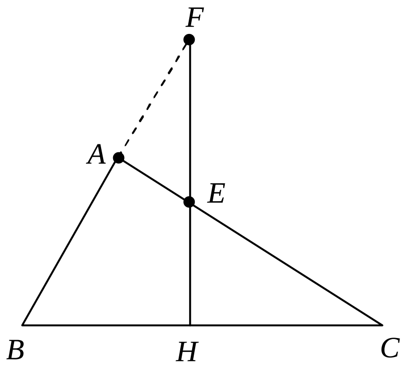
TEMAS DE ENTRENAMIENTO
CÁLCULO DIFERENCIAL
2008 – I Término

GEOMETRÍA PLANA

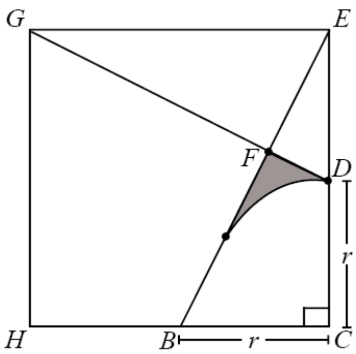
1. Determine las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, si se conoce que la perpendicular trazada por el punto medio de su hipotenusa interseca a un cateto y a la prolongación del otro, en dos puntos que están localizados a 4m y 5m del vértice del ángulo recto respectivamente, tal como se muestra en la figura:



$\overline{AF} = 5m$
$\overline{AE} = 4m$

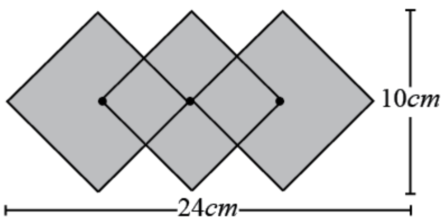
Se espera que el estudiante:
- Aplique semejanza de triángulos.

2. Dado el cuadrado CHGE, B y D son los puntos medios de dos de sus lados y desde el punto C se traza un cuarto de circunferencia. A fin de encontrar el área de la superficie sombreada, se propone hallar restarle al área del triángulo BCE, el área del triángulo EFD y el área del cuarto de círculo CBD. Encuentre el error en el procedimiento planteado.



Se espera que el estudiante:
- Conozca las propiedades de las rectas tangentes a la circunferencia.

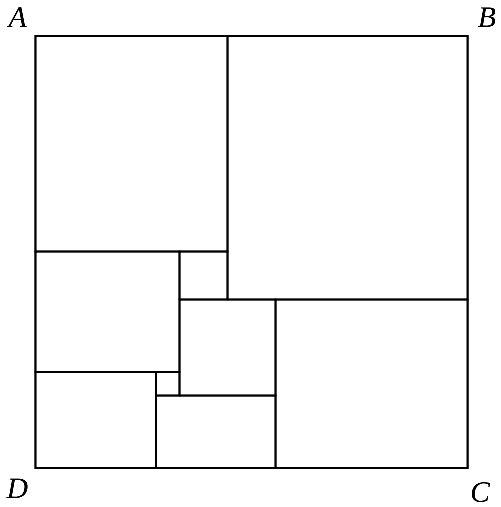
3. Determine el área de la región sombreada, si está formada por tres rombos tal como se muestra en la figura:



Se espera que el estudiante:
- Recuerde las características de los rombos.
- Aplique la fórmula apropiada para área de figuras planas.

4. Se tiene una hacienda de forma rectangular (rectángulo ABCD) y se desean cultivar 9 tipos diferentes de hortalizas. El ingeniero agrónomo de la hacienda ha recomendado que para obtener mejores rendimientos en las cosechas es mejor sembrar cada tipo de hortaliza en superficies de formas cuadradas. Por ello ha dividido la haciendo en 9 cuadrados de acuerdo a la figura adjunta. Si se sabe que el lado del cuadrado más pequeño es de 2 metros:

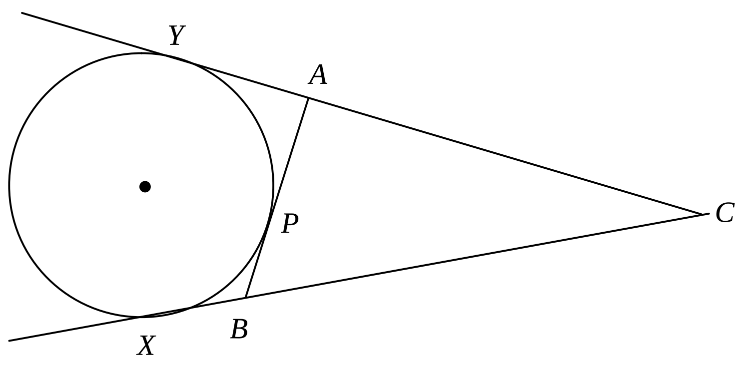
   a) Calcule la superficie de la hacienda.
   b) Calcule el área de las 3 superficies cuadradas interiores.



Se espera que el estudiante:
- Interprete un problema real.
- Modele matemáticamente el problema.
- Analice las variables que intervienen en el problema.
- Analice la aplicación de los datos dados con las variables del problema y la incógnita del mismo.
- Calcule áreas de superficies rectangulares y cuadradas.

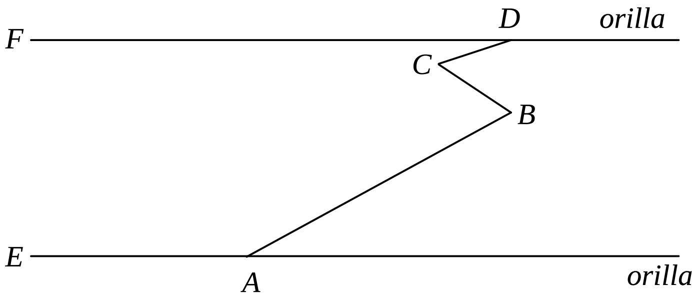
5. Desde un punto exterior C a una circunferencia se trazan 2 rectas tangentes a ella. Los segmentos de recta $\overline{XC}$ y $\overline{YC}$ tienen una longitud de 10cm. Sobre el arco menor XY se escoge un punto P al azar y se traza otra recta tangente $\overleftrightarrow{AB}$, de tal manera que los puntos A y B sean las intersecciones con las rectas tangentes iniciales.

   De acuerdo a esta información calcule el perímetro del triángulo ABC.



Se espera que el estudiante:
- Relacione los datos dados con las variables del problema.
- Calcule perímetros de triángulos.
- Conozca las características de las rectas tangentes desde un punto exterior a la circunferencia.
- Aplique el concepto de congruencia entre segmentos de recta.

6. Un barco navega entre dos orillas paralelas, desde el punto A al punto D, como se muestra en la figura:



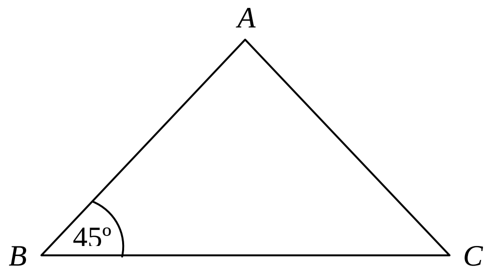
Se conoce que $\angle EAB = \dfrac{2\pi}{3}$, $\angle BCD = \dfrac{2\pi}{9}$, $\angle ABC = \angle CDF$, $\angle CBD = \angle CDB$.

Calcule la medida del ángulo $\angle ABC$.

Se espera que el estudiante:

- Identifique ángulos alternos internos.
- Aplique teorema de suma de ángulos interiores para triángulos

7. La figura muestra un triángulo ABC en el cual $\overline{AC} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$, $\overline{BC} = 6$ y $\angle ABC = 45º$



a) Demuestre que $sen\left(\angle BAC\right) = \dfrac{6}{7}$.

Si el punto D pertenece al segmento AB tal que $sen\left(\angle BDC\right) = \dfrac{6}{7}$.

b) Encuentre el valor de $\angle BDC + \angle BAC$

c) Calcule la medida del ángulo $\angle BAC$

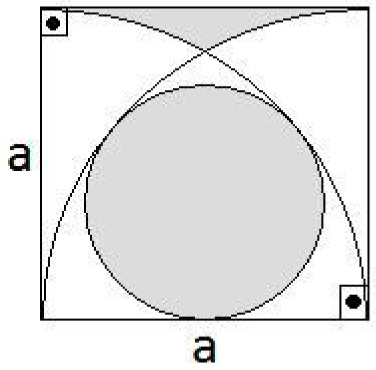
d) Encuentre la longitud de $\overline{BD}$.

e) Demuestre que: $\dfrac{Area\ del\ \triangle BDC}{Area\ del\ \triangle BAC} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BA}}$

Se espera que el estudiante:

- Conozca sobre resolución de triángulos.
- Aplique la ley del seno.
- Conozca sobre áreas de triángulos.

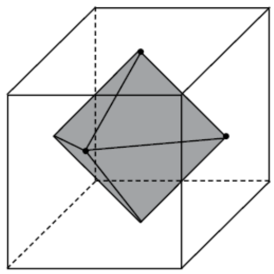
8. Hallar el área de la región sombreada de la figura adjunta, si la medida de los lados del cuadrado es “a”



Se espera que el estudiante:
- Aplique criterios de simetría.
- Aplique el teorema de Pitágoras.
- Conozca sobre circunferencias tangentes.
- Conozca sobre áreas de figuras planas.

<u>GEOMETRÍA DEL ESPACIO</u>

9. Al unir los centros de las caras de un cubo cuya arista mide 6m se forma un sólido, calcule el volumen de este último.



Se espera que el estudiante:
- Identifique el sólido formado.
- Aplique el teorema de Pitágoras.
- Conozca cómo determina el volumen de una pirámide.
- Determine la congruencia de sólidos.

10. Determine el área de la superficie lateral de un cilindro oblicuo de 1.5m de altura, siendo la sección recta un círculo de 0.5m de radio y sabiendo que la generatriz forma con la base un ángulo de 60º.

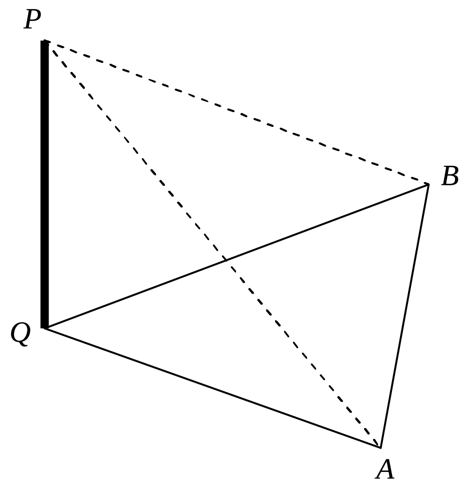
Se espera que el estudiante:
- Grafique correctamente el sólido especificado en un problema.
- Conozca sobre resolución de triángulos.
- Aplique la fórmula de área de la superficie lateral de un cilindro.

11. Un reloj de arena está formado por dos conos rectos unidos por su cúspide. La altura del reloj es de 10cm y su diámetro de 5cm. Se puede observar que cuando el reloj no marca el tiempo (está en reposo), la arena se encuentra en su totalidad en el cono inferior, llegando el nivel de la arena hasta la mitad de la altura del cono.

    a) Calcular el volumen de arena que hay.
    b) Si la velocidad a la que fluye la arena es de $0.1cm^3/min$, calcular el tiempo en que se demora en pasar la arena de un cono al otro.

    Se espera que el estudiante:
    - Grafique correctamente la situación descrita.
    - Analice las variables que intervienen en el problema.
    - Calcule volúmenes de conos truncados.
    - Establezca un puente entre matemática y física.

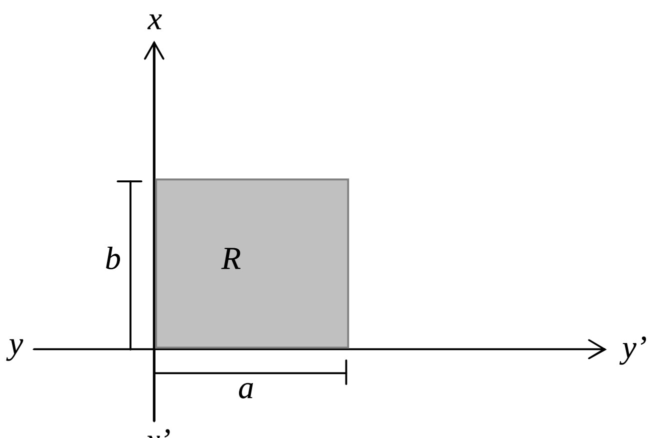
12. En la figura adjunta se muestra un poste PQ el cual está sujeto por medio de cables a dos puntos fijos A y B.



    Si $\overline{BQ} = 40m$, $\angle PBQ = 36^{\circ}$, $\angle BAQ = 70^{\circ}$, $\angle ABQ = 30^{\circ}$.
    Calcule:
    a) La longitud del poste PQ.
    b) La distancia entre A y B.

    Se espera que el estudiante:
    - Conozca sobre resolución de triángulos.
    - Aplique el teorema de Pitágoras.

13. Determine los valores de a y b tal que el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región R alrededor del eje xx' sea el mismo al hacer rotar alrededor de yy' y sea igual a $27\pi u^3$.



    Se espera que el estudiante:
    - Visualice los sólidos de revolución que se generan.
    - Conozca sobre volúmenes de sólidos de revolución.

14. ¿Cuál es la razón entre el volumen de una esfera y el volumen de un cubo inscrito en ella? Además explique el resultado obtenido.

Se espera que el estudiante:
- Conozca sobre figuras inscritas.
- Visualice espacialmente un problema.
- Conozca sobre fórmulas de volumen.

<u>LÍMITES</u>

15. Calcule:

a. $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)$

b. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}\left(2x\tan(x)-\dfrac{\pi}{\cos(x)}\right)$

c. $\lim_{x \to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}\right)$

d. $\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

e. $\lim_{x \to 0}\left(\dfrac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-x}-1}\right)$

f. $\lim_{x \to 0}\left(x+e^{\frac{\pi}{2}x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Se espera que el estudiante:
- Utilice los procedimientos algebraicos apropiados para la resolución de límites.

16. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

“Si $f(x)=\begin{cases} -|2x+2|\operatorname{sgn}(x-2), & x<0 \\ 4m(x), & x \geq 0 \end{cases}$, entonces $\lim_{x \to 0} f(x)=4$ ”.

Se espera que el estudiante:
- Sepa trabajar con funciones especiales.
- Conozca la definición de límite bilateral.

17. Si $f(x)=x^2-4cx+4c^2$, calcule $\lim_{x \to a}\dfrac{f(x+a)-f(x)}{a}$. Considere $a, c \in \mathbb{R}$.

Se espera que el estudiante:
- Conozca la definición de límites.
- Simplifique expresiones algebraicas.

CONTINUIDAD

18. Considere la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases} a+bx, x>2 \\ 3, \quad x=2 \\ b-ax^2, x<2 \end{cases}$$

Determine los valores reales de de a y b para que la función f sea continua.

19. Considere la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(ax)}{x^2}, x<0 \\ 1, \quad x=0 \\ \dfrac{e^{2bx}-1}{x}, \quad x>0 \end{cases}$$

Determine los valores reales de de a y b para que la función f sea continua.

20. Considere la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases} 4x, \quad x\le 1 \\ ax+b, -1<x<2 \\ 5, \quad x=2 \\ -5x, \quad x>2 \end{cases}$$

Determine los valores reales de de a y b para que la función f sea continua.

21. Considere la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \quad x\le -2 \\ ax+b, -2<x<2 \\ 2x-6, x\ge 2 \end{cases}$$

Determine los valores reales de de a y b para que la función f sea continua.

22. Considere la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos(2x)-e^{4x}}{ax-\tan(3x)}, x>0 \\ 1, \quad x=0 \\ \dfrac{bx}{\ln(1+x)}, \quad x<0 \end{cases}$$

Determine los valores reales de de a y b para que la función f sea continua.

Se espera que el estudiante:

- Aplique correctamente la definición de continuidad en un punto.
- Aplique propiedades de logaritmos.
- Utilice límites conocidos sobre funciones trascendentes.

LÍMITES y CONTINUIDAD

23. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las siguientes características:

- $dom\ f = \mathbb{R}$
- f es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \left[\ x>N\ \Rightarrow\ \left|f(x)-1\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \left[\ x<-N\ \Rightarrow\ \left|f(x)\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall M>0\ \exists\delta>0\ \left[\ 0<x-1<\delta\ \Rightarrow\ f(x)>M\right]$
- $\forall M>0\ \exists\delta>0\ \left[\ 0<1-x<\delta\ \Rightarrow\ f(x)<-M\right]$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \left[\ 0<x<\delta\ \Rightarrow\ \left|f(x)+1\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \left[\ 0<-x<\delta\ \Rightarrow\ \left|f(x)-1\right|<\varepsilon\right]$
- $\forall M>0\ \exists\delta>0\ \left[\ 0<x+1<\delta\ \Rightarrow\ f(x)>M\right]$
- $\forall M>0\ \exists\delta>0\ \left[\ 0<-x-1<\delta\ \Rightarrow\ f(x)<-M\right]$
- $f(0)=0$

Se espera que el estudiante:

- Interprete definiciones de límite.
- Interprete definiciones de intervalos de continuidad.
- Sintetice la información para lograr una gráfica que cumpla con todas las características que se indican.