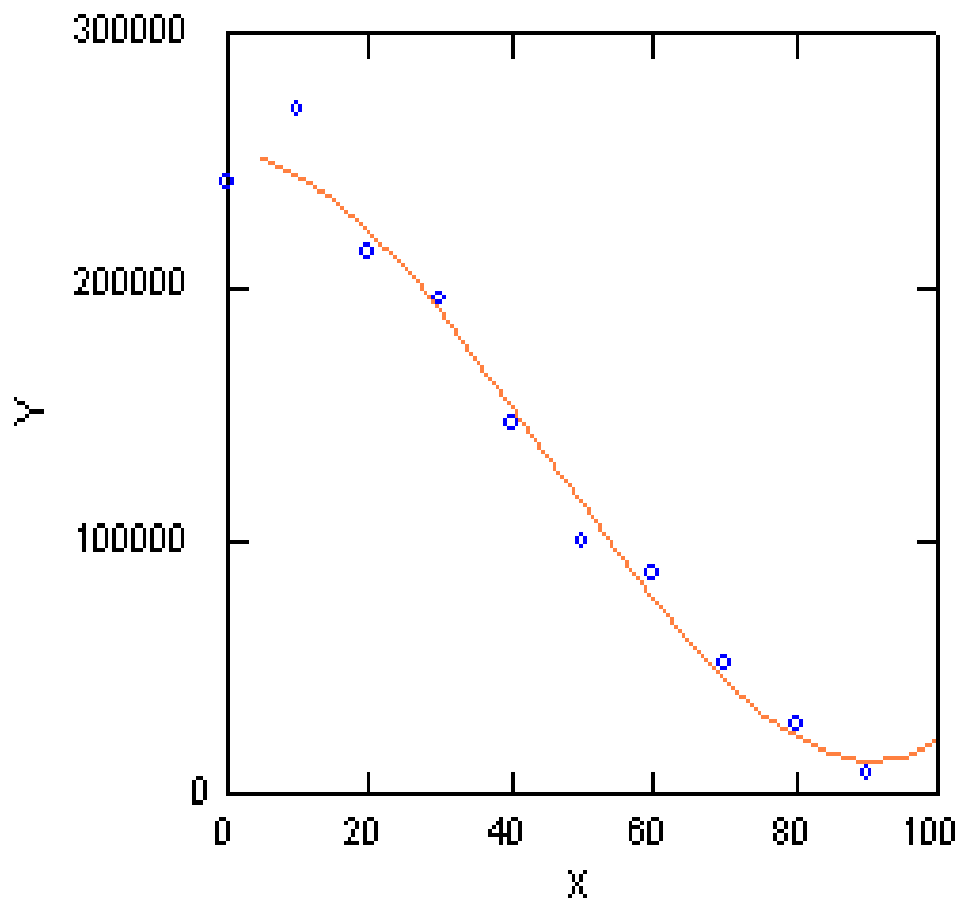


figura 3.6

DOS NODOS

Se puede apreciar que la curva que mejor ajusta al modelo de regresión lineal, no necesariamente contiene a los nodos seleccionados para la interpolación cúbica a través del trazador cubico, nótese que ambas curvas (las de regresión son casi similares, es decir se observan la misma tendencia),

por tanto no existe diferencia significativa en seleccionar dos o tres nodos para la suavización por medio del modelo de regresión cúbica. También se puede anotar que el valor de la correlación (cuando se seleccionan tres nodos) entre X, Y es de -0.961 , lo que indica que hay relación inversamente proporcional entre las edades y el número de habitantes, es decir mientras una variable aumenta el comportamiento de la otra es decreciente. Luego su coeficiente de determinación es de 0.923521 , lo que indica que el modelo está siendo explicado en un 92.23% : es decir representa la proporción de la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores Y con respecto a su promedio que se puede atribuir a una relación cubica entre X, Y. Finalmente el modelo propuesto queda de la siguiente manera.

$$Y = 262998.001 - 1732.230X - 52.453X^2 + 0.450X^3$$

Se puede apreciar que utilizando el modelo de regresión no lineal, resulta mayor la suavización que empleando los trazadores cúbicos, una razón podría ser que los nodos seleccionados en los trazadores cúbicos no forman parte de la curva suavizada por medio del modelo de regresión, otra razón es que el modelo de regresión ajusta la mejor curva del

modelo. Pero por otra parte el modelo de regresión por la excesiva suavidad que adopta puede estar eliminando características o propiedades reales de la mortalidad de la población, las cuales si eran detectables con el modelo de Splines cúbicos analizados anteriormente.

También se puede apreciar en el gráfico de las edades a partir de las proyecciones del 2000, que se las obtuvo mediante una afijación proporcional tomando como base el Censo de 1990.

Aplicando las definiciones anteriores, para el modelo de Lazarus estimamos el valor de c_1 y c_2 ; los cuales son 1.123 y 0.15 respectivamente a partir de la mediana de la muestra ordenada. Luego el modelo es el siguiente.

$$\mu_x = 0.0001026 + 0.0000065 (1.123^x) + 0.1315986 (0.15^x)$$

En fin, una vez obtenida la función de la fuerza de mortalidad, podemos calcular los valores de p_x , q_x , k , y T_x usando las identidades mencionadas en el capítulo 2, con lo que se

obtienen la siguiente, tabla de mortalidad para la población ecuatoriana en general.

TABLA I

Edad	U_x	p_x	q_x	l_x	d_x	e^o_x	T_x
0		0,94264984	0,05735016	100000	5735	73	7333429
1	0,01984969	0,99108527	0,00891473	94265	840	77	7239164
2	0,00307177	0,99856309	0,00143691	93425	134	76	7145739
3	0,00055595	0,99968869	0,00031131	93290	29	76	7052449
4	0,00017956	0,9998566	0,0001434	93261	13	75	6959187
5	0,0001242	0,99988062	0,00011938	93248	11	74	6865939
6	0,00011714	0,99988291	0,00011709	93237	11	73	6772702
7	0,00011747	0,99988178	0,00011822	93226	11	72	6679477
8	0,00011908	0,99987996	0,00012004	93215	11	71	6586262
9	0,00012107	0,99987783	0,00012217	93204	11	70	6493058
10	0,00012334	0,99987542	0,00012458	93192	12	69	6399866
11	0,00012589	0,99987272	0,00012728	93181	12	68	6306685
12	0,00012875	0,99986968	0,00013032	93169	12	67	6213516
13	0,00013197	0,99986627	0,00013373	93157	12	66	6120359
14	0,00013558	0,99986244	0,00013756	93144	13	65	6027215
15	0,00013963	0,99985814	0,00014186	93131	13	64	5934084
16	0,00014419	0,99985331	0,00014669	93118	14	63	5840965
17	0,00014931	0,99984789	0,00015211	93105	14	62	5747861
18	0,00015505	0,9998418	0,0001582	93090	15	61	5654770
19	0,0001615	0,99983496	0,00016504	93076	15	60	5561695
20	0,00016875	0,99982728	0,00017272	93060	16	59	5468634
21	0,00017688	0,99981865	0,00018135	93044	17	58	5375590
22	0,00018602	0,99980897	0,00019103	93027	18	57	5282563
23	0,00019628	0,99979809	0,00020191	93010	19	56	5189553
24	0,0002078	0,99978588	0,00021412	92991	20	55	5096562
25	0,00022074	0,99977216	0,00022784	92971	21	54	5003591
26	0,00023527	0,99975675	0,00024325	92950	23	53	4910642
27	0,00025159	0,99973945	0,00026055	92927	24	52	4817714
28	0,00026992	0,99972003	0,00027997	92903	26	51	4724812
29	0,0002905	0,99969821	0,00030179	92877	28	50	4631935
30	0,00031361	0,99967372	0,00032628	92849	30	49	4539086
31	0,00033957	0,99964621	0,00035379	92819	33	48	4446267
32	0,00036871	0,99961531	0,00038469	92786	36	47	4353481
33	0,00040144	0,99958062	0,00041938	92750	39	46	4260731
34	0,0004382	0,99954166	0,00045834	92711	42	45	4168020
35	0,00047948	0,99949791	0,00050209	92669	47	44	4075352
36	0,00052584	0,99944879	0,00055121	92622	51	43	3982729
37	0,0005779	0,99939362	0,00060638	92571	56	42	3890158
38	0,00063636	0,99933167	0,00066833	92515	62	41	3797643
39	0,00070201	0,99926211	0,00073789	92453	68	40	3705190

40	0,00077574	0,999184	0,000816	92385	75	39	3612805
41	0,00085853	0,99909628	0,00090372	92310	83	38	3520496
42	0,00095151	0,99899779	0,00100221	92226	92	37	3428270
43	0,00105593	0,99888719	0,00111281	92134	103	36	3336136
44	0,00117319	0,99876301	0,00123699	92031	114	35	3244105
45	0,00130487	0,99862357	0,00137643	91917	127	34	3152188
46	0,00145275	0,998467	0,001533	91791	141	33	3060397
47	0,00161882	0,9982912	0,0017088	91650	157	32	2968747
48	0,00180531	0,99809381	0,00190619	91493	174	31	2877254
49	0,00201475	0,9978722	0,0021278	91319	194	31	2785934
50	0,00224994	0,99762338	0,00237662	91125	217	30	2694810
51	0,00251406	0,99734403	0,00265597	90908	241	29	2603902
52	0,00281067	0,99703042	0,00296958	90667	269	28	2513235
53	0,00314377	0,99667834	0,00332166	90397	300	27	2422837
54	0,00351783	0,99628312	0,00371688	90097	335	26	2332740
55	0,00393791	0,99583946	0,00416054	89762	373	25	2242978
56	0,00440965	0,99534147	0,00465853	89389	416	24	2153589
57	0,00493941	0,99478253	0,00521747	88972	464	23	2064617
58	0,00553434	0,99415521	0,00584479	88508	517	22	1976108
59	0,00620245	0,9934512	0,0065488	87991	576	21	1888117
60	0,00695273	0,99266119	0,00733881	87415	642	21	1800703
61	0,00779529	0,99177476	0,00822524	86773	714	20	1713930
62	0,0087415	0,99078025	0,00921975	86059	793	19	1627870
63	0,00980408	0,98966459	0,01033541	85266	881	18	1542604
64	0,01099736	0,98841321	0,01158679	84385	978	17	1458219
65	0,01233742	0,9870098	0,0129902	83407	1083	16	1374813
66	0,0138423	0,98543614	0,01456386	82324	1199	16	1292489
67	0,01553228	0,98367191	0,01632809	81125	1325	15	1211364
68	0,01743013	0,98169444	0,01830556	79800	1461	14	1131565
69	0,01956142	0,97947848	0,02052152	78339	1608	13	1053225
70	0,02195486	0,97699593	0,02300407	76732	1765	13	976494
71	0,02464268	0,97421552	0,02578448	74966	1933	12	901527
72	0,02766111	0,97110255	0,02889745	73033	2110	11	828494
73	0,03105081	0,96761854	0,03238146	70923	2297	11	757571
74	0,03485744	0,9637209	0,0362791	68626	2490	10	688945
75	0,03913229	0,95936256	0,04063744	66137	2688	9	622808
76	0,04393294	0,95449163	0,04550837	63449	2887	9	559359
77	0,04932407	0,94905106	0,05094894	60562	3086	8	498797
78	0,05537831	0,94297825	0,05702175	57476	3277	8	441321
79	0,06217722	0,9362048	0,0637952	54199	3458	7	387123
80	0,0698124	0,9286562	0,0713438	50741	3620	7	336382
81	0,07838671	0,92025164	0,07974836	47121	3758	6	289261
82	0,08801565	0,91090397	0,08909603	43363	3863	6	245898
83	0,09882896	0,90051967	0,09948033	39500	3929	5	206398
84	0,1109723	0,88899916	0,11100084	35570	3948	5	170828
85	0,12460928	0,87623722	0,12376278	31622	3914	4	139206
86	0,1399236	0,86212382	0,13787618	27708	3820	4	111498

87	0,15712158	0,84654528	0,15345472	23888	3666	4	87610
88	0,17643491	0,8293859	0,1706141	20222	3450	3	67387
89	0,19812379	0,81053019	0,18946981	16772	3178	3	50615
90	0,2224804	0,78986576	0,21013424	13594	2857	3	37021
91	0,24983286	0,76728697	0,23271303	10738	2499	2	26284
92	0,28054969	0,74269947	0,25730053	8239	2120	2	18045
93	0,31504468	0,7160257	0,2839743	6119	1738	2	11926

Se observan los valores calculados de μ_x , k_x , y la curva de fallecimientos mediante los datos suavizados por el método de mínimos cuadrados. Observando el gráfico de la fuerza de mortalidad, se puede notar que está posee un mínimo a la edad de los 6 años, lo cual puede ser afirmado, aplicando la formula de la ecuación (1).

Gráfico de la Fuerza de Mortalidad (Modelo Teórico)

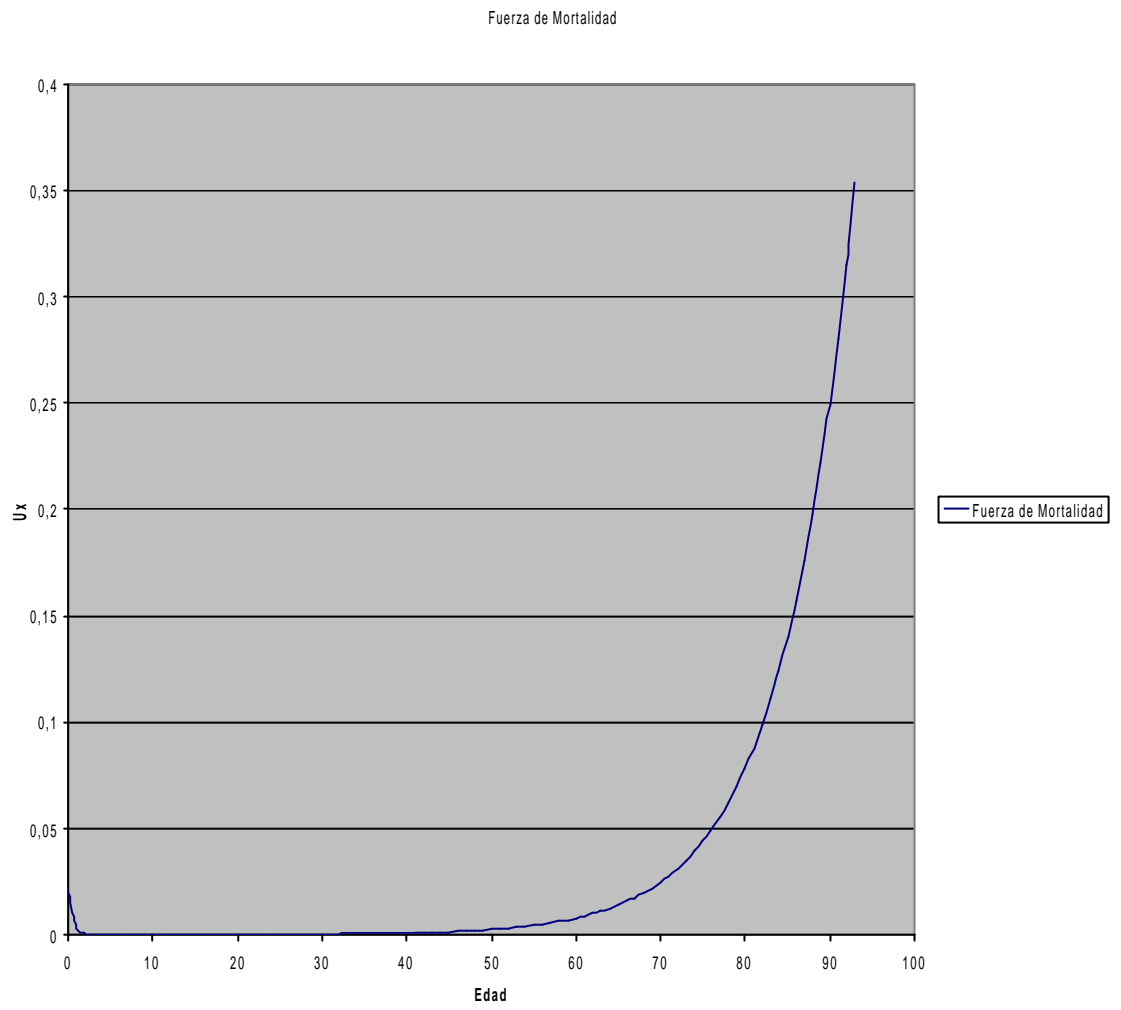


figura 3.7

Gráfico del Número esperado de sobrevivientes a la edad x (Modelo teórico)

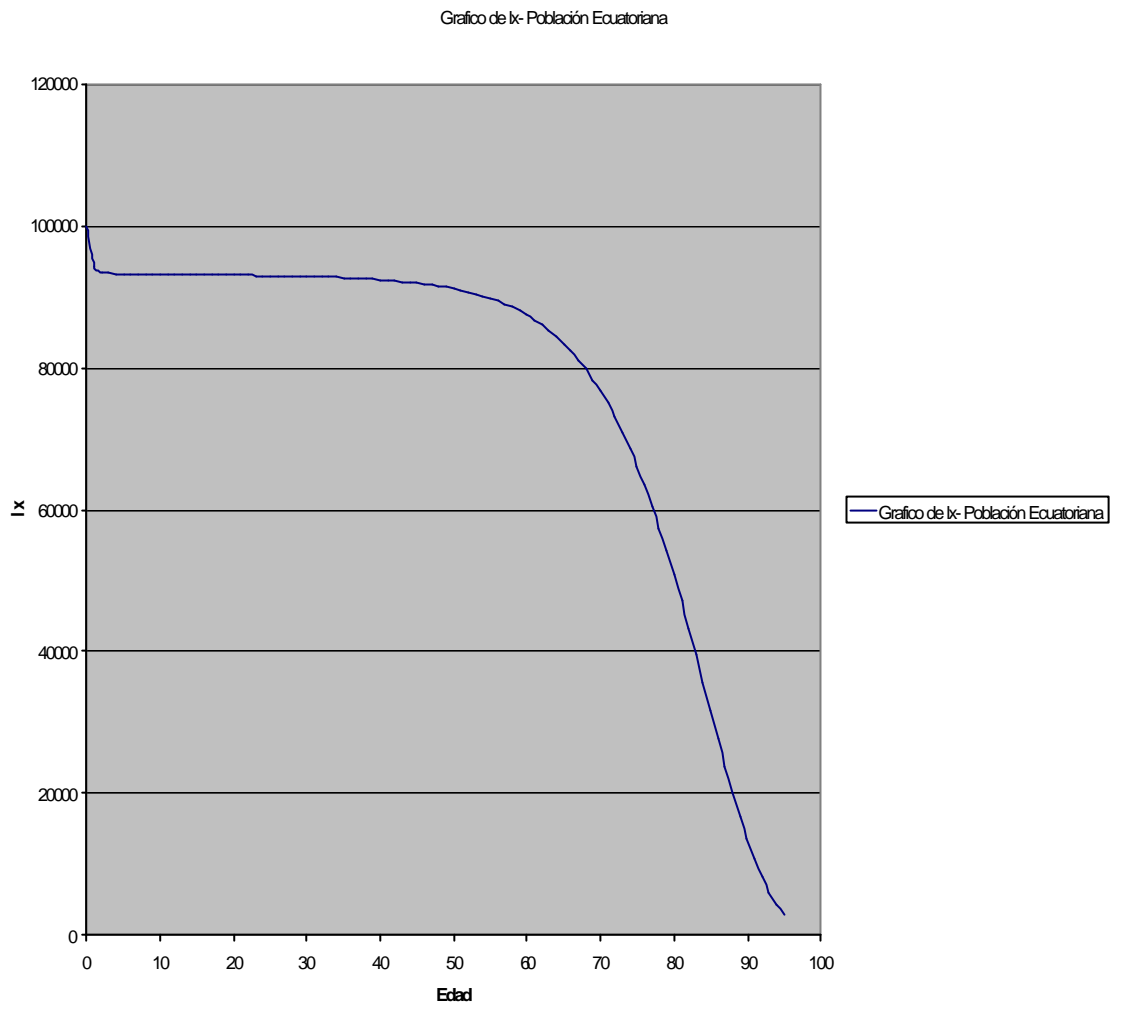


figura 3.8

Gráfico del Número esperado de fallecidos a la edad x (Modelo teórico)

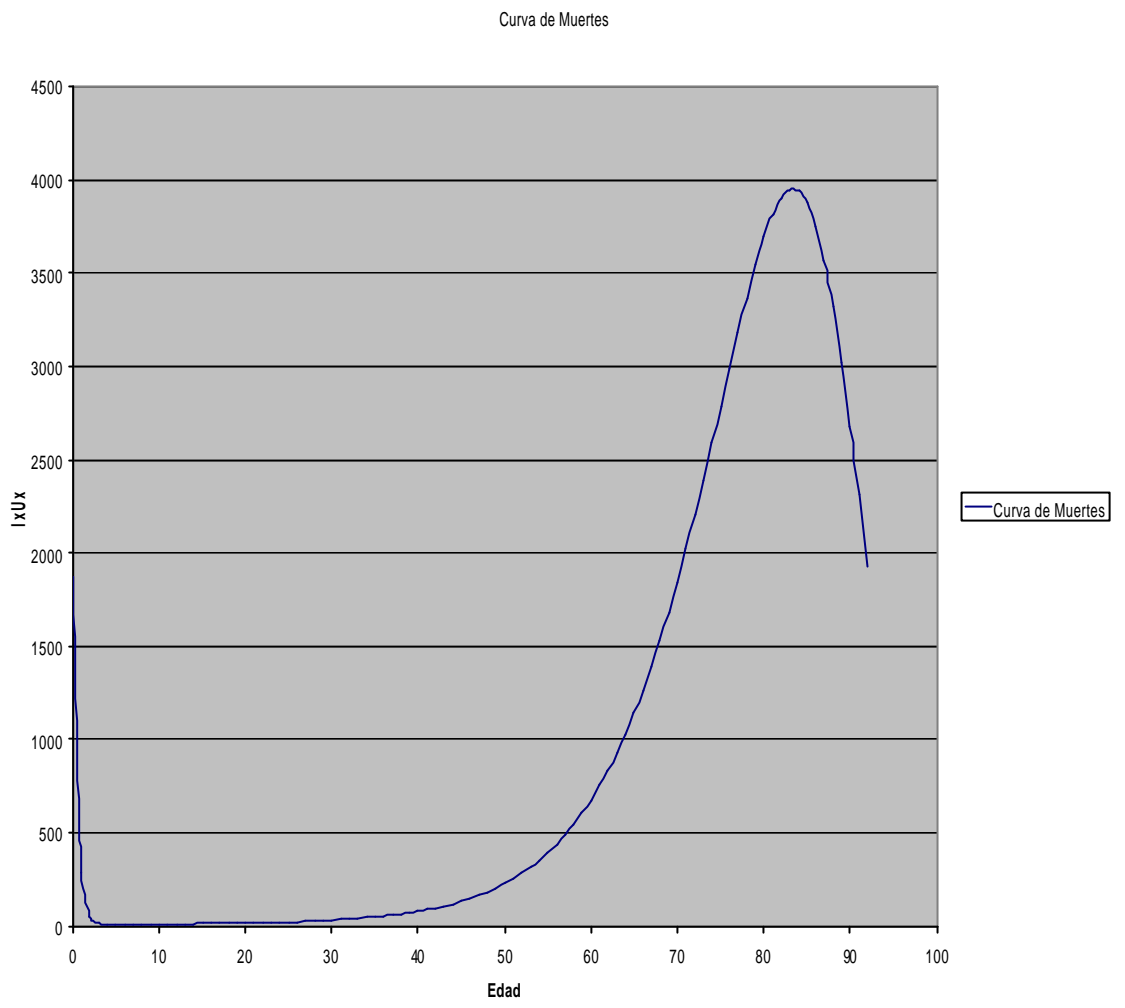


figura 3.9

CAPITULO 4

4. CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO EMPÍRICO PARA LA FUERZA DE MORTALIDAD PARA LA POBLACIÓN ECUATORIANA.

La complejidad de los problemas encontrados en el mundo que el hombre enfrenta, experimenta la necesidad de conocerlo, para lo cual debe describirlo, analizarlo y sintetizarlo de tal manera que el conocimiento adquirido pueda ser potenciado, bien para elevar su grado de toma de conciencia de los problemas que se plantea, bien para buscar otros caminos que le permitan perfeccionar sus respuestas a los interrogantes que, constantemente, surgen, es por eso que se requiere del empleo de métodos que se agrupan bajo el término general de modelización.

Algunas veces la forma más sencilla de calcular el efecto de un proceso físico consiste en utilizar una ecuación establecida, o fórmulas, o diagramas. La tendencia actual es la de recurrir a todos esos medios auxiliares y modelos de soluciones, los que tienden a

ser cada vez más complicados y, consecuentemente, dependen de los ordenadores para llevar a cabo los procesos matemáticos.

La modelización consiste en reducir una realidad compleja a un sistema estructurado de elementos y de relaciones. El resultado de la modelización debe ser el más simple y manejable que exprese la realidad misma. Por otro lado, si se acepta el principio de parsimonia, el mejor modelo será el sistema más sencillo que permita resolver el objetivo planteado, y no el más próximo a la realidad.

4.1 Modelos Estáticos y Dinámicos.

Se dice que los modelos son estáticos cuando sus relaciones no dependen o no tienen en cuenta el crecimiento de la población de cierto país, región, ciudad, etcétera. Mientras que los modelos dinámicos pueden ser definidos como sistemas estructurados de relaciones matemáticas, estadísticas o lógicas que representan la evolución en el tiempo de una serie de variables descriptivas.

4.2 Modelos Cuantitativos y Cualitativos

Normalmente cuando se hace referencia al término modelo se sobrentiende su carácter cuantitativo, puramente numérico, aunque no tiene porqué ser siempre así ya que pueden darse

modelos de carácter cualitativo, utilizando expresiones lógicas del tipo: "sí....., entonces...".

4.3 Modelos Empíricos y Funcionales

La diferenciación de los modelos funcionales y los modelos empíricos se realiza sobre la base del objetivo planteado, la situación analizada y la escala o nivel de precisión en que se elaboran los resultados:

Una solución o modelo empírico es el que se basa en la observación o el experimento y no deriva de la teoría. Se ajusta a los hechos observados y permite predecir lo que sucederá en ciertas circunstancias, porque ya se sabe lo que ha sucedido antes en esas mismas condiciones. La confiabilidad de esos métodos depende de la base de datos experimentales; podría decirse que "esto va a suceder con toda seguridad" (porque siempre es así) o que "probablemente sucederá" (porque suele ser así), o que "podrá suceder" (porque a veces sucede). Una solución empírica puede ser una sencilla relación aproximada o una compleja ecuación de regresión múltiple.

La comparación del cálculo obtenido con un método empírico con el obtenido con otro método empírico, sin nuevos datos experimentales, es totalmente infructuosa y poco científica.

Se han creado modelos empíricos a partir de una base de datos experimentales obtenidos en determinadas condiciones, y se espera que el modelo funcione en esas condiciones. Sin embargo, no necesariamente funcionará en condiciones diferentes. Ningún modelo puede ser auténticamente universal, y hasta los modelos basados en procesos necesitan parámetros de corrección para las condiciones específicas de un lugar. Lo ideal sería que cada país o región diseñara sus propios modelos de predicción para que se ajusten a sus propias condiciones y a sus bases de datos.

4.4 Modelización y Matemáticas

Es evidente que la mayoría de métodos y técnicas que se utilizan en la modelización derivan de las matemáticas aplicadas. La estadística y las técnicas de regresión juegan un papel esencial; análisis preliminar de los datos, estimación de los parámetros de los modelos, evaluación de su precisión y pruebas de hipótesis.

Nuestra modelización surge como un proceso que interrelaciona los conocimientos derivados de la ciencia actuarial, de la estadística, de las técnicas y los métodos derivados de las matemáticas aplicadas.

Por último, la precisión y confiabilidad de los cálculos a partir de modelos no pueden ser mejores que los datos aportados. Como dicen los programadores de computadoras, "si se alimenta con basura, se obtiene basura".

4.5 Modelos de Supervivencia sobre una base empírica

También se puede construir los modelos de fallecimiento o quiebra (Tablas Actuariales) sobre una base empírica de los estudios relativos a los datos de mortalidad. Elegido un colectivo cerrado llamado inicial l_0 llamado <<raíz>> de la tabla, se tendría:

$$\begin{aligned}
 d_0 &= l_0 \cdot q_0; l_1 = l_0 - d_0 \\
 d_1 &= l_1 \cdot q_1; l_2 = l_1 - d_1 = l_0 - (d_0 + d_1) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 d_x &= l_x \cdot q_x; l_{x+1} = l_x - d_x = l_0 - \sum_{t=0}^x d_t
 \end{aligned}$$

Donde

l_x es el número de supervivencia a la edad x ;

d_x es el número de fallecimiento a la edad x ;

q_x es la probabilidad de fallecimiento a la edad x .

4.6 Estadística Demográfica

Entre las diferentes fuentes de *información* que pueden utilizarse, nos vamos a referir preferentemente a las de categoría estadística ya que, en nuestro caso, las estadísticas de los fenómenos poblacionales o demográficos cuentan con una amplia y fecunda historia, y registran la influencia que en los movimientos de la población tiene el fenómeno de la mortalidad.

Por tanto, la información que principalmente usaremos es la que brinda la *estadística demográfica*. La ciencia estadística conocida por *Demografía*, tiene como fin especial el estudio de la evolución de la población tanto en el aspecto cuantitativo como en el de su composición cualitativa, establecida ésta de acuerdo con diversas categorías (edad, sexo, actividad, etcétera). Por su carácter y finalidad los estudios demográficos suministran el conocimiento de uno de los elementos endógenos más importantes del complejo socioeconómico, cual es la población.

Como quiera que nuestra finalidad es la de estimar el modelo que corresponde a elementos integrados en una determinada población, es su estadística demográfica la que nos puede suministrar los antecedentes y la información más congruente con el propósito perseguido.

Con el fin de potenciar la información de las estadísticas demográficas, procederemos a establecer diseños observacionales o modelos para la obtención de la información. Estos diseños responden a la forma tradicional de considerar los grupos demográficos.

Se entiende corrientemente por población cerrada aquella en que no existen movimientos migratorios, por lo que sus posibles variaciones se deben exclusivamente a nacimientos y muerte.

Cuando la única fuente de variación es la muerte de sus componentes, al grupo demográfico que los integra se le denomina grupo cerrado. Por el contrario, cuando los movimientos de población se deben a causas migratorias, que es el caso del Ecuador, de natalidad y de mortalidad, al grupo demográfico se le denomina grupo abierto.

Es evidente que el grupo cerrado es el que nos dará la mejor información para el estudio del fenómeno de la supervivencia, de aquí que dediquemos especial atención al estudio de sus características y a la forma de su observación.

Por otra parte, un grupo abierto no es otra cosa que la integración de grupos cerrados, es decir, está compuesto por individuos pertenecientes a distintos grupos cerrados, bien de la misma generación o de distintas generaciones.

El concepto de generación puede tomarse en un sentido estricto, según el cual pertenecen a la misma generación los que tienen la misma edad, o en un sentido amplio, que supone como integrados en la misma generación los que tienen una edad comprendida en un intervalo mas o menos amplio, pero no con excesiva amplitud, según las aplicaciones descriptivas de contenido fundamentalmente histórico que se persigan.

Es evidente que los movimientos migratorios suponen transferencias de un grupo a otro, por lo que el grupo abierto recoge estas transferencias entre grupos cerrados de la misma

generación, así como, mediante los nacimientos se integran los grupos cerrados de distintas generaciones.

4.7 Descripción de la base de datos

La construcción de un modelo que contenga los patrones de mortalidad según la edad requiere de la recolección de datos empíricos. Los datos que se recolectaron fueron:

- Población del Ecuador por edades simples y sexo
- Defunciones en el Ecuador por edades simples y sexo

El objetivo es obtener estimadores de q_x para las distintas edades, a partir de los cuales se generaran las funciones de la tabla de mortalidad.

La información se recolectó a partir de los datos del censo de población de 1990, de las proyecciones de población estimada por el Instituto Nacional de Estadística y Censo, y de la información recolectada por la misma institución a través del Registro Civil del Ecuador. Sin embargo los datos recolectados no siempre están libres de errores, las principales fuentes de errores son:

- Omisión de personas.
- Mala declaración de la edad.

4.7.1 Omisión de personas

Decimos que hay omisión de personas cuando un individuo no ha sido censado, este fenómeno se puede dar por omisión completa de áreas geográficas, omisión completa de viviendas, o por omisión de personas aisladas. En el caso de este estudio, el error presentado por omisión de personas es despreciable, ya que se tiene suficiente cantidad de datos como para lograr una buena estimación.

4.7.2 Omisión completa de áreas geográficas

Por obstáculo geográfico o por deficiencias en la categoría censal, cierta zona se queda fuera del levantamiento de datos censales y por lo tanto no se empadronan las personas que viven allí. Este error no afecta significativamente a la estructura de los datos del censo.

4.7.3 Omisión de personas aisladas

Es el caso en que la vivienda es empadronada pero quedan una o más personas no captadas por el empadronador.

4.7.4 Omisión completa de viviendas

En ocasiones ocurre que el empadronador deja sin empadronar viviendas, que por su ubicación resultan poco visibles o que son difíciles de identificar como tales. Otro caso es en el cual los habitantes se encuentran ausentes de su casa durante el día.

4.7.5 Mala declaración de la edad

Esta situación es notoria en los datos del censo poblacional de 1990 en los que se nota una preferencia por las edades múltiplos de cinco, y especialmente las decenas en las edades que pasan los treinta años de edad. Este fenómeno es común en los países en vías de desarrollo. Para este tipo de error se usan métodos de suavización, que eliminan los picos producidos por la mala declaración de la edad.

4.8 Estimación de los parámetros utilizando las estadísticas demográficas.

Con los datos suavizados calculamos a partir del número de habitantes de edad x , el número de muertes ocurridas en el intervalo de tiempo de un año (d_x) con la finalidad de calcular el número de sobrevivientes al cumplir la edad x al comienzo de ese intervalo (l_x) a partir de $l_0=100000$. Para este propósito necesitamos estimar q_x , que es la tasa de mortalidad de la tabla de vida, y está definida, como ya vimos como d_x/l_x .

Tomando D_x como el número total de muertes ocurridas de elementos de edad x , en este caso, entre los años de 1990 y del 2000, y L_x como el número total de personas de edad x , podemos estimar la probabilidad de muerte denotada con q_x por:

$$q_x = \frac{D_{x+1}}{L_{x+2}}$$

Que es un estimador de máxima verosimilitud.

$$d_x = l_x \cdot q_x; l_x = l_{x-1} - q_{x-1}$$

Utilizando q_x , y como colectivo inicial $l_0=100000$, podemos estimar los d_x y l_x paralelamente. Cuando l_x viene definido por medio de una tabla de mortalidad y se desconoce la ley subyacente, los valores de u_x pueden aproximarse de la expresión:

$$u_x = \frac{1}{2}(\ln l_{x-1} - \ln l_{x+1})$$

De la expresión

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+s} ds\right)$$

Y haciendo $n=1$, tenemos

$$p_x = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right)$$

Tomando logaritmos,

$$\ln p_x = \left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right)$$

Y, en términos aproximados

$$u_{x+1/2} = \ln p_x$$

Si integramos u_{x+t} entre $t=-1$ y $t=1$, obtenemos

$$\int_{-1}^1 u_{x+t} = -\ln p_{x-1} - \ln p_x$$

Y esto es dos veces el valor medio de u_x entre las edades $x-1$ y $x+1$, lo que nos lleva a la siguiente aproximación:

$$u_x = -\frac{1}{2}(\ln p_{x-1} - \ln p_x) = \frac{1}{2}(\ln l_{x-1} - \ln l_{x+1})$$

Para estimar el número total de años vividos desde x por el grupo de elementos vivos, denotado por T_x , usamos la expresión que ya se definió anteriormente

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t}$$

Integrando, usando métodos numéricos de integración, logramos una estimación para T_x . Luego, teniendo en cuenta que

$$l_{x+t} \cdot u_{x+t} = l_{x+t} p_x \cdot u_{x+t}$$

De donde

$$l_{x+t} = l_{x+t} p_x$$

Integrando de $t = 0$ hasta ∞ , tenemos

$$\int_0^{\infty} l_{x+t} dt = \int_0^{\infty} l_{x+t} p_x \cdot u_{x+t} dt$$

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} p_x \cdot u_{x+t} dt$$

$$\frac{T_x}{l_x} = \int_0^{\infty} p_x \cdot u_{x+t} dt = e_x^0$$

Otro símbolo usado en una tabla de mortalidad es L_x , el cual denota el número total de años vividos entre las edades x y $x+1$, de un grupo de l_0 elementos vivos iniciales. Se expresa como:

$$L_x = \int_0^1 t \cdot l_{x+t} \cdot u_{x+t} dt + l_{x+1}$$

Donde la integral evalúa los años vividos por todo el conglomerado que llegó a la edad x , pero no llegó a cumplir la edad $x+1$, y el término l_{x+1} denota el total de años vividos por los que llegaron a la edad $x+1$. De la integración por partes tenemos:

$$\begin{aligned} L_x &= -\int_0^1 t \cdot dl_{x+t} + l_{x+1} \\ &= -t \cdot l_{x+t} \Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} \cdot dt + l_{x+1} \\ &= \int_0^1 l_{x+t} dt \end{aligned}$$

Una aproximación de L_x es

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Que puede ser justificada al usar la regla del trapecio para integrar numéricamente.

4.9 Tablas de Mortalidad

Una vez ajustados los datos, y luego calculados las funciones, estas son tabuladas en la tabla, veamos los resultados obtenidos.

TABLA II

Edad	l_x	U_x	p_x	q_x	d_x	T_x	e_x^u
0	100000		0,973145098	0,0268549	2685	7150390	71,50
1	97315	0,0198488	0,987601982	0,01239802	1207	7052958	72,48
2	96108	0,00974611	0,99300785	0,00699215	672	6955067	72,37
3	95436	0,00554528	0,995934444	0,00406556	388	6860988	71,89
4	95048	0,00322985	0,997616992	0,00238301	227	6764825	71,17
5	94822	0,00189474	0,998597364	0,00140264	133	6671595	70,36
6	94689	0,00116671	0,999070636	0,00092936	88	6575127	69,44
7	94601	0,00082179	0,999286472	0,00071353	68	6482253	68,52
8	94533	0,00054998	0,99961389	0,00038611	37	6385944	67,55
9	94497	0,00036773	0,999650781	0,00034922	33	6292997	66,60
10	94464	0,00036523	0,999618901	0,0003811	36	6196908	65,60
11	94428	0,00042097	0,999539329	0,00046067	43	6198733	65,65
12	94384	0,00048738	0,999486142	0,00051386	48	6008188	63,66
13	94336	0,00056185	0,999390474	0,00060953	57	5915315	62,71
14	94278	0,00066031	0,999289336	0,00071066	67	5913823	62,73
15	94211	0,00075631	0,999198608	0,00080139	75	5726870	60,79
16	94136	0,00091102	0,998980194	0,00101981	96	5630944	59,82
17	94040	0,00105544	0,998910033	0,00108997	102	5538433	58,89
18	93937	0,00113112	0,998829003	0,001171	110	5443268	57,95
19	93827	0,00124707	0,998678419	0,00132158	124	5350843	57,03
20	93703	0,00129127	0,998740702	0,0012593	118	5255216	56,08
21	93585	0,00135184	0,998557461	0,00144254	135	5163532	55,17
22	93450	0,00140712	0,998630283	0,00136972	128	5068434	54,24
23	93322	0,00138233	0,998606974	0,00139303	130	4976402	53,33
24	93192	0,00141915	0,998556743	0,00144326	135	4975019	53,38
25	93058	0,00143996	0,998565403	0,0014346	133	4790099	51,47

26	92924	0,0014663	0,998504154	0,00149585	139	4695565	50,53
27	92785	0,00151698	0,998464192	0,00153581	142	4604223	49,62
28	92643	0,00157601	0,998386271	0,00161373	149	4510234	48,68
29	92493	0,00168403	0,998248516	0,00175148	162	4419407	47,78
30	92331	0,00168133	0,998391657	0,00160834	148	4324966	46,84
31	92183	0,00179025	0,998031081	0,00196892	181	4234788	45,94
32	92001	0,00195647	0,998059804	0,0019402	179	4140946	45,01
33	91823	0,00198216	0,997979799	0,0020202	185	4050446	44,11
34	91637	0,00214186	0,997741088	0,00225891	207	3957324	43,18
35	91430	0,00225581	0,997752379	0,00224762	206	3867418	42,30
36	91225	0,00230213	0,99764866	0,00235134	214	3774510	41,38
37	91010	0,00251386	0,997329965	0,00267004	243	3684894	40,49
38	90767	0,00262472	0,997427479	0,00257252	233	3592248	39,58
39	90534	0,00265669	0,997266204	0,0027338	248	3503237	38,70
40	90286	0,00260804	0,997524537	0,00247546	223	3411236	37,78
41	90063	0,00300226	0,996480225	0,00351977	317	3322587	36,89
42	89746	0,00331981	0,996891208	0,00310879	279	3231140	36,00
43	89467	0,00330353	0,996512665	0,00348733	312	3142788	35,13
44	89155	0,00379511	0,995911591	0,00408841	365	3053621	34,25
45	88790	0,00389604	0,996311521	0,00368848	328	2964158	33,38
46	88463	0,00397169	0,995760921	0,00423908	375	2874066	32,49
47	88088	0,00453085	0,995197957	0,00480204	423	2787308	31,64
48	87665	0,00469632	0,995431447	0,00456855	400	2698016	30,78
49	87264	0,00488608	0,994820314	0,00517969	452	2612244	29,93
50	86812	0,00486811	0,995467225	0,00453278	393	2523292	29,07
51	86419	0,00566482	0,99323641	0,00676359	584	2438605	28,22
52	85834	0,00645797	0,993889364	0,00611064	525	2350253	27,38
53	85310	0,00634883	0,993453253	0,00654675	558	2266295	26,57
54	84751	0,00687216	0,992849642	0,00715036	606	2179833	25,72
55	84145	0,00712418	0,992952643	0,00704736	593	2096688	24,92
56	83552	0,00752861	0,992046881	0,00795312	664	2011396	24,07
57	82888	0,00866206	0,990704274	0,00929573	770	1929593	23,28
58	82117	0,00933712	0,990708389	0,00929161	763	1845432	22,47
59	81354	0,01018002	0,989035565	0,01096443	892	1765137	21,70
60	80462	0,00980304	0,991455615	0,00854438	687	1682512	20,91
61	79775	0,01169392	0,985302342	0,01469766	1172	1604029	20,11
62	78602	0,01347042	0,987939228	0,01206077	948	1522809	19,37
63	77654	0,01311548	0,986002024	0,01399798	1087	1446064	18,62
64	76567	0,01480416	0,984608243	0,01539176	1179	1367208	17,86
65	75389	0,01491322	0,985786964	0,01421304	1071	1292552	17,15
66	74317	0,01610105	0,982271932	0,01772807	1317	844828	11,37
67	73000	0,01954494	0,979020413	0,02097959	1531	1144175	15,67
68	71468	0,02046106	0,980473817	0,01952618	1395	1069878	14,97
69	70073	0,02327432	0,973527408	0,02647259	1855	1000723	14,28
70	68218	0,02297142	0,98106797	0,01893203	1291	929768	13,63
71	66926	0,02731296	0,965110791	0,03488921	2335	863619	12,90
72	64591	0,03186398	0,97217876	0,02782124	1797	796235	12,33

73	62794	0,03097095	0,966836072	0,03316393	2082	734112	11,69
74	60712	0,03614767	0,962165303	0,0378347	2297	670887	11,05
75	58415	0,03688075	0,965419559	0,03458044	2020	612861	10,49
76	56395	0,03935478	0,957416212	0,04258379	2401	553901	9,82
77	53993	0,04801331	0,948845264	0,05115474	2762	500330	9,27
78	51231	0,05066439	0,952353258	0,04764674	2441	446498	8,72
79	48790	0,05938758	0,932434933	0,06756507	3297	397877	8,15
80	45494	0,0585732	0,953905674	0,04609433	2097	349898	7,69
81	43397	0,06575295	0,919141307	0,08085869	3509	306842	7,07
82	39888	0,07983158	0,927420923	0,07257908	2895	264901	6,64
83	36993	0,08265303	0,913969277	0,08603072	3182	228509	6,18
84	33810	0,09283543	0,908725198	0,0912748	3086	192713	5,70
85	30724	0,09509805	0,909842697	0,0901573	2770	162289	5,28
86	27954	0,10475644	0,891340005	0,10866	3037	131539	4,71
87	24917	0,12488665	0,873939637	0,12606036	3141	106529	4,28
88	21776	0,15230934	0,84377053	0,15622947	3402	82026	3,77
89	18374	0,19090473	0,809017481	0,19098252	3509	62893	3,42
90	14865	0,24598464	0,755757642	0,24424236	3631	44714	3,01

Se observan los valores calculados de μ_x , l_x , y la curva de fallecimientos en los siguientes gráficos.

Fuerza de Mortalidad (Modelo Empírico)

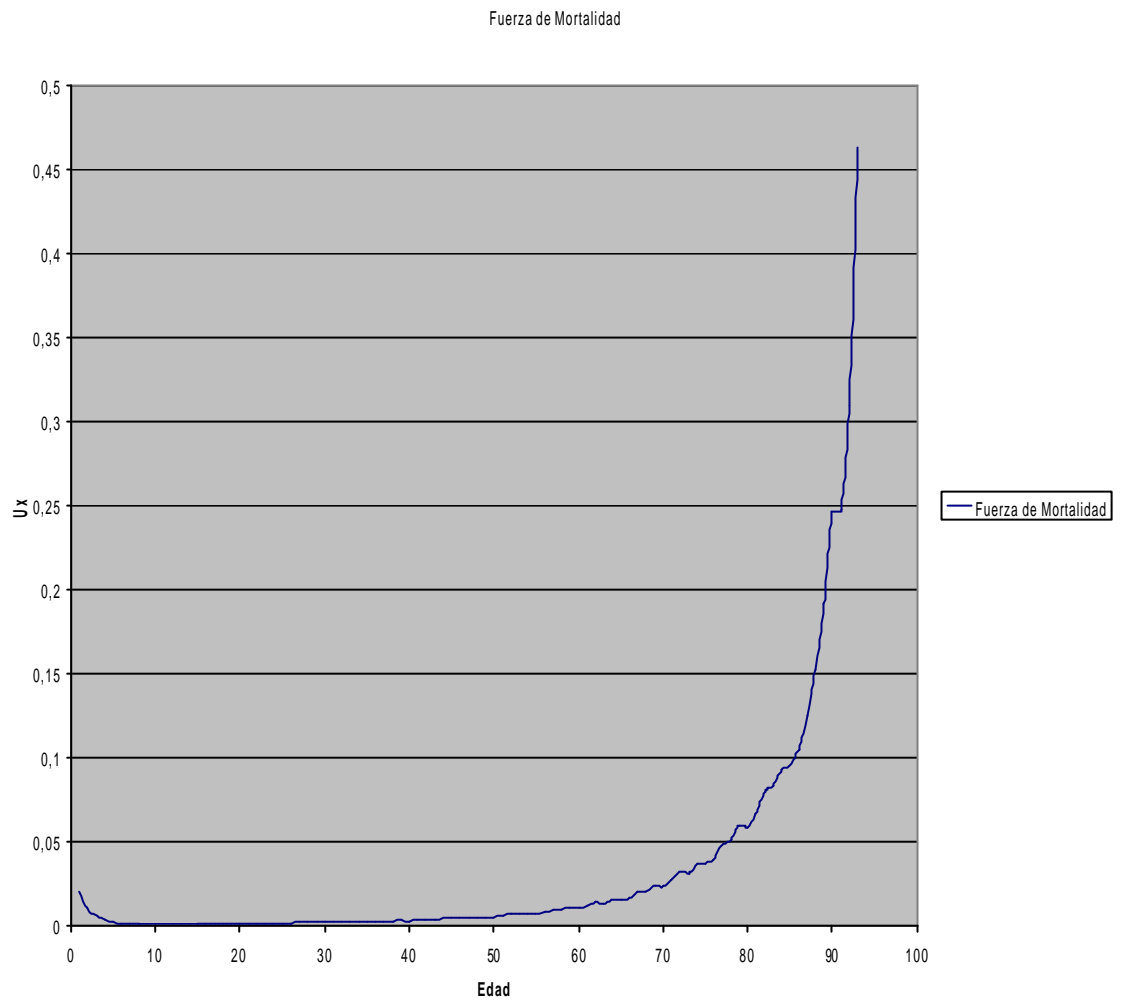


figura 4.1

GRÁFICO DEL NÚMERO ESPERADO DE SOBREVIENTES A LA EDAD X

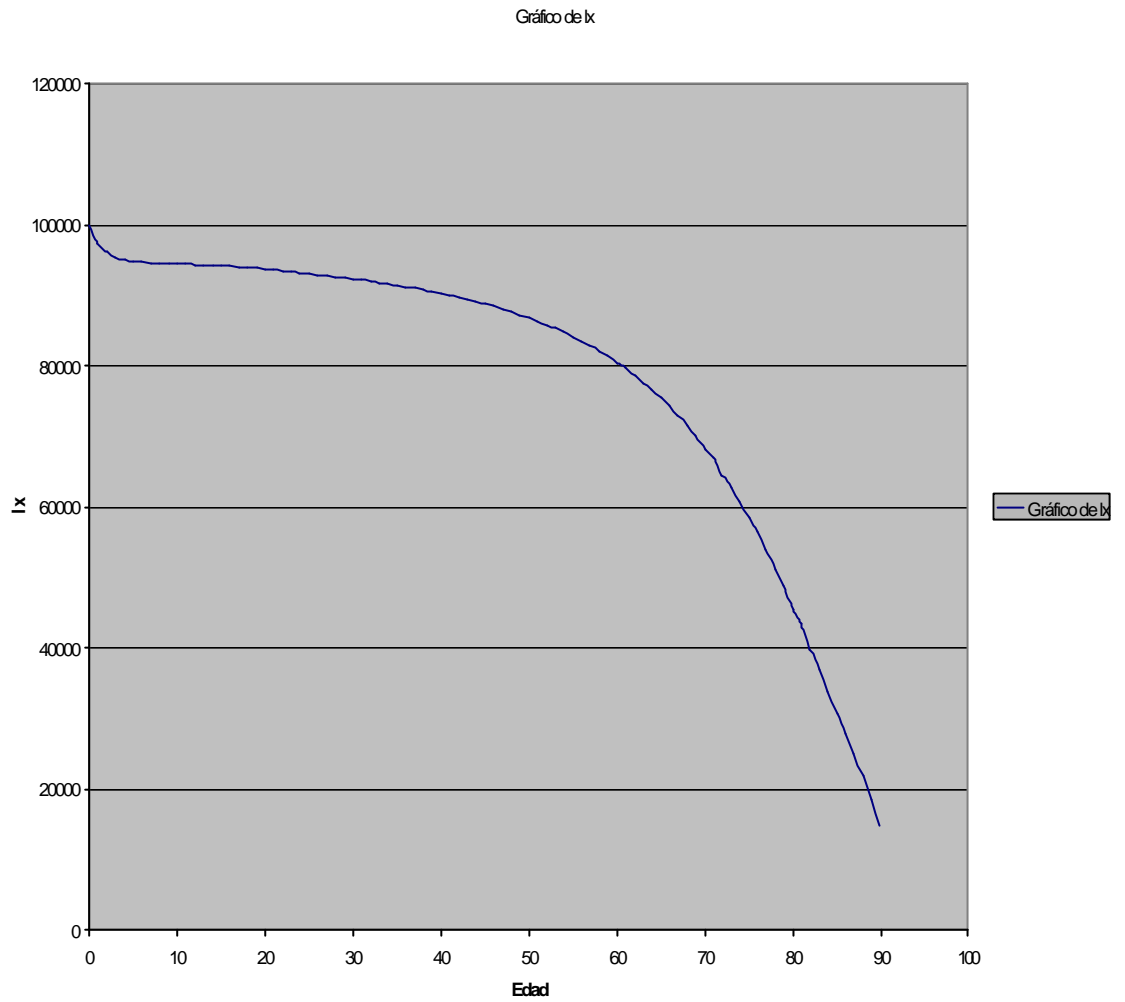


figura 4.2

Gráfico del Número Esperado de fallecimientos a la edad x (Modelo Empírico)

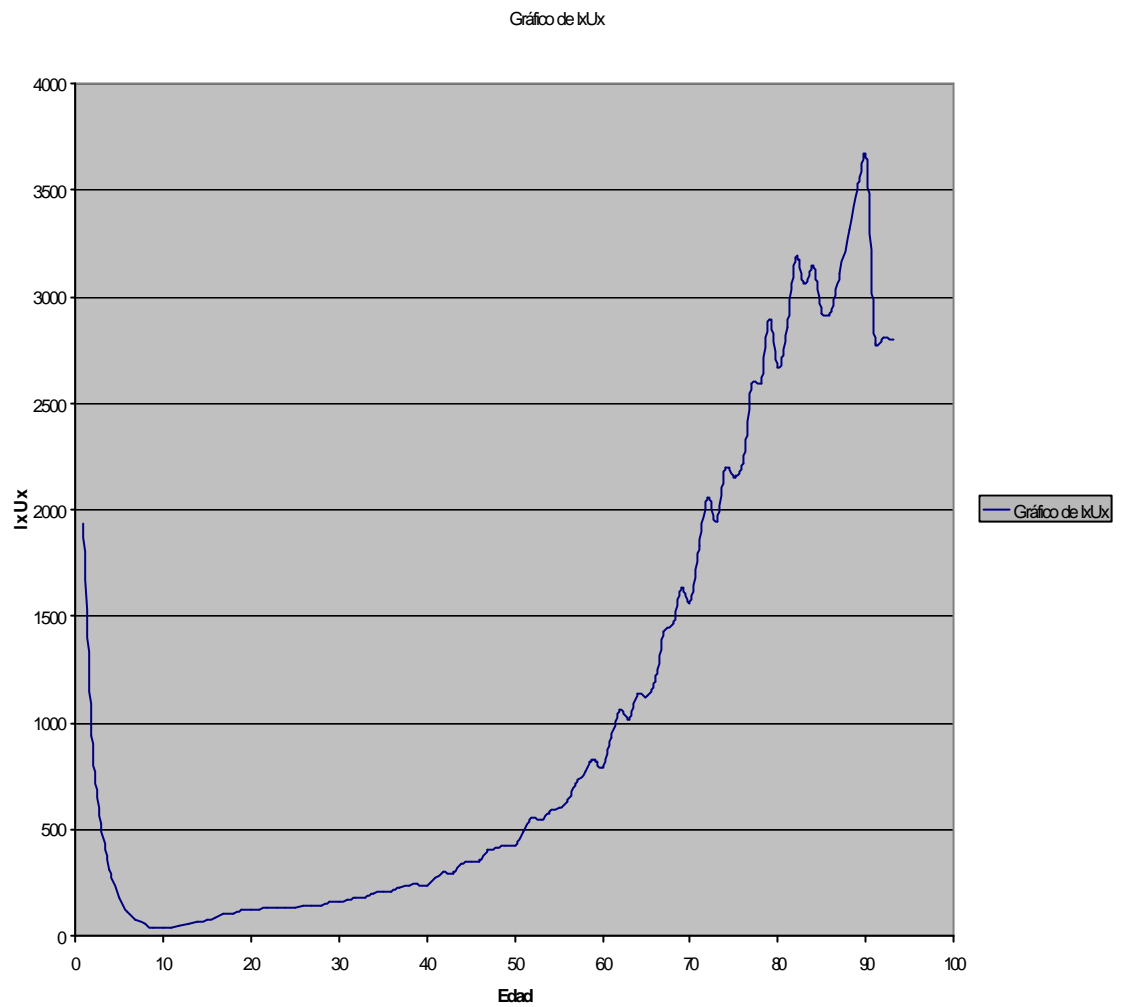


figura 4.3

CAPITULO 5

5. COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LOS MODELOS “EMPIRICO Y TEORICO” Y ANALISIS DEL ERROR.

Al observar el comportamiento de los datos y las curvas de las funciones, se pueden destacar algunas conclusiones importantes.

Según las estimaciones de q_x , para ambos modelos, se espera que aproximadamente el 2.6% de los recién nacidos mueran antes de cumplir el primer año de vida y el número de años esperado de vida de un recién nacido es de 71.50 años según el modelo empírico; del mismo modo el 5.7% de los recién nacidos mueren antes de cumplir un año de vida y tienen un número de años esperado de vida de 73 años según el modelo teórico. También se puede apreciar, mediante las tablas de mortalidad que ambas curvas poseen un mínimo a la edad de 6 años, finalmente a partir de los 90 años el modelo empírico crece más rápido que el modelo teórico y que ambas funciones tienen la misma tendencia o comportamiento. Por último se aprecia que la curva del modelo teórico es más suave que la

curva del modelo empírico. También se nota, que la fuerza de mortalidad es creciente cuando la edad aumenta. Las tablas construidas poseen este tipo de características.

COMPARACIÓN DE LA FUERZA DE MORTALIDAD

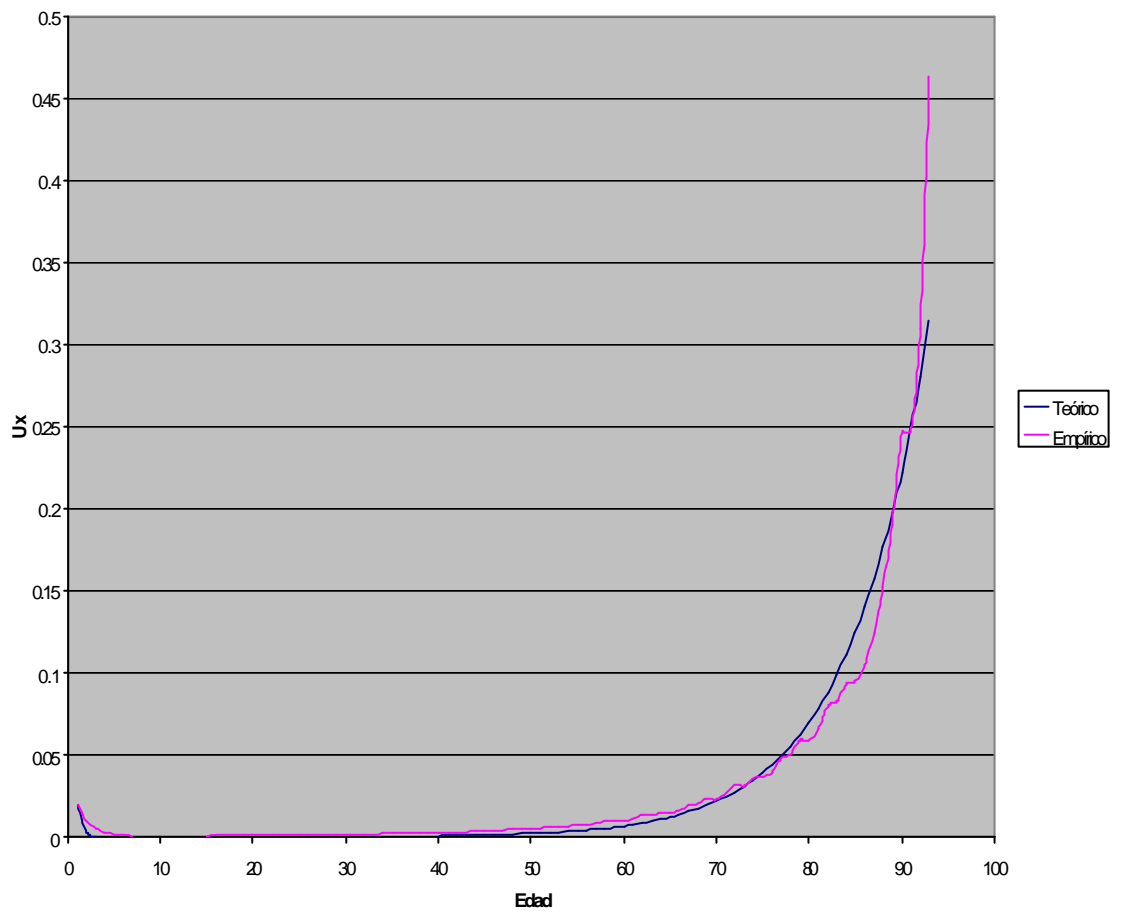


figura 5.1

Ahora analizaremos las curvas del l_x . Nótese que ambas curvas tienen la misma tendencia, es decir decreciente; también presentan dos puntos de intersección a los 28 y 86 años aproximadamente, y finalmente mientras la función toma valores mayores, es decir la edad aumenta, la función decrece de una manera más rápida.

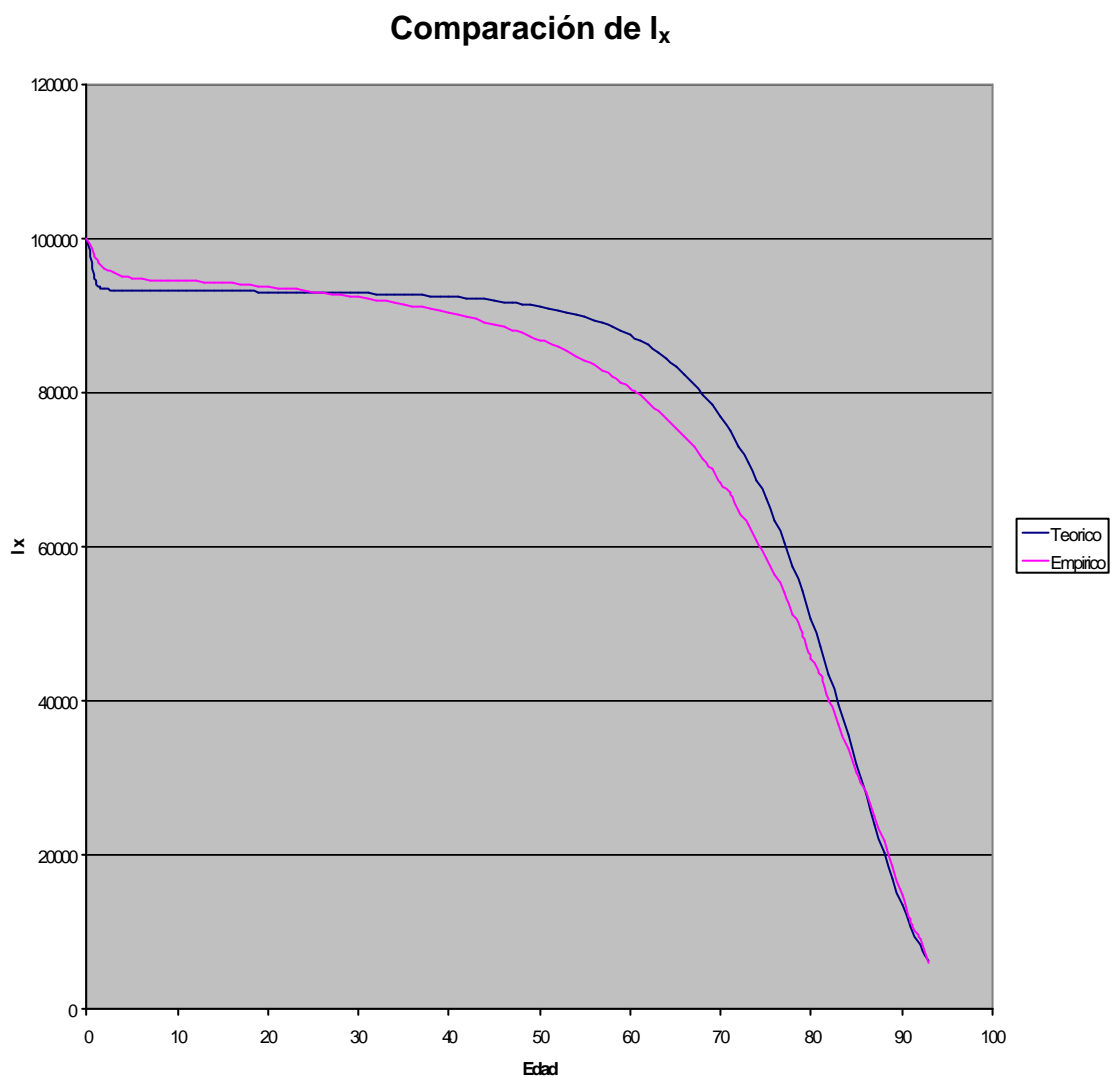


figura 5.2

En cuanto a la función $l_x\mu_x$ que representa la densidad esperada de muertes a la edad de x , presenta un máximo a los 84 de edad según el modelo teórico; y un máximo a la edad de 90 años según el modelo empírico; esto quiere decir que a estas edades se espera el mayor número de muertes en ese grupo de edad, finalmente, nótese que la curva $l_x\mu_x$ del modelo teórico es más suave que la del modelo empírico.

Comparación de $l_x m_x$

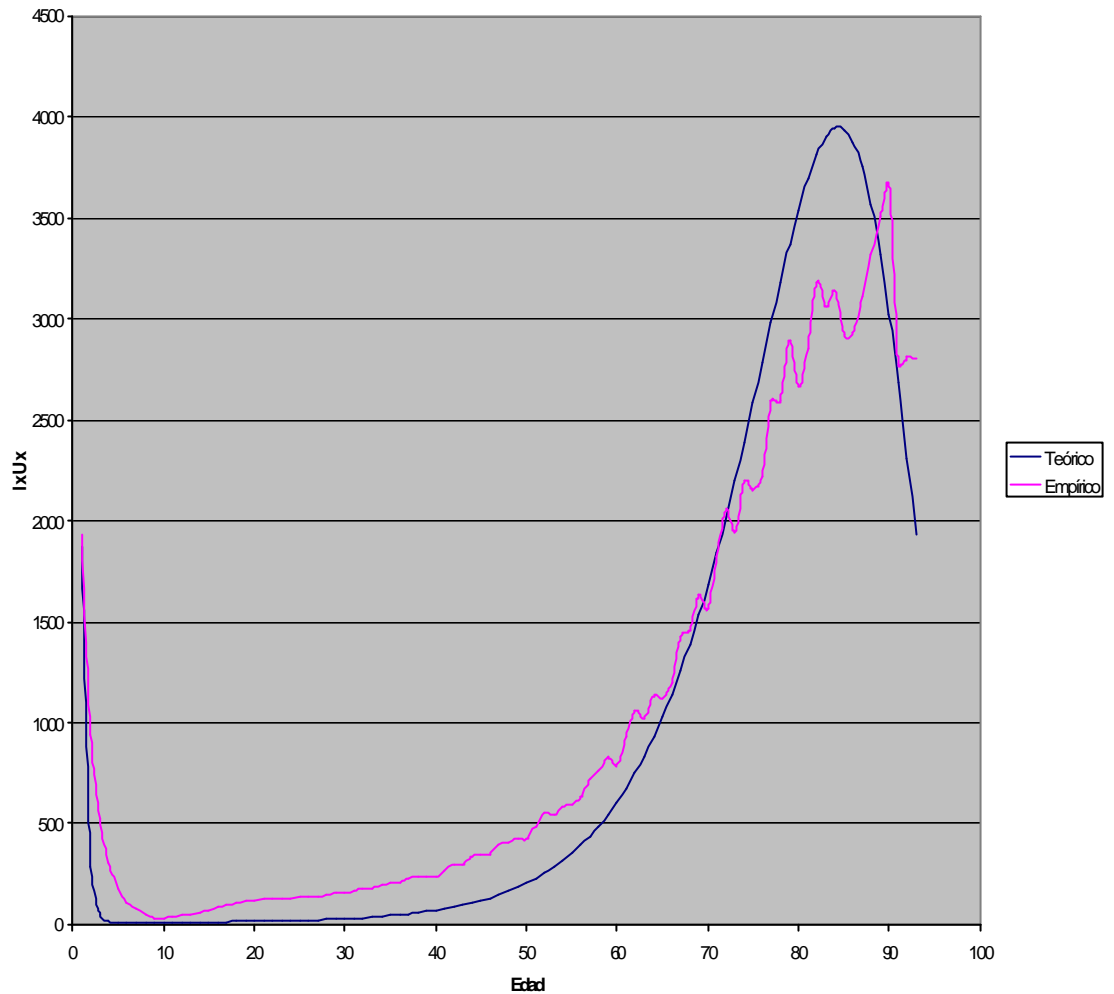


figura 5.3

5.1 Comparación de la Mortalidad de las Poblaciones de Estados Unidos de Norte América y Ecuador

Ahora procederemos a comparar los datos de la población de EEUU con los datos de la población ecuatoriana, a través de los gráficos de la fuerza de mortalidad, l_x y curva de fallecimientos. Los datos de la Población de EEUU

corresponden a la tabla de mortalidad proporcionada por el libro "Matemáticas Actuariales" publicado por La Sociedad de Actuarios, Itasca, Illinois, en 1986, se puede apreciar en los gráficos de la fuerza de mortalidad y con más claridad en las tablas, que un recién en EEUU tiene una edad espera de sobrevivencia de 73.88 años como se lo puede apreciar en el anexo A; mientras que para un recién nacido ecuatoriano está edad es de 71.50 años. Mientras que del total de recién nacidos americanos, el 1,260% mueren antes de cumplir el primer año de vida, en cambio del total de recién nacidos ecuatorianos el 2,68% fallecen antes de llegar a cumplir su primer año de vida; nótese que el valor mínimo de la fuerza de mortalidad ocurre a los 11 años de edad para fuerza de mortalidad americana, en cambio para la población este mínimo ocurre a la edad de 6 años. Finalmente, nótese que la fuerza de mortalidad para ambas población tiene la misma tendencia hasta la edad de 80 años aproximadamente, mientras que a partir de los 80 años en adelante la fuerza de mortalidad ecuatoriana crece más rápido que la fuerza de mortalidad americana.

COMPARACIÓN DE LA FUERZA DE MORTALIDAD

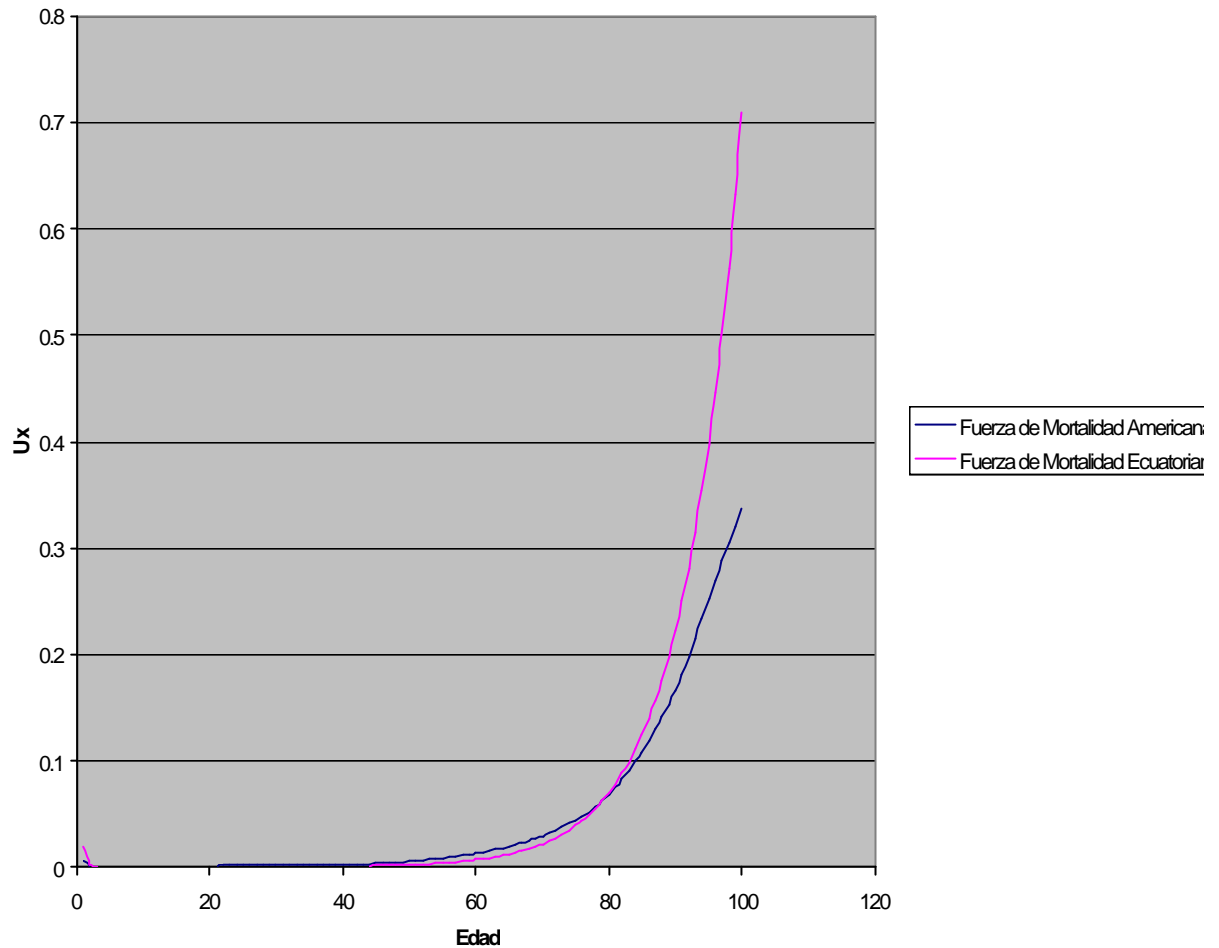


figura 5.4

En cuanto al gráfico del l_x , se observa que para la población americana, esta curva decrece de una manera mucho más rápida en comparación con la curva de la población ecuatoriana; pero a partir de los 80 años en adelante parecen tener el mismo patrón.

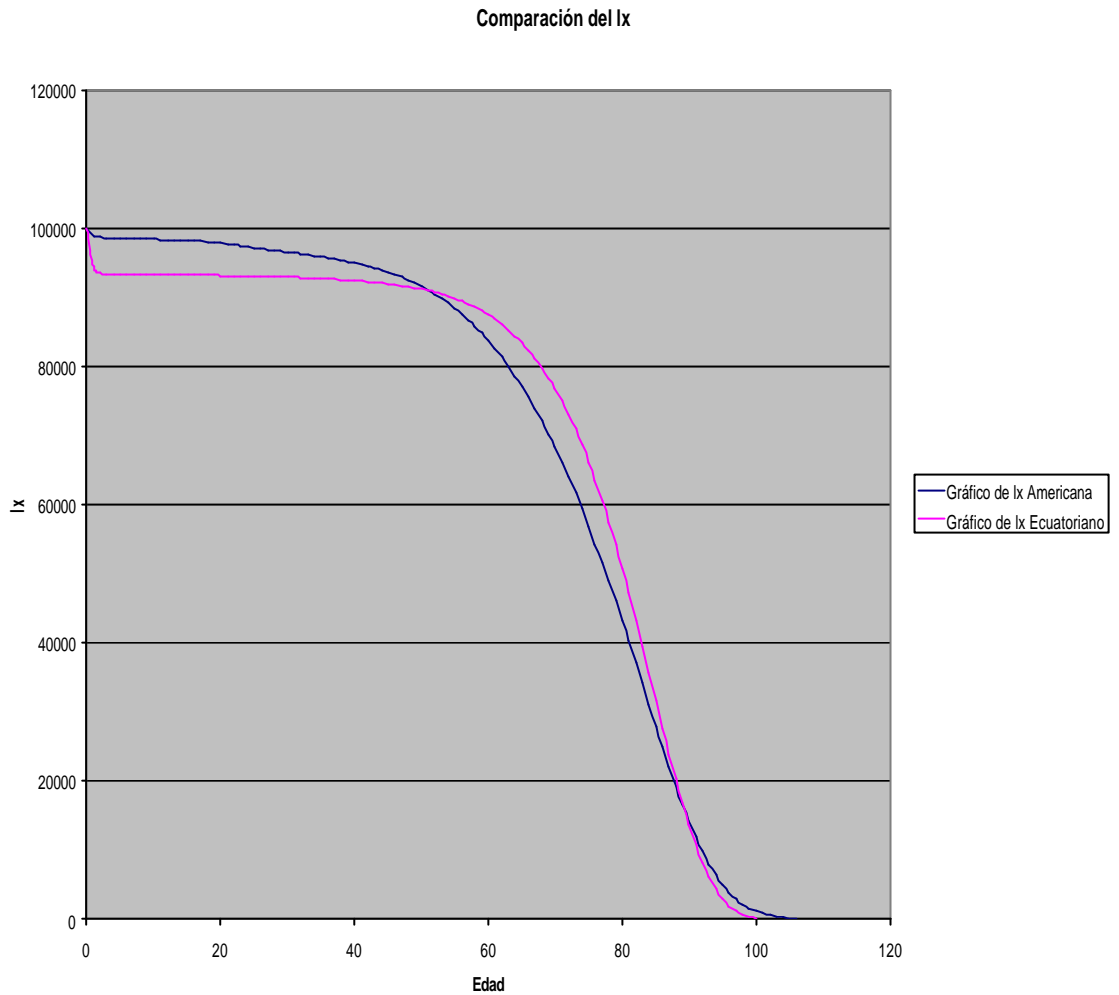


figura 5.5

El mayor número de fallecimientos esperados para la población americana ocurre a la edad de 83 años, mientras que para la población ecuatoriana ocurre a los 84 años de edad. Se puede apreciar que a edades muy cercana a cero la curva de la población ecuatoriana decrece mas bruscamente

que la curva de la población americana, mientras que a edades cercanas a los 10 años su tendencia es muy similar. En cambio a partir de los 10 años hasta edades muy cerca de los 70 años, la curva de fallecimientos de los americanos es mayor que la curva de fallecimientos que los de los ecuatorianos, pero a partir de los 70 años en adelante el Ecuador presenta un número esperado de fallecimientos superior a la de la población americana como lo muestra el siguiente gráfico.

Comparación de las Curvas de Fallecimientos

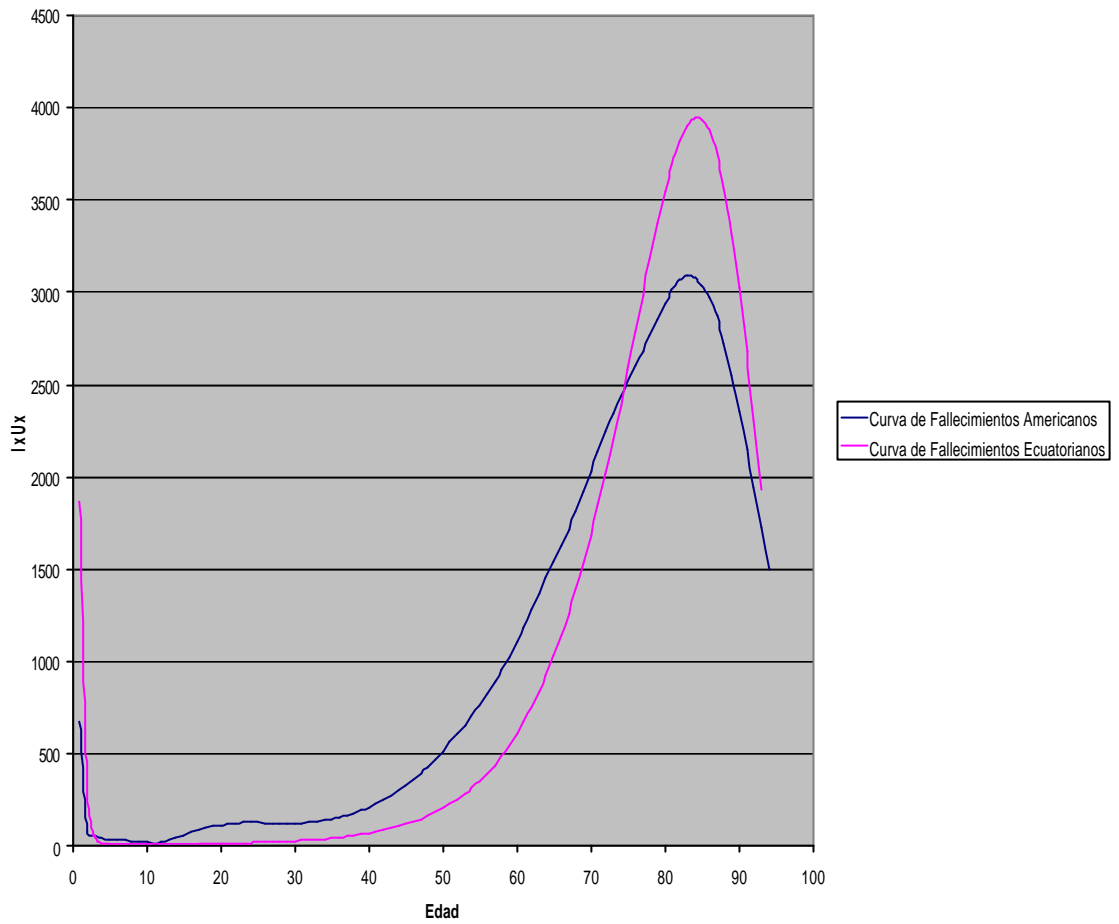


figura 5.6

5.2 Análisis del Error de Estimación

El promedio de ε es cero, porque el componente determinista del modelo representa a $E(Y)$. Por último, se supone que la varianza de ε es σ^2 , constante para todos los valores de x , y que los

errores asociados con distintas observaciones son independientes.

La especificación de distribución de probabilidad del componente de error ε del modelo de regresión múltiple sigue las mismas características generales que la del modelo de línea recta. Se supone que ε tiene una distribución normal con promedio cero y varianza σ^2 constante, para cualquier conjunto de valores de las variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n . Además, se supone que los errores son independientes. Con estas hipótesis, la tarea que queda para especificar la distribución de probabilidad de ε es estimar σ^2 .

Recordemos que el estimador para el modelo de regresión lineal es $s^2 = \text{SEC}/(n-2)$, y obsérvese que el denominador es n (número de parámetros β estimados), que es $n-2$ en el modelo de regresión lineal, en el cual s^2 es el error cuadrático promedio, error cuadrático medio (ECM) o promedio de error al cuadrado. Para el modelo de regresión múltiple $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon$. Se debe calcular los $(k+1)$ parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Así, el estimador de s^2 es la SCE (suma de errores al cuadrado) dividida entre la cantidad n (número de parámetros estimados β). Luego

el estimador de s^2 para el modelo de regresión múltiple con k variables independientes es $ECM=SCE/(n-(k+1))$.

El estimador s^2 se usa tanto para comprobar lo adecuado del modelo como para dar una medida de la confiabilidad de los predictores y estimaciones cuando se emplea el modelo para estos fines. Así, se podrá observar que la estimación de la varianza de los errores desempeña una función importante en el desarrollo del modelo de regresión.

Para concluir con este tipo de análisis, mostraremos una fórmula de la cota de error para el trazador cúbico con condiciones de frontera sujeta.

Sí, $f \in C^4[a,b]$ con $\max_{a < x < b} |f^{(4)}(x)| < k$. Si S es el único interpolante cúbico de trazador de f con respecto a los nodos $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$, que satisface $S'(a)=f'(a)$ y $S'(b)=f'(b)$, entonces:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5K}{384} \max(x_{j+1} - x_j)^4.$$

Finalmente se puede afirmar que existe un error, en el gráfico de la población ecuatoriana por edades simples según el censo del

año 1990 y en las proyecciones del año 2000, ya que en las edades múltiplos de cinco se observan unas fluctuaciones o variabilidad es decir unos picos a esas edades.

CAPITULO 6

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

1. Para la construcción de los modelos teóricos y empíricos, se tuvieron que utilizar las proyecciones del INEC de la población del Ecuador por grupos de edades, ya que no contaban con proyecciones por edades simples; lo mismo sucedió con los nacimientos y defunciones.
2. Los valores interpolados, a partir del Censo de Población y proyecciones, mediante los trazadores cúbicos, conservan el mismo tipo de fluctuaciones, es decir presentan picos a las edades múltiplos de cinco. La interpolación por trazador cubico, arrastra dos tipos de error, un error de truncamiento que es debido a la interpolación, y un error aleatorio debido al registro de los datos en el censo del año 1990.

3. El modelo de regresión cubica, resulta mayor la suavización que empleando los trazadores cúbicos, pero debido a la excesiva suavidad podría estar eliminando características o propiedades reales de la mortalidad de la población, las cuales con el modelo de Splines si las detectabas. No importa la cantidad de nodos seleccionados, ya que la curva de mejor ajuste conservan muy bien su tendencia sin fluctuaciones, es decir no existe diferencia significativa en ambas curvas suavizadas.

4. Las tablas de mortalidad, que se construyeron, no solo facilitan información para determinar la prima de un seguro, sino que también facilita información para tomar decisiones en cuanto a las políticas del área social del país, como es el caso de las pensiones jubilares de los trabajadores jubilados.

5. Al comparar, los datos de los modelos, se observa que la probabilidad de que un recién nacido no alcance a cumplir el año de vida es doble con respecto al otro modelo, es decir la probabilidad de que un recién nacido fallezca según el modelo teórico es el doble que la probabilidad de que un recién nacido fallezca antes de cumplir el primer año de vida según el modelo empírico. Ambos modelos, presentan un mínimo a la edad de 6

año en su función de mortalidad, a partir de los 90 años en adelante la función de mortalidad del modelo empírico crece más rápido que la del modelo teórico, finalmente se aprecia que la curva de mortalidad del modelo teórico es más suave que la curva de mortalidad del modelo empírico.

6. En cuanto a la comparación de los datos de las tablas de mortalidad de la población ecuatoriana y americana, se observan que la mortalidad infantil en un país en vías de desarrollo es muy alta (el doble) en comparación con la mortalidad infantil de un país industrializado como es el caso de la población americana. En la población ecuatoriana a partir de los 80 años en adelante la fuerza de mortalidad crece más rápido que la fuerza de mortalidad que la población americana, por último la curva de fallecimientos, es decir el número esperado de fallecimientos casi coinciden, a pesar que en el Ecuador la mortalidad infantil es casi el doble que en la población ecuatoriana.

6.2 Recomendaciones

1. Al trabajar con los datos del Censo de Población, efectuado por el Inec el año 1990 y con los datos de las proyecciones, se está cometiendo un error de estimación en los parámetros de las tablas actuariales; el mismo que puede ser analizado únicamente cuando se lleve a cabo el siguiente Censo Poblacional; pero por otro lado sería interesante que se construya un modelo que minimice este tipo de error sin necesidad de esperar los resultados de los siguientes Censos.
2. Es interesante trabajar con modelos analíticos que estudien la mortalidad de la población que se ajusten a los patrones de variabilidad que presenta la población, ya que los modelos tradicionales no se ajustan adecuadamente a esta variabilidad y quedan como simples ilustraciones académicas

ANEXO

ANEXO A

TABLA DE MORTALIDAD DE LA POBLACIÓN AMERICANA

Edad	L_x	U_x	p_x	q_x	d_x	T_x	e_x^0
0	100000	0.00019323	0.9874	0.0126	1260	7387758	73.87758
1	98740	0.00680611	0.99906826	0.00093174	92	7288785	73.8179562
2	98648	0.00079058	0.99935123	0.00064877	64	7190091	72.8863332
3	98584	0.00057307	0.99950296	0.00049704	49	7091474	71.9333158
4	98535	0.0004516	0.99959405	0.00040595	40	6992914	70.9688334
5	98495	0.0003858	0.9996345	0.0003655	36	6894399	69.9974516
6	98459	0.00035039	0.99966484	0.00033516	33	6795922	69.0228623
7	98426	0.00032003	0.9996952	0.0003048	30	6697480	68.0458415
8	98396	0.00028456	0.99973576	0.00026424	26	6599068	67.0664255
9	98370	0.00024906	0.99976619	0.00023381	23	6500685	66.0840195
10	98347	0.00021353	0.99980681	0.00019319	19	6402327	65.0993625
11	98328	0.00019323	0.99980677	0.00019323	19	6303989	64.11184
12	98309	0.0002187	0.99975587	0.00024413	24	6205670	63.124129
13	98285	0.00031034	0.99962354	0.00037646	37	6107373	62.1394211
14	98248	0.00045297	0.99947073	0.00052927	52	6009107	61.1626394
15	98196	0.00060598	0.99931769	0.00068231	67	5910885	60.1947635
16	98129	0.00075926	0.99916437	0.00083563	82	5812722	59.2355165
17	98047	0.00089758	0.99904128	0.00095872	94	5714635	58.2846492
18	97953	0.00100052	0.99895868	0.00104132	102	5616635	57.3401019
19	97851	0.00108332	0.99887584	0.00112416	110	5518733	56.3993521
20	97741	0.0011664	0.99879273	0.00120727	118	5420937	55.4622625
21	97623	0.0012395	0.99872981	0.00127019	124	5323255	54.5286971
22	97499	0.00129748	0.99867691	0.00132309	129	5225694	53.5974113
23	97370	0.00132999	0.99866489	0.00133511	130	5128259	52.6677519
24	97240	0.0013369	0.9986631	0.0013369	130	5030953	51.7374846
25	97110	0.00132838	0.99868191	0.00131809	128	4933778	50.8060756
26	96982	0.00130951	0.99870079	0.00129921	126	4836732	49.8724712
27	96856	0.0013009	0.9986991	0.0013009	126	4739813	48.9366998
28	96730	0.0013026	0.99869741	0.00130259	126	4643020	47.9997932
29	96604	0.00130948	0.99868535	0.00131465	127	4546353	47.0617469
30	96477	0.00131638	0.99868362	0.00131638	127	4449812	46.1230345
31	96350	0.0013337	0.99865075	0.00134925	130	4353398	45.1831655
32	96220	0.00136148	0.99862814	0.00137186	132	4257114	44.243546
33	96088	0.0013998	0.99857422	0.00142578	137	4160959	43.3036279
34	95951	0.00145912	0.99850966	0.00149034	143	4064940	42.3647487

80	43180	0.06805885	0.93117184	0.06882816	2972	344612	7.98082446
81	40208	0.07491082	0.92449264	0.07550736	3036	302918	7.53377437
82	37172	0.08245762	0.91722264	0.08277736	3077	264229	7.10828043
83	34095	0.09059078	0.90957618	0.09042382	3083	228595	6.70464878
84	31012	0.09918791	0.90158648	0.09841352	3052	196042	6.32148846
85	27960	0.10852981	0.89273963	0.10726037	2999	166556	5.95693848
86	24961	0.11900334	0.88289732	0.11710268	2923	140095	5.61255559
87	22038	0.13029154	0.8728106	0.1271894	2803	116595	5.29063436
88	19235	0.14174301	0.86290616	0.13709384	2637	95959	4.98877047
89	16598	0.15336713	0.85275334	0.14724666	2444	78042	4.70189179
90	14154	0.16603588	0.84131694	0.15868306	2246	62666	4.42744101
91	11908	0.18060344	0.82826671	0.17173329	2045	49635	4.16820625
92	9863	0.19688844	0.81435669	0.18564331	1831	38749	3.92872351
93	8032	0.2143747	0.7998008	0.2001992	1608	29081	3.62064243
94	6424	0.23271621	0.78502491	0.21497509	1381	22573	3.5138543
95	5043	0.25158771	0.77017648	0.22982352	1159	16840	3.33928217
96	3884	0.26996588	0.75669413	0.24330587	945	12377	3.18666323
97	2939	0.28762486	0.74345015	0.25654985	754	8965	3.05035726
98	2185	0.30465827	0.73135011	0.26864989	587	6403	2.93043478
99	1598	0.32092694	0.71964956	0.28035044	448	4511	2.82290363
100	1150	0.33666001	0.70869565	0.29130435	335	3127	2.71913043
101	815	0.35094043	0.6993865	0.3006135	245	2154	2.64294479
102	570	0.36468925	0.68947368	0.31052632	177	1462	2.56491228
103	393	0.37919385	0.67938931	0.32061069	126	981	2.49618321
104	267	0.3932119	0.67041199	0.32958801	88	651	2.43820225
105	179	0.40406258	0.66480447	0.33519553	60	428	2.39106145
106	119	0.41533849	0.65546218	0.34453782	41	278	2.33613445
107	78	0.42364893	0.65384615	0.34615385	27	179	2.29487179
108	51	0.43010063	0.64705882	0.35294118	18	115	2.25490196

BIBLIOGRAFIA

1. BURDEN RICHARD L., FAIRES DOUGLAS J., Análisis Numérico, Iberoamérica, México, 1985
2. GRANVILLE WILLIAM A., SMITH PERCEY F., LONGLEY WILLIAM R., Cálculo Diferencial e Integral, Hispano-Americana, México, 1977.
3. INEC, Anuario de Estadísticas Vitales, 1990-1998, Publicaciones del Instituto Nacional de Estadísticas y Censo, Guayaquil
4. NEWMAN JAMES R., El Mundo de las Matemáticas, Grijalbo S. A., Barcelona-España, 1968.
5. SANCHEZ NEVAREZ JAVIER, Construcción de una Tabla de Mortalidad para la Población Ecuatoriana (Tesis, Instituto de Ciencias Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2000)
6. SCHEAFFER RICHARD L., McCLAVE JAMES T., Probabilidad y Estadística para Ingeniería, Iberoamérica, México, 1993
7. VEGAS PEREZ ANGEL, Estadística-Aplicaciones Econométricas y Actuariales, Pirámide, Madrid-España, 1981

8. VILLALON JULIO G., Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas,
Pirámide, España, 1997