## Capítulo 7

# Geometría Plana

## Introducción

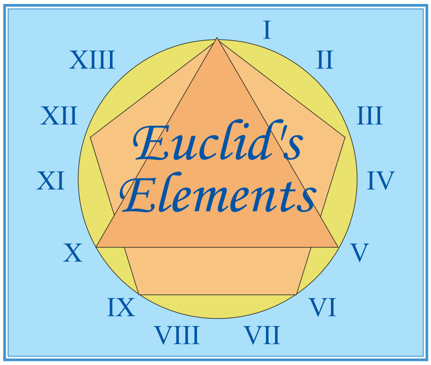
La geometría es la rama de las matemáticas que estudia idealizaciones en dos y tres dimensiones: los puntos, las rectas, los planos y otros elementos conceptuales derivados de ellos, como polígonos o poliedros. En este capítulo vamos a tratar solamente lo relacionado al plano, lo cual implica trabajar en dos dimensiones.


Es razonable pensar que los orígenes de la geometría se remontan a los mismos orígenes de la humanidad, pues seguramente el hombre primitivo clasificaba -aún de manera inconsciente- los objetos que le rodeaban según su forma. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento -informal e intuitivo- a la geometría.

Thales de Mileto fue capaz de medir la altura de la pirámide de Keops y de predecir un eclipse solar aplicando conceptos geométricos.

Uno de los famosos problemas de la geometría griega que heredarían los matemáticos posteriores, denominado la **cuadratura del círculo**, trata de obtener, dado un círculo, un cuadrado cuya área mida exactamente lo mismo que el área del círculo. Anaxágoras fue el primero en intentar resolverlo, dibujando en las paredes de su celda cuando fue hecho prisionero por cuestiones políticas. Tampoco pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó a ser el paradigma de lo imposible. Como curiosidad, el filósofo inglés Hume llegó a escribir un libro con supuestos métodos para resolver el problema. Hume no tenía conocimientos matemáticos serios y nunca aceptó que todos sus métodos fallaban.

Es importante observar que este tipo de problemas eran resueltos utilizando únicamente la regla y el compás, únicos instrumentos (además del papel y el lápiz, por supuesto) válidos en la geometría euclidiana.




El libro de *"Los Elementos"* de Euclides (300 a.C.), expone los conocimientos geométricos de la Grecia clásica, deduciéndolos a partir de postulados considerados como los más evidentes y sencillos.

La geometría de Euclides, además de ser un poderoso instrumento de razonamiento deductivo, ha sido extremadamente útil en muchos campos del conocimiento como la física, la astronomía, la química y diversas ingenierías.

## 7.1 Figuras Geométricas

### Objetivos

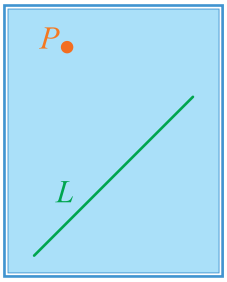
Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una región del plano, indicar si es una figura convexa o no convexa, justificando adecuadamente su respuesta.

* Dados varios puntos del plano, reconocer si son o no colineales, justificando adecuadamente su respuesta.

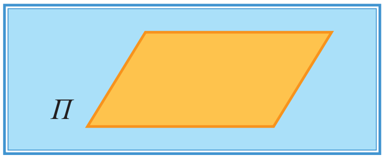
* Distinguir entre figuras autocongruentes y no autocongruentes, simétricas y asimétricas.

El desarrollo de la geometría depende del avance en las definiciones, sin embargo, las propiedades de las figuras geométricas son posibles de enunciar sin hacer referencia a éstas.



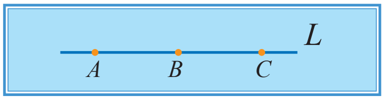

El punto, la recta y el plano son considerados conceptos primitivos, o sea que no es posible definirlos en base a otros elementos ya conocidos. El **punto** es uno de los conceptos geométricos fundamentales, suele representarse sin relación a otra figura, como un círculo pequeño y puede denotarse con una letra mayúscula de imprenta, por ejemplo: $P$. La **recta** es el lugar geométrico de puntos continuamente sucesivos del plano en una misma dirección y suele denotarse con la letra $L$.

# Geometría Plana

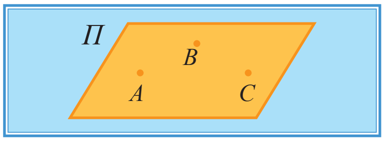



Se acostumbra representar el **plano** como una figura delimitada por bordes rectos, y suele denotarse con una letra del alfabeto griego, por ejemplo: $\Pi$. Si se tiene más de un punto, recta o plano, se sugiere el uso de subíndices para identificarlos.

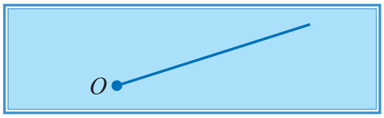
A continuación se definen algunos elementos importantes en el uso de la geometría.




**Puntos colineales** son aquellos que pertenecen a la misma recta $L$.

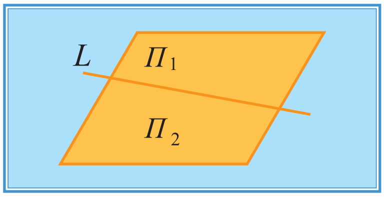



**Puntos coplanares** son los que pertenecen a un mismo plano $\Pi$.




**Semirrecta o rayo** es el conjunto de todos los puntos de una recta que están a un mismo lado de un punto de ésta.


**Segmento de recta** es un subconjunto de la recta que está limitado por dos puntos que pertenecen a ella. Para fines prácticos, se sobreentenderá que $\overline{AB}$ también representa la longitud de este segmento.




**Semiplano**, es el conjunto de puntos del plano que están a un mismo lado de una recta $L$, como $\Pi_1$ o $\Pi_2$.

Definición 7.1 (Convexidad)

Una figura $F$ se denomina convexa, si y sólo si, para cada par de puntos que pertenecen a la figura, el segmento de recta definido por ambos puntos está incluido en la figura, es decir:

$$F \text{ es convexa} \equiv \forall\, P_1, P_2 \in F\left(\overline{P_1P_2} \subseteq F\right).$$

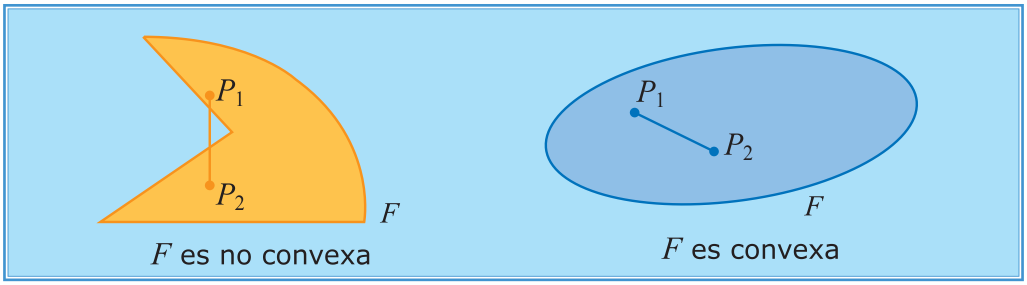
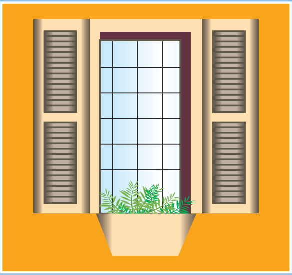



**Figura 7.1: Convexidad de figuras.**

## **Ejemplo 7.1** Figuras geométricas.

El hombre ha empleado sencillas figuras geométricas planas que han sido de mucha utilidad para su desarrollo, desde un punto de vista decorativo hasta tecnológico.



La congruencia es la relación entre segmentos, ángulos y figuras geométricas con igual medida, tal que, al trasladarse, rotarse y/o reflejarse para superponerse una a otra, se tiene que estas figuras coinciden. Observe a continuación:

La autocongruencia de una figura se encuentra estrechamente vinculada con la **simetría**, la cual se produce cuando al trazar una recta, la figura queda dividida en dos partes, tal que una es la reflexión de la otra, a esta recta se la denomina **eje de simetría**.

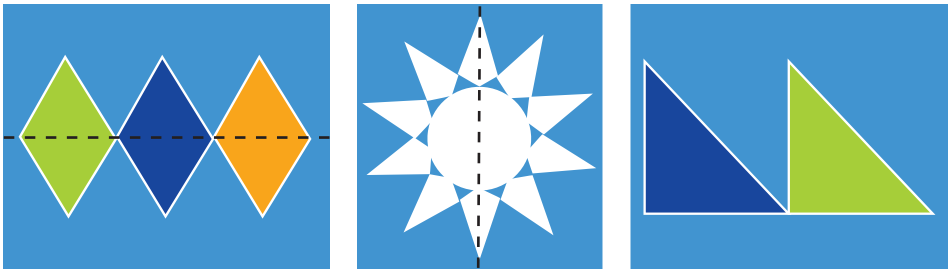


**Figura 7.2: Autocongruencia de Figuras.**

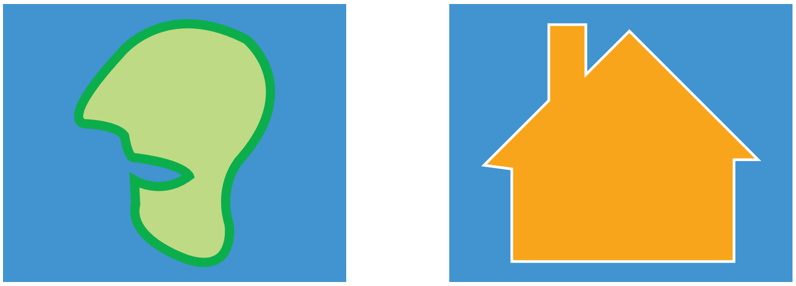


**Figura 7.3: No autocongruencia de figuras.**

En los dos últimos ejemplos las figuras no son autocongruentes, ya que al dividirlas por cualquier recta, las partes que se obtienen no se pueden superponer perfectamente.

En caso de no ser el reflejo exacto, a la figura se la considerará asimétrica.

Observe:

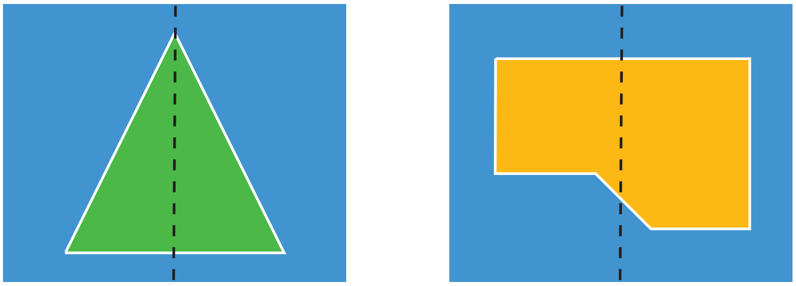


**Figura 7.4: Simetría o asimetría de figuras.**

En conclusión, podemos decir que cuando una figura es simétrica es autocongruente, ya que sus segmentos, ángulos y lados, al ser divididos por un eje de simetría o superpuestos, coinciden de manera exacta.

## 7.2 Rectas en el plano

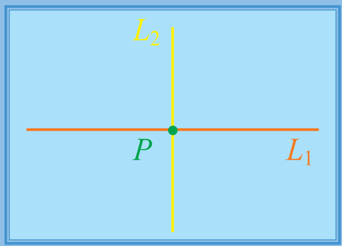
### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Aplicar conceptos sobre rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas.

Dos rectas en el plano pueden ser **perpendiculares**, **paralelas** u **oblicuas**. En el caso de las rectas perpendiculares u oblicuas que tienen un punto en común $P$, se las denomina rectas **secantes**.

### Definición 7.2 (Perpendicularidad)




Una recta es perpendicular a otra cuando al intersecarse en un punto $P$, determinan en el plano que las contiene, cuatro ángulos congruentes cuya medida es de $90^o$. La notación para la perpendicularidad es:

$L_1 \perp L_2$ y se lee "$L_1$ es perpendicular a $L_2$".

En el plano, un punto perteneciente o exterior a una recta está contenido en una y sólo una recta perpendicular a dicha recta.

Las propiedades de la perpendicularidad entre rectas son:

- Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera. (*Simétrica*).

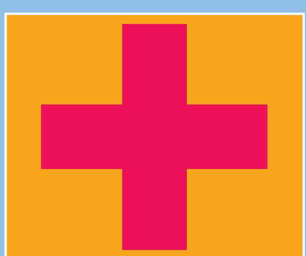
$$(L_1 \perp L_2) \Rightarrow (L_2 \perp L_1)$$

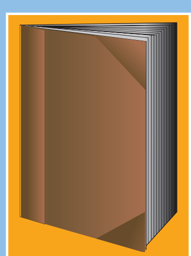
- Si dos rectas al intersecarse forman ángulos adyacentes congruentes, son perpendiculares.

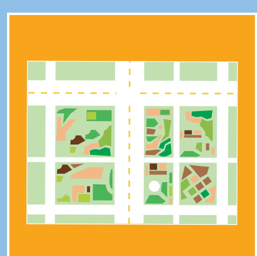
- Los lados de un ángulo recto y sus semirrectas opuestas, determinan rectas perpendiculares.

## **Ejemplo 7.2** Rectas perpendiculares.

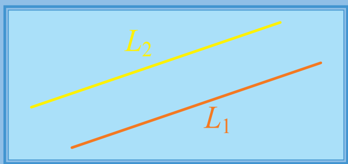
El símbolo de la Cruz Roja, las esquinas de un libro o la intersección de las calles de una ciudad, representan ejemplos de rectas perpendiculares.







### Definición 7.3 (Paralelismo)




Una recta es paralela a otra cuando no se intersecan o son coincidentes. La notación para el paralelismo es:

$L_1 \parallel L_2$ y se lee "$L_1$ es paralela a $L_2$".

En el plano, un punto exterior a una recta está contenido en una y sólo una recta paralela a dicha recta.

Las propiedades del paralelismo entre rectas son:

- Toda recta es paralela a sí misma. (*Reflexiva*).

$$L \parallel L$$

- Si una recta es paralela a otra, aquella es paralela a la primera. (*Simétrica*).

$$(L_1 \parallel L_2) \Rightarrow (L_2 \parallel L_1)$$

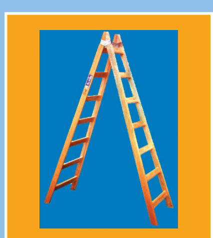
- Si una recta es paralela a otra, y ésta a su vez paralela a una tercera, la primera es paralela a la tercera. (*Transitiva*).

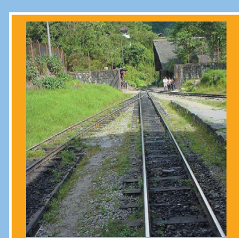
$$[(L_1 \parallel L_2) \wedge (L_2 \parallel L_3)] \Rightarrow (L_1 \parallel L_3)$$

- Todas las rectas paralelas tienen la misma dirección.

## **Ejemplo 7.3** Rectas paralelas.

Las escaleras, las franjas de algunas banderas y los rieles sobre los cuales se traslada un tren, representan ejemplos de rectas paralelas.





Relacionando perpendicularidad, paralelismo e intersección entre rectas, se obtienen las siguientes propiedades:

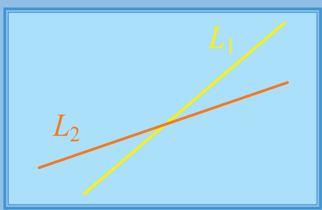
- En el plano, dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

$$[(L_1 \perp L_3) \wedge (L_2 \perp L_3)] \Rightarrow (L_1 \parallel L_2)$$

- Si una recta interseca a una de dos paralelas, interseca también a la otra.

$$[(L_1 \cap L_2 \neq \varnothing) \wedge (L_2 \parallel L_3)] \Rightarrow (L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)$$

**Definición 7.4 (Rectas oblicuas)**




Dos rectas oblicuas son aquellas que no son perpendiculares ni paralelas.

$L_1$ y $L_2$ son oblicuas $\equiv \neg(L_1 \parallel L_2) \wedge \neg(L_1 \perp L_2)$.

## 7.3 Ángulos

### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas tres rectas, tal que una de ellas es secante a las otras dos, identificar los ángulos internos, externos, opuestos por el vértice, alternos internos, alternos externos, correspondientes y conjugados que se forman.

El concepto de ángulo ya fue tratado oportunamente en el capítulo IV, sección 1, de este texto. Sin embargo, para el análisis geométrico que nos proponemos desarrollar, es necesario definir diferentes tipos de ángulos.

Al intersecar dos rectas en el plano se forman cuatro ángulos. De ellos, son **ángulos opuestos por el vértice** aquellos que poseen sólo el vértice en común y no son consecutivos.

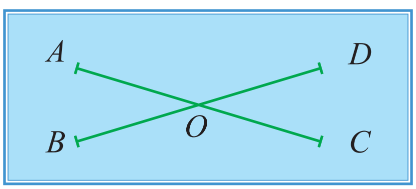



**Figura 7.5: $\measuredangle\, AOB$ y $\measuredangle\, COD$ son ángulos opuestos por el vértice.**

# Geometría Plana

Si intersecamos dos rectas oblicuas $L_1$ y $L_2$ con una recta secante $L_3$ (recta que interseca a una figura en puntos diferentes), se forman de manera natural ocho ángulos, cuatro en cada punto de intersección.

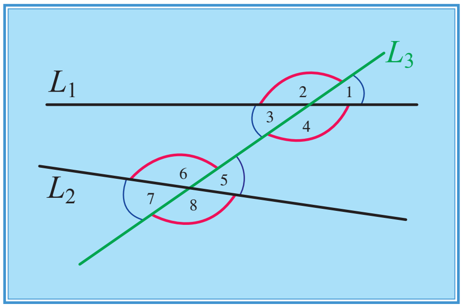



**Figura 7.6: Ángulos en rectas secantes.**

Se denominan **ángulos externos** a los ángulos que están en la región externa a las rectas $L_1$ y $L_2$. De esta manera, son externos los ángulos $1$, $2$, $7$ y $8$.

Se denominan **ángulos internos** a los ángulos que están en la región interna a las rectas $L_1$ y $L_2$. De esta manera, son internos los ángulos $3$, $4$, $5$ y $6$.

Se denominan **ángulos correspondientes** a los ángulos no consecutivos que están en el mismo semiplano determinado por la recta secante $L_3$. Uno de los ángulos es interno y el otro externo. De esta manera, son correspondientes los pares de ángulos $1–5$, $2–6$, $3–7$, $4–8$.

Se denominan **ángulos alternos externos** a los ángulos que están ubicados externamente con respecto a las rectas $L_1$ y $L_2$, y en distintos semiplanos determinados por la recta secante $L_3$. De esta manera, son alternos externos los pares de ángulos $1–7$ y $2–8$.

Se denominan **ángulos alternos internos** a los ángulos que están ubicados internamente con respecto a las rectas $L_1$ y $L_2$, y en distintos semiplanos determinados por la recta secante $L_3$. De esta manera, son alternos internos los pares de ángulos $3–5$ y $4–6$.

Se denominan **ángulos conjugados (o contrarios) externos** a los ángulos externos que están ubicados en el mismo semiplano respecto a la recta secante. De esta manera, son conjugados externos los pares de ángulos $1–8$ y $2–7$.

Se denominan **ángulos conjugados (o contrarios) internos** a los ángulos internos que están ubicados en el mismo semiplano respecto a la recta secante. De esta manera, son conjugados internos los pares de ángulos $3–6$ y $4–5$.

En el caso de que dos rectas paralelas $L_1$ y $L_2$ sean intersecadas por una secante $L_3$, se verifica que los ángulos correspondientes son de igual medida, así como los ángulos alternos internos y alternos externos. En resumen, para el caso de rectas paralelas intersecadas por una secante, los ángulos $1–3–5–7$ son de igual medida entre sí, del mismo modo que los ángulos $2–4–6–8$.

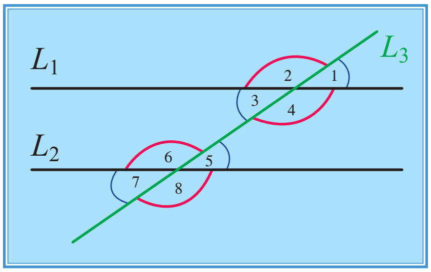


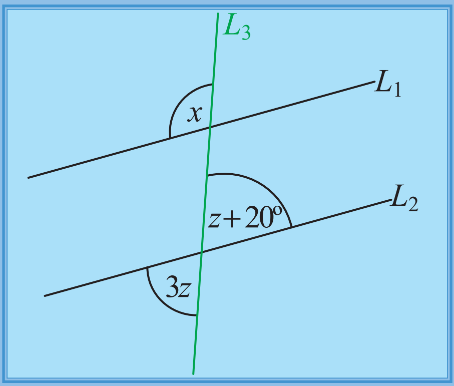

**Figura 7.7: Ángulos en rectas secantes.**

**Propiedades**

- Las medidas de los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces los otros dos ángulos alternos internos también lo son.
- Los ángulos internos a un mismo lado de la recta secante a dos rectas paralelas, son suplementarios.
- Los ángulos externos a un mismo lado de la recta secante a dos rectas paralelas, son suplementarios.
- Toda recta secante a dos rectas paralelas forma ángulos alternos externos congruentes.
- Toda recta secante a dos rectas paralelas forma ángulos alternos internos congruentes.

## **Ejemplo 7.4** Ángulos.

Si las rectas $L_1$ y $L_2$ mostradas en la figura adjunta son paralelas, $x$ y $z$ son las medidas de los ángulos en grados sexagesimales, determine el valor de $x - z$.



Solución:

Como los ángulos de medida $3z$ y $z+20º$ son opuestos por el vértice, tenemos:

$$3z = z + 20º$$
$$2z = 20º$$
$$z = 10º$$

Como los ángulos de medida $x$ y $3z$ son conjugados externos:

$$x + 3z = 180º$$
$$x = 180º - 3z$$
$$x = 180º - 3(10º)$$
$$x = 150º$$

El valor solicitado es:

$$x - z = 150º - 10º = 140º$$

## 7.4 Poligonales y polígonos

### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dados varios puntos no colineales del plano, identificar la poligonal y el polígono que forman.

* Dado un polígono simple, identificar su tipo según el número de lados.

* Dado un polígono regular, explicar sus principales características.

Una **poligonal** es una línea continua que se obtiene por la unión de segmentos de rectas que tienen distinta dirección.

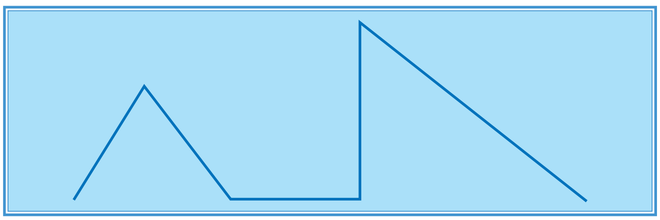


**Figura 7.8: Poligonal.**

El conjunto $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \overline{P_3P_4} \cup ... \cup \overline{P_nP_1}$, de segmentos consecutivos no colineales se denomina **línea poligonal cerrada** de $n$ lados, $(n \geq 3)$. Los puntos $P_1, P_2, ..., P_n$ se denominan **vértices** de la poligonal y los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_nP_1}$, **lados** de la poligonal.

Si los segmentos de la línea poligonal cerrada sólo se intersecan al ser consecutivos (en los vértices), entonces la poligonal divide al plano en dos partes: la una interior abarcada por la poligonal, y la otra exterior a la poligonal.

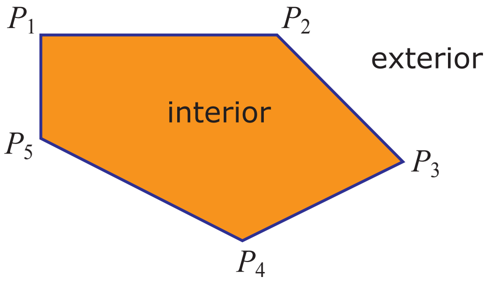



**Figura 7.9: Línea poligonal cerrada.**

**Definición 7.5 (Polígono Simple)**

La unión de toda poligonal con su interior se denomina polígono simple.

Un polígono simple puede ser convexo o no convexo.

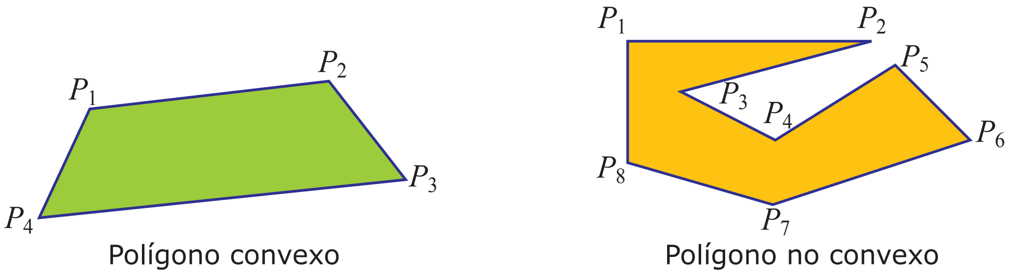



**Figura 7.10: Convexidad de polígonos.**

En el presente texto nos interesa el estudio de los **polígonos simples convexos.** Por ello, cada vez que en lo posterior se utilice el término polígono, se sobreentenderán ambas características. Los elementos fundamentales de los polígonos son: vértices, lados, diagonales, ángulos interiores y exteriores.

Una **diagonal** es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono. En un polígono, las diagonales están en su interior.

De acuerdo con el número de lados, los polígonos reciben diferentes nombres.

| Número de lados | Nombre |
|---|---|
| 3 | Triángulo |
| 4 | Cuadrilátero |
| 5 | Pentágono |
| 6 | Hexágono |
| 7 | Heptágono |
| 8 | Octágono |
| 9 | Enéagono |
| 10 | Decágono |
| 11 | Endecágono |
| 12 | Dodecágono |
| 15 | Pentadecágono |
| 20 | Isodecágono |

**Cuadro 7.1: Nombres de polígonos según número de lados.**

## **Ejemplo 7.5** Polígonos.

Las formas de las señales de tránsito, que son un conjunto de símbolos estandarizados a nivel mundial, constituyen un claro ejemplo del uso de polígonos en la vida diaria.



**Propiedades**

- La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de $n$ lados es igual a $(n-2)(180°)$.

- La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono cualquiera es constante e igual a $360°$.

- El número de diagonales que se pueden trazar desde un mismo vértice de un polígono de $n$ lados es $(n-3)$.

- El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de $n$ lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

## **Ejemplo 7.6** Polígonos.

En un polígono se han trazado un total de $35$ diagonales. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos interiores de ese polígono.

Solución:

Primero debemos calcular el número $n$ de lados del polígono, utilizando la fórmula que lo relaciona con el número $D$ de diagonales: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

En este caso $D = 35$ y por lo tanto, nos queda:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35$$

$$n^2 - 3n = 70$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$(n-10)\,(n+7) = 0$$

Entonces:

$$(n - 10 = 0) \vee (n + 7 = 0)$$

De donde $n = 10$, lo cual quiere decir que se trata de un decágono. No se considera el valor de $n = -7$, porque no es solución geométrica.

Luego, la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono en cuestión es $(10-2)(180º) = (8)(180º) = 1440º$.

**Definición 7.6 (Polígono Regular)**

Un polígono de $n$ lados se dice que es regular, si y sólo si todos sus lados tienen igual longitud y sus ángulos tienen igual medida.

Ejemplos de **polígonos regulares** son el triángulo equilátero y el cuadrado.

**Figura 7.11: Polígonos regulares.**

Es de observarse que todo polígono regular es convexo.

### **Ejemplo 7.7** Polígonos.

Encuentre la razón entre las medidas del ángulo exterior e interior en un dodecágono regular.

Solución:

El ángulo exterior de un dodecágono regular $(12$ lados$)$ mide: $\frac{360^{\text{o}}}{12} = 30^{\text{o}}$ y el ángulo interior, que es el suplemento del ángulo exterior, mide $150^{\text{o}}$.

Luego, la razón requerida es: $\frac{30^{\text{o}}}{150^{\text{o}}} = \frac{1}{5}$.

## **7.5 Triángulos**

### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un triángulo, clasificarlo de acuerdo a la longitud de sus lados y a la medida de sus ángulos.
* Dado un triángulo, identificar sus rectas y puntos notables.

Definición 7.7 (Triángulos)

Un triángulo es un polígono de tres lados. Dados tres puntos no colineales $A$, $B$ y $C$, éstos determinan el triángulo $ABC$.

Las velas de los barcos presentan diferentes formas de triángulos, los mismos que pueden clasificarse según la longitud de sus lados o la medida de sus ángulos.

**Figura 7.12: Velas triangulares de los barcos.**

**Clasificación de triángulos por la longitud de sus lados**

- **Escaleno:** Es un triángulo que no tiene lados congruentes.
- **Isósceles:** Es un triángulo que tiene dos lados congruentes.
- **Equilátero:** Es un triángulo que tiene sus tres lados congruentes.

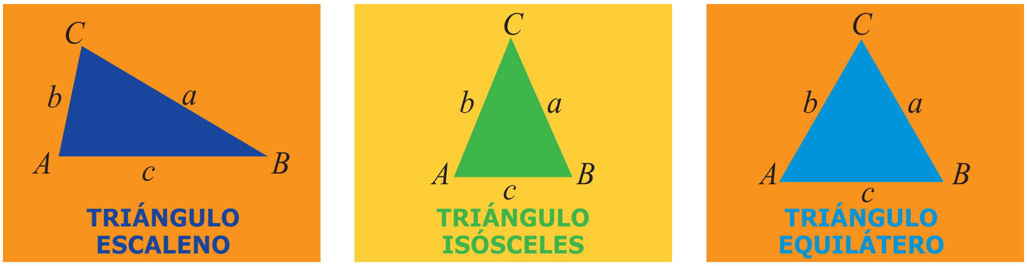



**Figura 7.13: Tipos de triángulos según las longitudes de sus lados.**

**Clasificación de triángulos por la medida de sus ángulos**

- **Equiángulo:** Es un triángulo que tiene sus tres ángulos congruentes.
- **Rectángulo:** Es un triángulo que tiene un ángulo recto.
- **Acutángulo:** Es un triángulo que tiene tres ángulos agudos.
- **Obtusángulo:** Es un triángulo que tiene un ángulo obtuso.

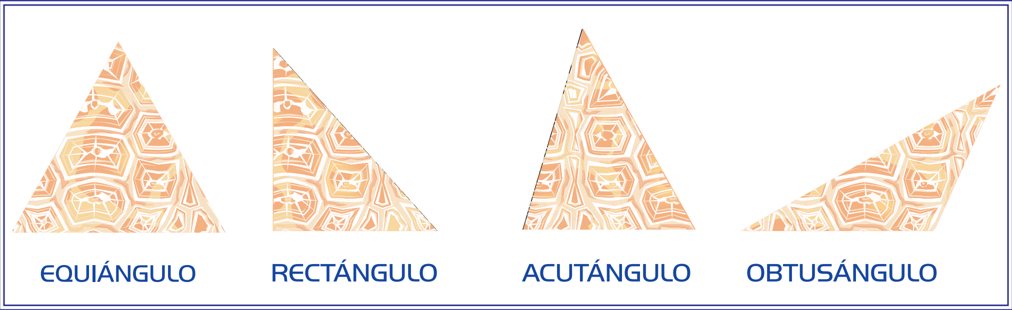


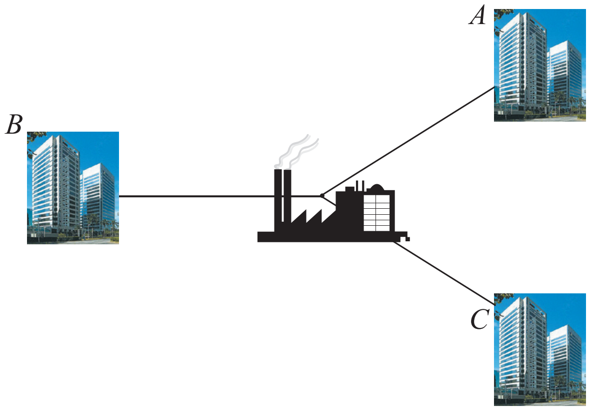

**Figura 7.14: Tipos de triángulos según las medidas de sus ángulos.**

**Propiedades**

- La suma de las medidas de los ángulos interiores en todo triángulo es $180º$.
- La suma de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, es igual a $90º$.
- Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden $60º$.
- En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es la suma de las medidas de los ángulos interiores no contiguos.
- En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
- La suma de las medidas de los ángulos exteriores de cualquier triángulo es igual a la medida de cuatro ángulos rectos $(360º)$.
- Todo triángulo equiángulo es equilátero, y viceversa, todo triángulo equilátero es equiángulo.

**Rectas y puntos notables en el triángulo**

Un fabricante manufactura un producto que se vende en tres ciudades $A$, $B$ y $C$. Se desea construir una fábrica en un punto que equidiste de las tres ciudades. A continuación se describen las rectas y puntos notables de un triángulo con los cuales se pueden resolver problemas como éste, entre otros.



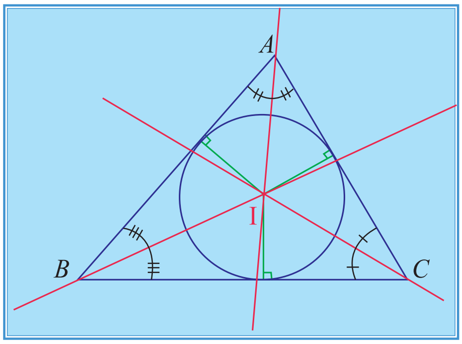




**Figura 7.15: Incentro y bisectrices.**

La **bisectriz** de un ángulo interior es la recta que lo divide en dos ángulos de igual medida. Las tres bisectrices del triángulo se intersecan en un único punto, el cual equidista de los lados del triángulo. Este punto se denomina **incentro**, denotado por $\mathrm{I}$ en la figura, y es el centro de la **circunferencia inscrita** (circunferencia que es tangente a los lados del triángulo) en el triángulo.

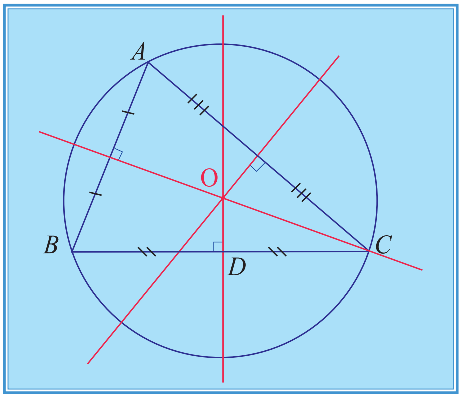



**Figura 7.16: Circuncentro y mediatrices.**

La **mediatriz** de un segmento $\overline{AB}$ es la recta perpendicular que lo divide en dos segmentos de igual longitud. Las tres mediatrices del triángulo se intersecan en un único punto, el cual equidista de los vértices del triángulo. Este punto se denomina **circuncentro**, denotado por $\mathrm{O}$ en la figura, y es el centro de la **circunferencia circunscrita** (circunferencia que contiene los vértices del triángulo) al triángulo.

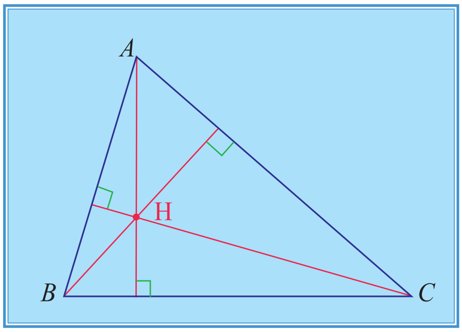



**Figura 7.17: Ortocentro y alturas.**

La **altura** relativa a un lado base del triángulo es un segmento de recta perpendicular al lado base, trazado desde el vértice opuesto a la base o su prolongación. Las tres alturas del triángulo se intersecan en un único punto. Este punto se denomina **ortocentro**, denotado por $\mathrm{H}$ en la figura. El término se deriva de *orto*, *recto*, en referencia al ángulo formado entre las bases y la alturas.

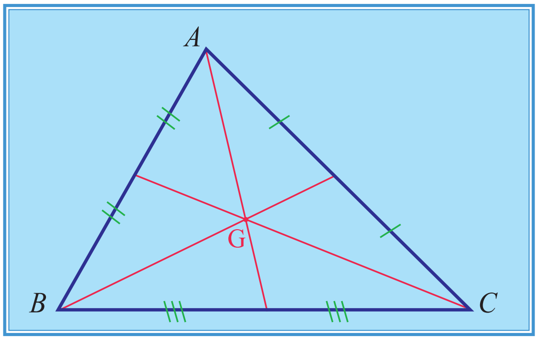



Figura 7.18: Baricentro y medianas.

La **mediana** de un lado del triángulo es el segmento que tiene por extremos el punto medio del lado y el vértice opuesto al mismo. Las tres medianas del triángulo se intersecan en un único punto. Este punto se denomina **baricentro**, denotado por $G$ en la figura. El baricentro coincide con la noción física de **centro de gravedad**, también llamado **centro de masa**.

En un triángulo isósceles, la mediatriz, la altura y la mediana respecto al lado desigual (base del triángulo), coinciden.

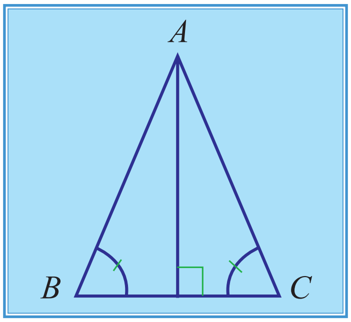



Figura 7.19: Triángulo isósceles.

En un triángulo equilátero, el incentro, el circuncentro, el ortocentro y el baricentro coinciden, y la distancia desde dicho punto $(I, O, H, \text{o}\ G)$ con respecto a los vértices es $\frac{2}{3}$ de la longitud de su altura. En un triángulo rectángulo, el circuncentro está situado en el punto medio de la hipotenusa.

Dependiendo del tipo de triángulo, los puntos $O$ y $H$ pueden localizarse en la región interna o externa del triángulo.

## **Ejemplo 7.8** Altura de un triángulo equilátero.

Demuestre que la longitud de la altura de un triángulo equilátero es igual al producto de la mitad de la longitud del lado por $\sqrt{3}$.

Solución:

Como el triángulo es equilátero, las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos son iguales. Los ángulos $A$, $B$ y $C$ miden $60^{o}$.

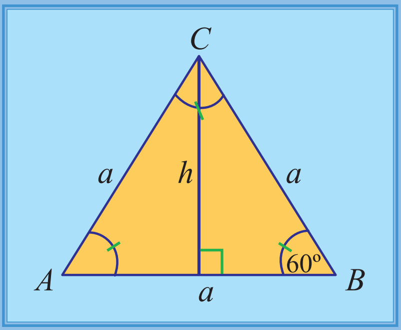
La altura $h$ divide al triángulo en dos triángulos rectángulos, por lo tanto, podemos aplicar funciones trigonométricas.

$$sen\,(B) = \frac{h}{a}$$

$$sen\,(60^o) = \frac{h}{a}$$

$$h = a\,sen\,(60^o)$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$




Lo cual demuestra el enunciado.

## 7.6 Semejanza y Congruencia

### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Aplicar el teorema de Thales, para establecer proporcionalidades entre segmentos.
* Dados dos polígonos, reconocer si son semejantes o congruentes.
* Dados dos triángulos, aplicar los criterios de semejanza y congruencia existentes en la resolución de problemas.

Los diseñadores industriales construyen modelos de proyectos que luego se fabricarán en tamaño natural. El modelo del aeroplano tiene la misma forma que el avión real.

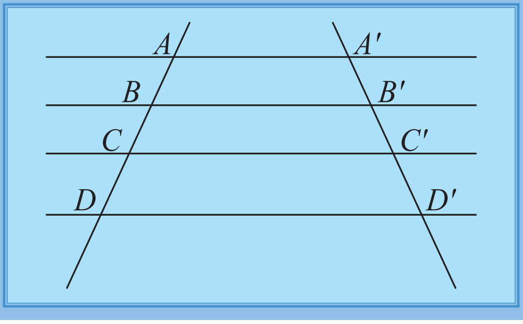
Las figuras que guardan cierta proporcionalidad manteniendo la misma forma, se denominan **semejantes**. Este concepto también se aplica en diseños arquitectónicos. El símbolo de semejanza a utilizar en este texto es $\sim$.

Los automóviles se fabrican utilizando la producción en cadena. Los componentes producidos deben ser de idéntico tamaño y forma, para poderlos emplear en cualquier automóvil de la línea de montaje. Los repuestos también deben ser idénticos.

En geometría, a las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma se les denomina **congruentes**. El símbolo de congruencia a utilizar en este texto es $\cong$.

**Teorema 7.1 (Teorema de Thales)**

Dado un conjunto de al menos tres rectas paralelas, intersecadas por dos transversales, las rectas paralelas determinan en las rectas secantes segmentos correspondientes proporcionales.

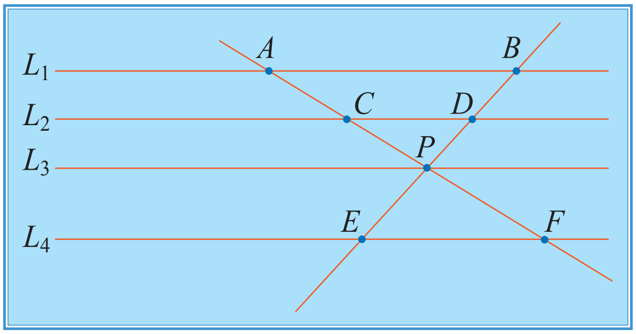



Así, en la figura anterior, las rectas $AA'$, $BB'$, $CC'$ y $DD'$ son paralelas, entonces el teorema de Thales nos dice que las longitudes de los segmentos en uno de los lados son proporcionales a las longitudes de los segmentos correspondientes en el lado opuesto. Matemáticamente, esta relación de proporcionalidad entre las longitudes de los segmentos de recta se expresaría como:

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}}$$

**Corolario del Teorema de Thales**

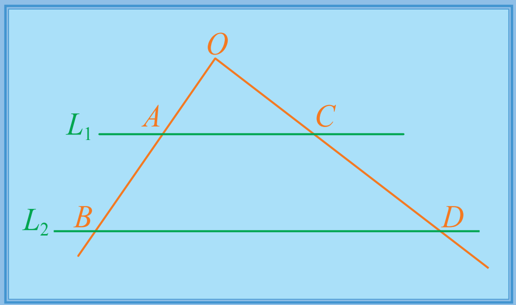
Si los lados de un ángulo o sus prolongaciones se intersecan con un haz de rectas paralelas, los segmentos correspondientes que se determinan en los lados del ángulo son proporcionales.




En la figura, si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$, entonces: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}}$ o bien $\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$

## **Ejemplo 7.9** Aplicación del teorema de Thales.

En el siguiente bosquejo, si $L_1 \parallel L_2$, $\overline{OA} = 2x + 12$, $\overline{AB} = 4x$, $\overline{OC} = 5x + 8$, $\overline{CD} = 4x + 1$, determine el valor de $x$ y las longitudes de dichos segmentos.




Solución:

Si se traza una recta por el punto $O$ paralela a $L_1$ y $L_2$ , se puede aplicar el corolario del teorema de Thales y se tiene la proporción:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{2x + 12}{5x + 8} = \frac{4x}{4x + 1}$$

$$(2x + 12)(4x + 1) = 4x\,(5x + 8)$$

$$8x^2 + 50x + 12 = 20x^2 + 32x$$

$$12x^2 - 18x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$.

El segundo valor debe descartarse pues conduce a valores negativos para las longitudes de los segmentos.

Luego, nos queda $x = 2$, que sí es válido como medida.

De esta manera las longitudes de los segmentos son: $\overline{OA} = 16u$, $\overline{AB} = 8u$, $\overline{OC} = 18u$ y $\overline{CD} = 9u$, donde $u$ representa unidades.

## Semejanza y congruencia de Polígonos

Como ya se mencionó anteriormente, el término semejanza induce a **similitud en forma** de dos objetos y el término congruencia induce a **igualdad** de dos objetos. Para expresar e identificar con propiedad estas características que pueden tener dos polígonos, se emplean las siguientes definiciones.

**Definición 7.8 (Polígonos semejantes)**

Sean $P_1, P_2, \dots, P_n$ los vértices de un polígono de $n$ lados y $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ los vértices de otro polígono, también de $n$ lados. Los dos polígonos se denominan semejantes, si y sólo si existe una función biyectiva definida entre los vértices del primer polígono, con imágenes en los vértices del segundo, construida de tal manera que a $P_1$ le corresponde $Q_1$, a $P_2$, $Q_2$ y así sucesivamente; y además, se cumple que:

1) $\dfrac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{Q_1 Q_2}} = \dfrac{\overline{P_2 P_3}}{\overline{Q_2 Q_3}} = \cdots = \dfrac{\overline{P_n P_1}}{\overline{Q_n Q_1}} = k,\ k \in \mathbb{R}^+$

2) $[m(\measuredangle P_1) = m(\measuredangle Q_1)] \wedge [m(\measuredangle P_2) = m(\measuredangle Q_2)] \wedge \dots \wedge [m(\measuredangle P_n) = m(\measuredangle Q_n)]$

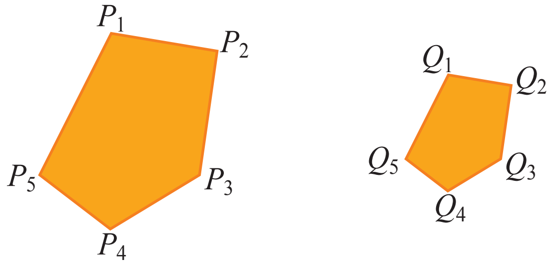



**Figura 7.20: Polígonos semejantes.**

**Definición 7.9 (Polígonos congruentes)**

Sean $P_1, P_2, \dots, P_n$ los vértices de un polígono de $n$ lados y $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ los vértices de otro polígono, también de $n$ lados. Los dos polígonos se denominan congruentes, si y sólo si existe una función biyectiva definida entre los vértices del primer polígono, con imágenes en los vértices del segundo, construida de tal manera que, a $P_1$ le corresponde $Q_1$, a $P_2$, $Q_2$ y así sucesivamente, y además la longitud del segmento $\overline{P_1 P_2}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{Q_1 Q_2}$, etc.; y, las medidas de $\measuredangle P_1, \measuredangle P_2, \dots, \measuredangle P_n$ son iguales a las medidas de $\measuredangle Q_1, \measuredangle Q_2, \dots, \measuredangle Q_n$, respectivamente.

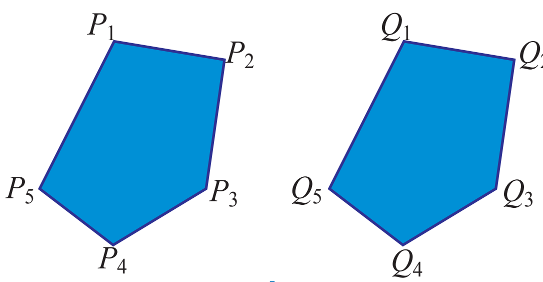



**Figura 7.21: Polígonos congruentes.**

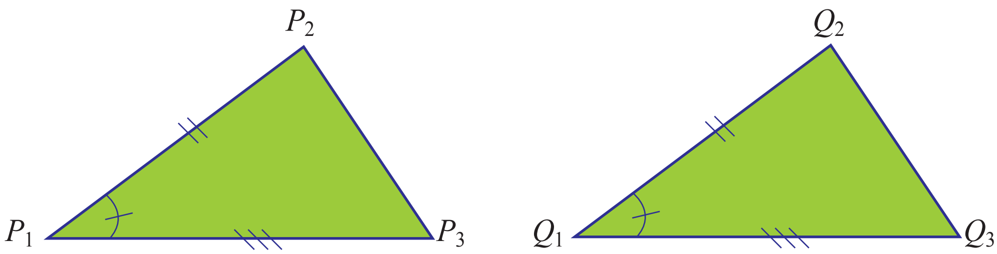
Obsérvese que el concepto de semejanza es más extenso que el de congruencia. Dos polígonos semejantes para los cuales $k = 1$, son congruentes.

Los polígonos más elementales son los triángulos, por lo cual a continuación daremos criterios para determinar la congruencia y semejanza de triángulos.

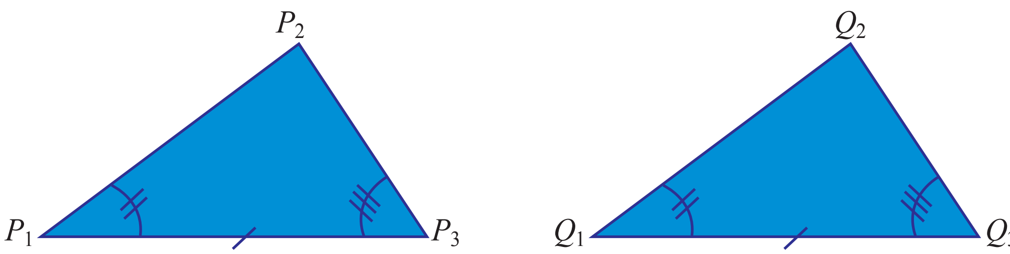
## Congruencia y semejanza de Triángulos

En la práctica, es muy útil poder determinar con rapidez la **congruencia** de triángulos. Para ello existen los siguientes criterios:

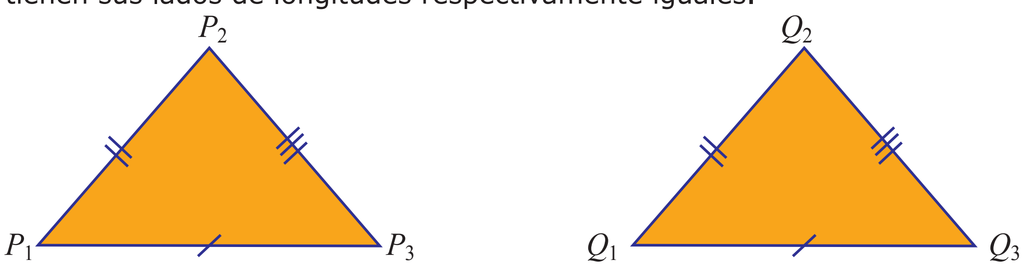
**Criterio LAL (LADO-ÁNGULO-LADO):** Dos triángulos son congruentes si tienen un ángulo de igual medida, formado por lados de longitudes iguales.




**Criterio ALA (ÁNGULO-LADO-ÁNGULO):** Dos triángulos son congruentes si tienen un lado de igual longitud y los ángulos adyacentes a ese lado son correspondientemente de igual medida.

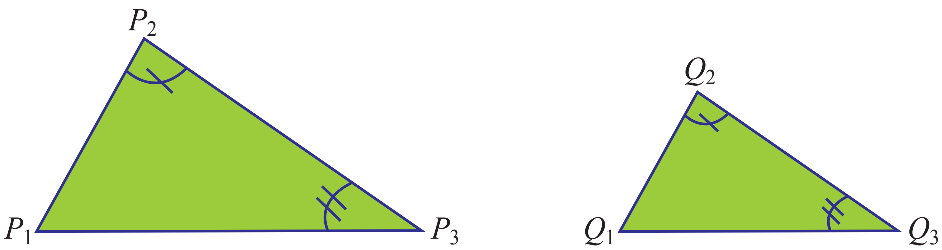



**Criterio LLL (LADO-LADO-LADO):** Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados de longitudes respectivamente iguales.

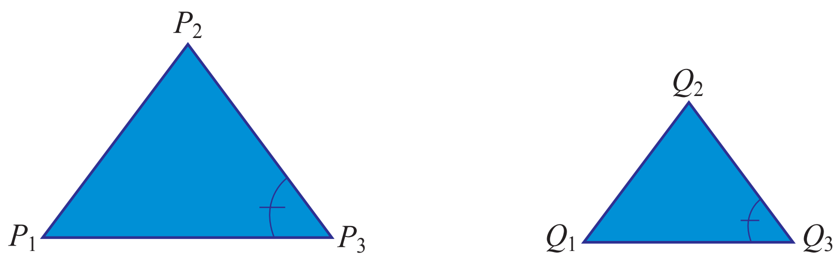



Para determinar la **semejanza** de triángulos, se puede emplear alguno de los siguientes criterios:

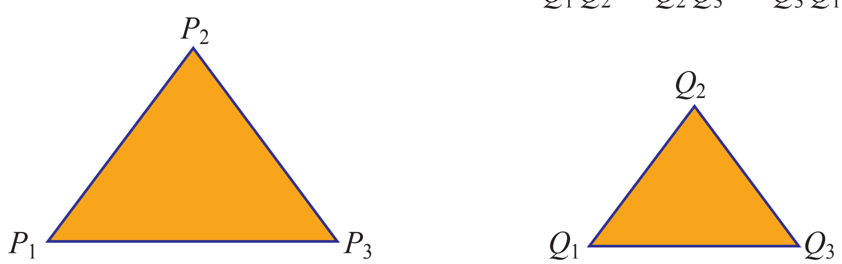
**Criterio AA (ÁNGULO-ÁNGULO):** Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente de igual medida.




**Criterio ALL (ÁNGULO-LADO-LADO):** Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo con igual medida y las longitudes de los lados de ese ángulo son proporcionales; esto es, $\dfrac{\overline{P_1P_3}}{\overline{Q_1Q_3}} = \dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{Q_2Q_3}} = k$; y, además $m(\measuredangle P_3) = m(\measuredangle Q_3)$.




**Criterio LLL (LADO-LADO-LADO):** Dos triángulos son semejantes si las longitudes de sus tres lados son proporcionales: $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{Q_1Q_2}} = \dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{Q_2Q_3}} = \dfrac{\overline{P_3P_1}}{\overline{Q_3Q_1}} = k$.



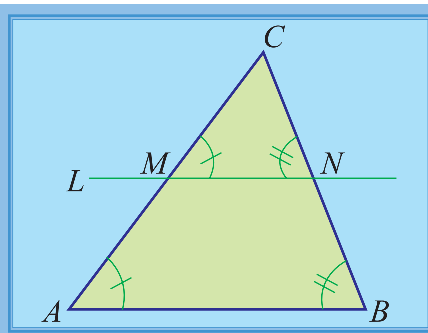

## **Ejemplo 7.10** Semejanza de triángulos.

Demostrar que una recta paralela a un lado de un triángulo que interseca los otros dos, determina en estos últimos, segmentos proporcionales.

Solución:

*Hipótesis:* $\Delta ABC$ cualquiera, $L \parallel \overline{AB}$, $M$ y $N$ puntos de intersección de la recta $L$ con los lados del triángulo.

Tesis: $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

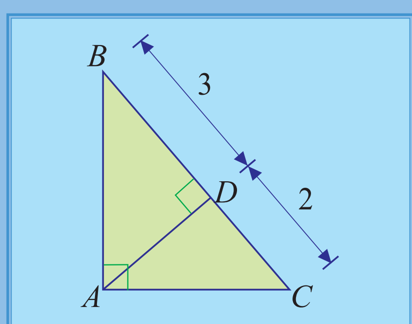



Solución:

| | |
|---|---|
| $\measuredangle NMC \cong \measuredangle BAC$ | Ángulos correspondientes en rectas paralelas intersecadas por una transversal. |
| $\measuredangle CNM \cong \measuredangle CBA$ | Ángulos correspondientes en rectas paralelas intersecadas por una transversal. |
| $\therefore \Delta CBA \sim \Delta CNM$ | Criterio $AA$ de semejanza de triángulos. |
| $\Rightarrow \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CN}}$ | Lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales. |
| $\Rightarrow \dfrac{\overline{CA} - \overline{CM}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{CB} - \overline{CN}}{\overline{CN}}$ | Propiedades de las proporciones. |
| $\Rightarrow \dfrac{\overline{MA}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{CN}}$ | Ver figura. |
| $\Rightarrow \dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ | Invirtiendo razones. |

## **Ejemplo 7.11** Semejanza de triángulos.

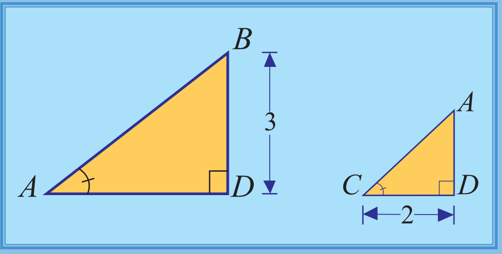
De acuerdo a la figura siguiente, donde $\overline{BD} = 3cm$ y $\overline{CD} = 2cm$, determine la longitud del segmento $\overline{AD}$.



Solución:

De acuerdo al criterio $AA$, los triángulos $ABD$ y $CAD$ son semejantes ya que se cumple que:

$$m(\measuredangle BDA) = m(\measuredangle ADC) = 90^{\circ}$$
$$m(\measuredangle ABD) = m(\measuredangle CAD)$$
$$m(\measuredangle DAB) = m(\measuredangle DCA)$$



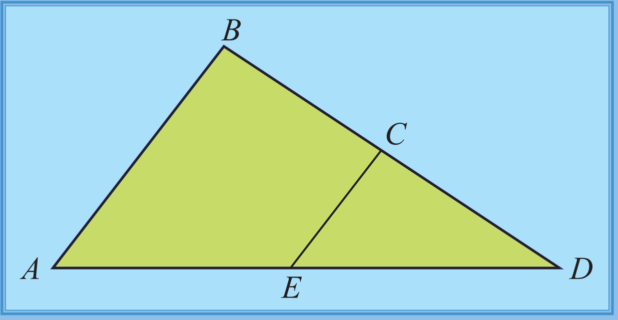

Se puede establecer proporcionalidad entre las longitudes de los lados:

$$\frac{3}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{2}$$

y despejando, tenemos que $\overline{AD}^2 = 6$. Por lo tanto, $\overline{AD} = \sqrt{6}\ cm$.

## **Ejemplo 7.12** Semejanza de triángulos.

Si en la figura adjunta $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$, $\overline{BC} = 2u$, $\overline{CD} = 3u$ y $\overline{AD} = 6u$, determine el valor de $\overline{AE}$.




Solución:

Los triángulos $ABD$ y $ECD$ son semejantes, por lo tanto se cumple que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{ED}}.$$

Es decir:

$$\frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD} - \overline{AE}}.$$

Reemplazando valores, se obtiene:

$$\frac{2+3}{6} = \frac{3}{6-\overline{AE}}$$

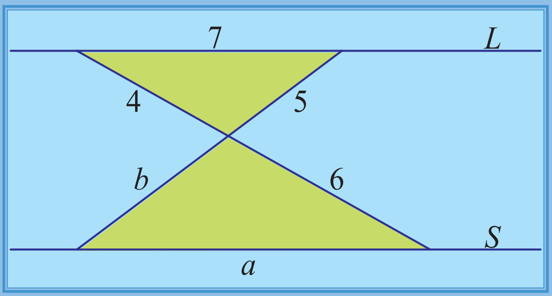
$$30 - 5\,\overline{AE} = 18$$

$$5\,\overline{AE} = 12$$

$$\overline{AE} = \frac{12}{5}\,u$$

## **Ejemplo 7.13** Semejanza de triángulos.

Si en la figura adjunta las rectas $L$ y $S$ son paralelas, determine las longitudes de los lados $a$ y $b$ mostrados:




Solución:

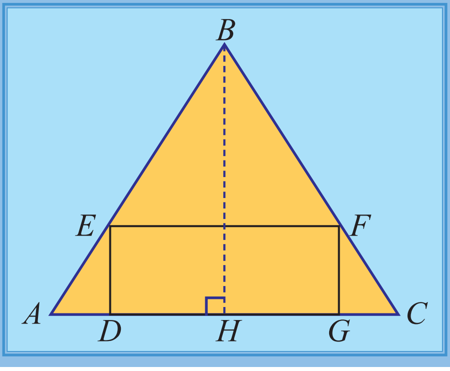
Puesto que los dos triángulos son semejantes, aplicando el teorema de Thales, tenemos:

$$\left(\frac{a}{7} = \frac{6}{4}\right) \Leftrightarrow a = \frac{21}{2}\,u$$

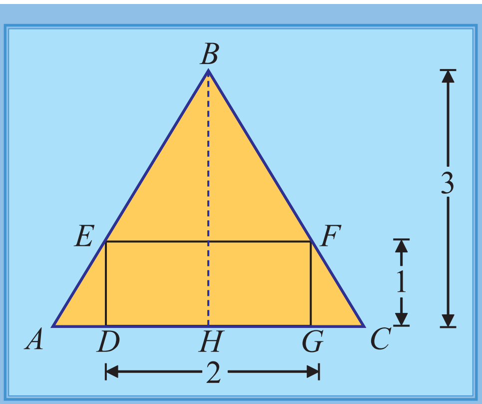
$$\left(\frac{b}{5} = \frac{6}{4}\right) \Leftrightarrow b = \frac{15}{2}\,u$$

## **Ejemplo 7.14** Semejanza de triángulos.

Dado el rectángulo $DEFG$, inscrito en el triángulo isósceles $ABC$, con $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{DE} = 1u$, $\overline{GD} = 2u$ y $\overline{BH} = 3u$, determine la longitud del segmento $\overline{AD}$.



Solución:




Se puede notar que $\overline{DH} = 1u$ y los triángulos $AHB$ y $ADE$ son semejantes.

Aplicando proporcionalidad entre las longitudes de sus lados:

$$\frac{\overline{AD}+\overline{DH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{ED}}$$

$$\frac{\overline{AD}+1}{\overline{AD}} = \frac{3}{1}$$

$$\overline{AD}+1 = 3\overline{AD}$$

$$2\,\overline{AD} = 1$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}u$$

## 7.7 Resolución de triángulos

### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un triángulo rectángulo, determinar la medida de alguno de sus elementos empleando relaciones trigonométricas.
* Dado un triángulo rectángulo, determinar la medida de alguno de sus lados empleando el teorema de Pitágoras.
* Dado un triángulo no rectángulo, resolverlo empleando la Ley de los Senos o la Ley de los Cosenos.
* Dado un problema real asociado a triángulos, plantear y resolver el problema analíticamente, interpretando la solución dentro del contexto del problema.

En esta sección nos proponemos resolver un triángulo, lo cual significa encontrar las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos que faltaren conocer en el triángulo. Para cumplir con este objetivo, es necesario conocer los siguientes teoremas:

**Teorema 7.2 (Teorema de Pitágoras)**

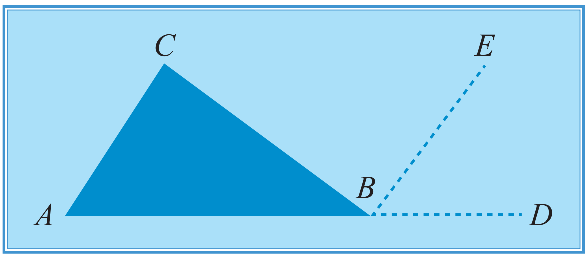
En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

**Teorema 7.3**

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $180^o$.

**Demostración**

Sea el triángulo arbitrario $ABC$.




Prolonguemos el lado $AB$ y tracemos por $B$ una recta paralela al lado $AC$. Se cumple que:

$$m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle DBE)$$
$$m(\measuredangle ACB) = m(\measuredangle EBC)$$

Por otra parte:

$$m(\measuredangle CBA) + m(\measuredangle EBC) + m(\measuredangle DBE) = 180^o$$

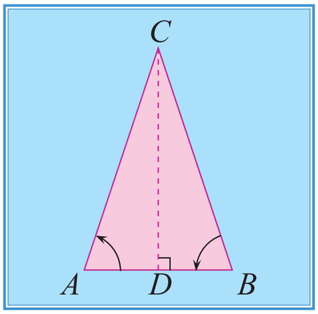
Esto es:

$$\boxed{m(\measuredangle CBA) + m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle BAC) = 180^o}$$

**Teorema 7.4**

En todo triángulo, a lados de longitudes iguales se oponen ángulos de medidas iguales.

**Demostración**




Construyamos $CD$, de manera tal que:

$$m(\measuredangle ACD) = m(\measuredangle DCB)$$

Los triángulos $ACD$ y $DCB$ son congruentes porque tienen un ángulo de igual medida formado por lados correspondientemente iguales. Por tanto,

$$\boxed{m(\measuredangle DAC) = m(\measuredangle CBD)}$$

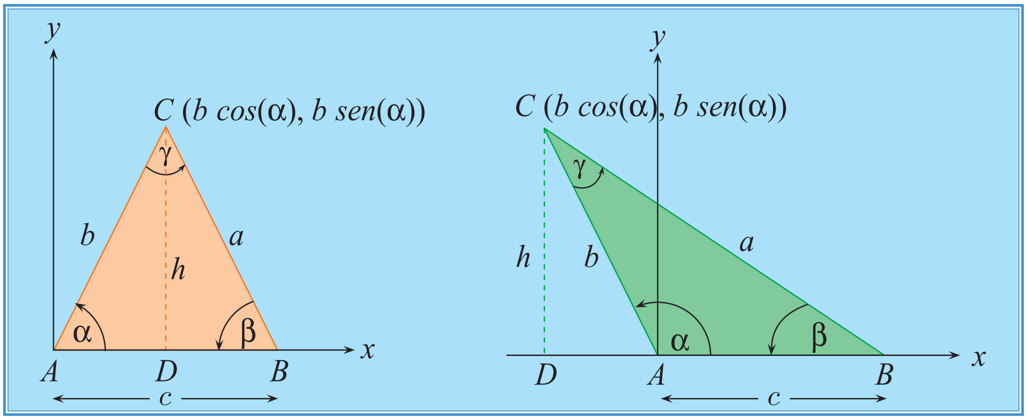
**Teorema 7.5 (Ley de los Senos)**

Para un triángulo cuyas longitudes de sus lados son: $a$, $b$, $c$ y tienen ángulos opuestos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, respectivamente, se cumple que:

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}$$

**Demostración**

Trácese un triángulo, de modo que uno de los vértices, por ejemplo $A$, coincida con el origen del plano cartesiano. En la figura se muestra un caso en que $\alpha$ es un ángulo agudo ($\alpha < 90º$) y otro en el que $\alpha > 90º$.



En cualquiera de las figuras anteriores las coordenadas del punto $C$ son $(b\,cos(\alpha), b\,sen(\alpha))$. La altura $h$ del triángulo es igual a la ordenada del punto $C$, o sea:

$$h = b\,sen(\alpha)$$

Pero en el triángulo rectángulo $BDC$:

$$h = a\,sen(\beta)$$

entonces, igualando las dos expresiones anteriores:

$$b\,sen(\alpha) = a\,sen(\beta)$$

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$$

Idénticamente:

$$\frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

Las igualdades anteriores se pueden condensar como:

$$\boxed{\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}} \equiv \boxed{\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c}}$$

**Teorema 7.6 (Ley de los Cosenos)**

En todo triángulo el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros lados, menos el doble producto de estas longitudes por el coseno del ángulo que forman.

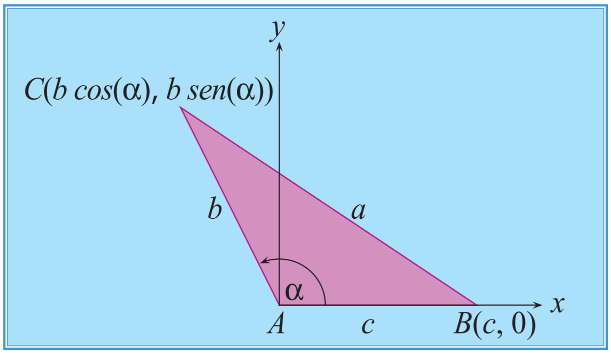
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\gamma)$$

**Demostración**

Sea $\Delta\,ABC$ un triángulo, como la figura siguiente:



Las coordenadas del vértice $C$ son $(b\ cos\ (\alpha), b\ sen\ (\alpha))$ .

De la fórmula de la distancia entre dos puntos (véase capítulo 10, sección 10.1):

$$a^2 = (b\ cos\ (\alpha) - c)^2 + (b\ sen\ (\alpha) - 0)^2$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando:

$$a^2 = b^2\ (cos^2\ (\alpha) + sen^2\ (\alpha)) - 2\ bc\ cos\ (\alpha) + c^2$$

Pero:

$$cos^2\ (\alpha) + sen^2\ (\alpha) = 1$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ (\alpha)}$$

De la misma forma se pueden deducir las expresiones:

$$\boxed{\begin{array}{l} b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac\ cos\ (\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab\ cos\ (\gamma) \end{array}}$$

las cuales expresan la Ley de los Cosenos.

Las tres relaciones que se acaban de deducir, son útiles para hallar las medidas de los ángulos internos de un triángulo conociendo las longitudes de sus lados.

## 7.7.1 Triángulos Rectángulos

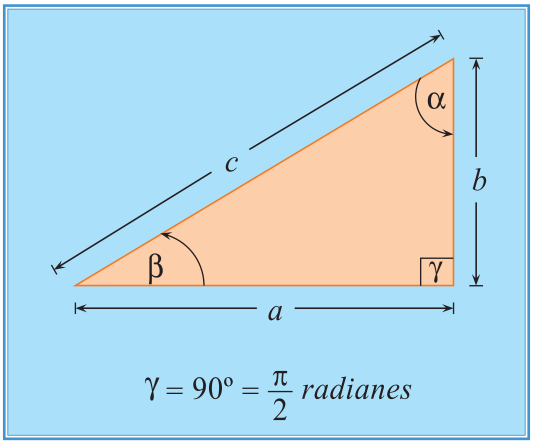



**Figura 7.22: Triángulo Rectángulo.**

Para resolver triángulos rectángulos es suficiente conocer la medida de un ángulo agudo y la longitud de un cateto, o bien la longitud de un cateto y la longitud de la hipotenusa, o la longitud de sus catetos. Luego aplicamos los teoremas mencionados según corresponda, así como las funciones trigonométricas estudiadas en el capítulo 4.

Dado que uno de los ángulos internos de un triángulo rectángulo mide $90^o$ y de acuerdo al Teorema 7.3, los otros dos ángulos son complementarios.

Así mismo, si $\alpha$ y $\beta$ son las medidas de los ángulos complementarios de un triángulo rectángulo, se verifica lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} sen\ (\alpha) & = & cos\ (\beta) \\ cos\ (\alpha) & = & sen\ (\beta) \\ tan\ (\alpha) & = & cot\ (\beta) \\ cot\ (\alpha) & = & tan\ (\beta) \\ sec\ (\alpha) & = & csc\ (\beta) \\ csc\ (\alpha) & = & sec\ (\beta) \end{array}$$

En ciertas aplicaciones, se utilizan los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión, los cuales se definen a continuación.

**Definición 7.10 (Ángulo de elevación y ángulo de depresión).**

Si una persona está mirando hacia arriba un objeto, el ángulo agudo medido desde la horizontal a la línea de visión del objeto se denomina ángulo de elevación. Por otro lado, si la persona está mirando hacia abajo un objeto, el ángulo agudo medido desde la línea de observación del objeto y la horizontal, se denomina ángulo de depresión.

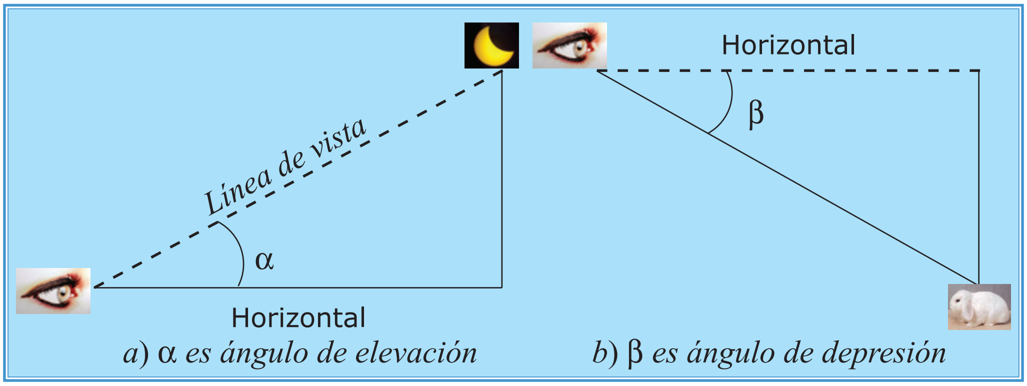



**Figura 7.23: Ángulos de elevación y depresión.**

## **Ejemplo 7.15** Resolución de Triángulos Rectángulos.

De la figura 7.22, se conoce que $a = 3cm$ y $m(\beta) = 15^o$, resuelva el triángulo.

Solución:

Aplicando el teorema 7.3:

$$\begin{aligned}\alpha &= 180º - \gamma - \beta\\ &= 180º - 90º - 15º\\ \alpha &= 75º\end{aligned}$$

Aplicando funciones trigonométricas:

$$cos\ (\beta) = \frac{a}{c}$$

$$cos(15º) = \frac{3}{c}$$

Para encontrar el valor del $cos\ (15º)$, utilizamos la identidad del coseno de la diferencia de ángulos.

$$\begin{aligned}cos(15º) &= cos(45º - 30º)\\ &= cos(45º)\ cos(30º) + sen(45º)\ sen(30º)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\\ cos(15º) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

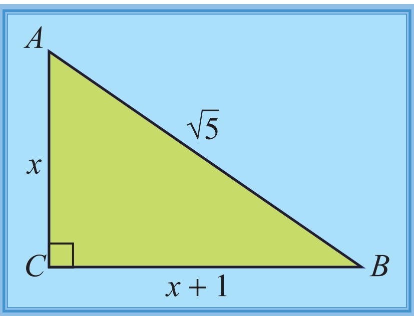
Por lo tanto, $c = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}b &= \sqrt{c^2 - a^2}\\ &= \sqrt{[3(\sqrt{6} - \sqrt{2})]^2 - 3^2}\\ &= \sqrt{9(6 - 4\sqrt{3} + 2) - 9}\\ b &= 3\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\ cm.\end{aligned}$$

## **Ejemplo 7.16** Resolución de Triángulos Rectángulos.

En la figura mostrada, el triángulo $ABC$ es rectángulo, el segmento $\overline{AB} = \sqrt{5}$ unidades y los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ miden $x$ y $(x + 1)$ unidades, respectivamente. Determine el valor de $x$.




Solución:

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 + (x + 1)^2 = (\sqrt{5})^2$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 5 = 0$

$2x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

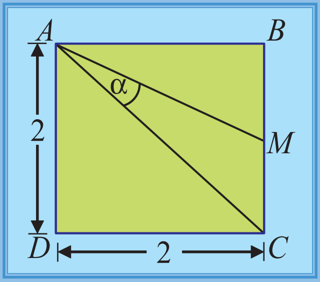
$(x + 2 = 0) \vee (x - 1 = 0)$

$(x = -2) \vee (x = 1)$

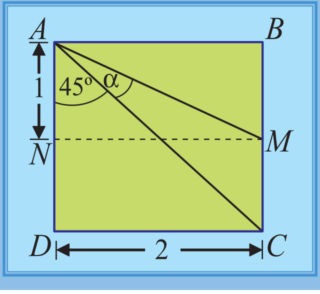
Se descarta el valor de $x = -2$, porque no es una solución geométrica. Luego, el valor de $x$ es de $1$ unidad.

## **Ejemplo 7.17** Resolución de Triángulos Rectángulos.

Si $M$ es el punto medio de $\overline{BC}$ en el cuadrado $ABCD$ mostrado en la figura, determine el valor de $tan(\alpha)$.




Solución:



En la figura, sea $N$ el punto medio de $\overline{AD}$, respecto del triángulo rectángulo $MNA$, se cumple:

$$tan(45^o + \alpha) = \frac{\overline{MN}}{\overline{AN}} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{tan(45^o) + tan(\alpha)}{1 - tan(45^o)\ tan(\alpha)} = 2$$

$$\frac{1 + tan(\alpha)}{1 - tan(\alpha)} = 2$$

$$1 + tan(\alpha) = 2 - 2\ tan(\alpha)$$

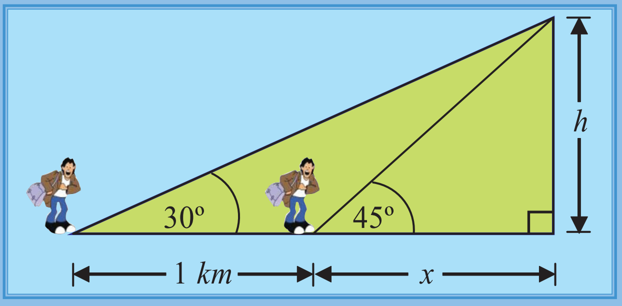
$$3tan(\alpha) = 1$$

$$\therefore\ tan(\alpha) = \frac{1}{3}$$

## **Ejemplo 7.18** Resolución de Triángulos Rectángulos.

Un observador se encuentra a una determinada distancia medida desde la base de una colina; en ese instante él determina un ángulo de elevación de $30^o$ con respecto a la cima de la colina. Si camina $1\ km$. acercándose a la colina, el observador determina que el ángulo ahora es de $45^o$. ¿Cuál es la altura de la colina?

Solución:




Se puede observar que $h = x$.

$$\begin{aligned}
tan(30^{\circ}) &= \frac{h}{h+1}\\
\frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{h}{h+1}\\
h+1 &= \sqrt{3}h\\
h-\sqrt{3}h &= -1\\
h\left(\sqrt{3}-1\right) &= 1\\
h &= \frac{1}{\sqrt{3}-1}\\
h &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)\\
h &= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}\\
h &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}
\end{aligned}$$

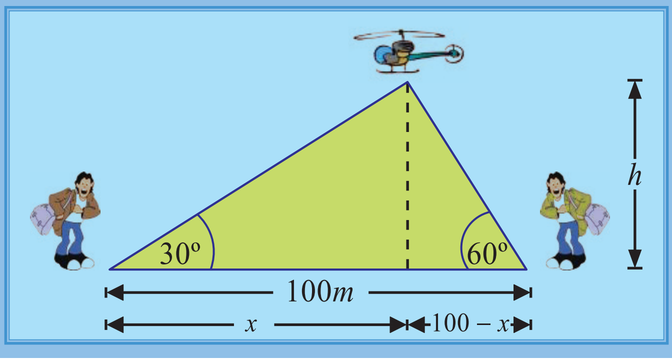
La altura de la colina es $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) km$.

## **Ejemplo 7.19** Resolución de Triángulos Rectángulos.

De manera simultánea, dos observadores miden el ángulo de elevación de un helicóptero. Un ángulo mide $30^{\circ}$ y el otro $60^{\circ}$. Si los observadores están separados una distancia de $100$ metros y el helicóptero está sobre la línea que los une, encuentre la altura $h$ a la cual se encuentra el helicóptero.

Solución:

Se puede hacer una interpretación gráfica del problema.



$$\begin{aligned}
tan(30^o) &= \frac{h}{x}\\
\frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{h}{x}\\
x &= \sqrt{3}h \qquad\qquad (a)\\
tan(60^o) &= \frac{h}{100-x}\\
\sqrt{3} &= \frac{h}{100-x}\\
x &= \frac{100\sqrt{3}-h}{\sqrt{3}} \qquad (b)
\end{aligned}$$

Igualando las expresiones $(a)$ y $(b)$:

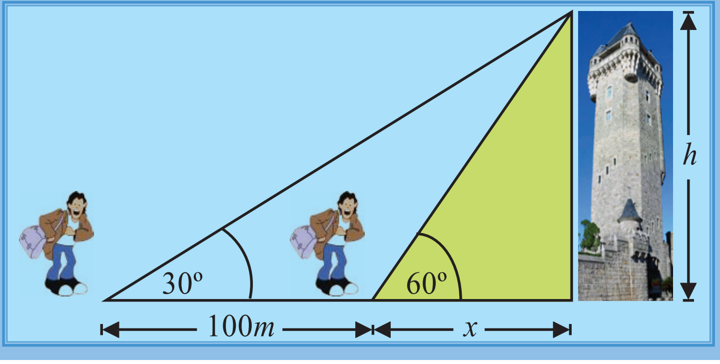
$$\begin{aligned}
\sqrt{3}h &= \frac{100\sqrt{3}-h}{\sqrt{3}}\\
h &= 25\sqrt{3}m.
\end{aligned}$$

## **Ejemplo 7.20** Resolución de Triángulos Rectángulos.

El ángulo de elevación de la parte superior de una torre mide $30^o$. Acercándose $100$ metros se encuentra que el ángulo de elevación es de $60^o$, determine la altura de la torre.

Solución:

Se puede hacer una interpretación gráfica del problema.



$$tan(30^o) = \frac{h}{100 + x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{100 + x}$$

$$x = \sqrt{3}h - 100 \qquad (a)$$

$$tan(60^o) = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}h \qquad (b)$$

Igualando las expresiones $(a)$ y $(b)$:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}h = \sqrt{3}h - 100$$

$$h = 50\sqrt{3}\ m$$

### 7.7.2 Triángulos Acutángulos u Obtusángulos

Cuando se requieren resolver este tipo de triángulos es conveniente aplicar la Ley de los Senos o la Ley de los Cosenos.

La Ley de los Senos no es directamente aplicable cuando se conocen únicamente las longitudes de los tres lados de un triángulo, ni tampoco cuando se conocen las longitudes de dos de sus lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos; en estos casos, se debe utilizar la Ley de los Cosenos.

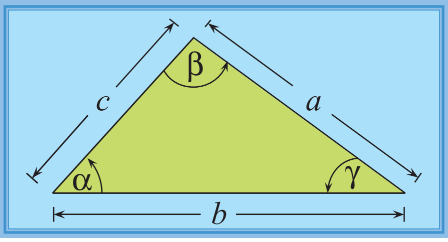
**Ejemplo 7.21** Resolución de Triángulos no Rectángulos.

Resolver el triángulo, si se conoce que:

$$\alpha = 45°,\ \beta = 105°,\ c = 2.$$

Solución:

Haciendo un gráfico del triángulo, tenemos:




$$\gamma = 180^o - \alpha - \beta$$
$$= 180^o - 45^o - 105^o$$
$$\gamma = 30^o$$

Aplicando la Ley de los Senos:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

$$a = \frac{c\ sen(\alpha)}{sen(\gamma)}$$

$$= \frac{2(sen(45º))}{sen(30º)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$a = 2\sqrt{2}m$$

Aplicando la Ley de los Cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos(\beta)$$

$$= (2\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(2\sqrt{2})(2)\ cos(105º)$$

$$= 8 + 4 - 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$$

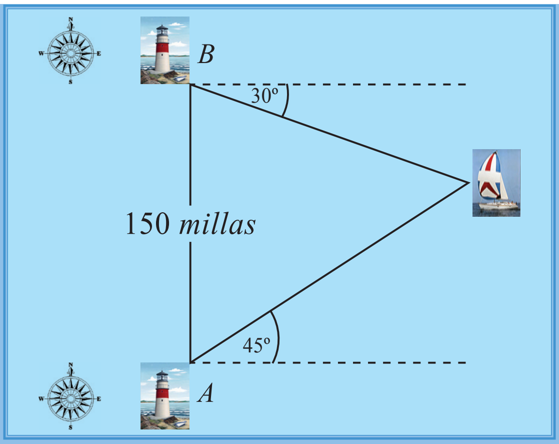
$$= 12 - 2\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

$$= 12 - 4 + 4\sqrt{3}$$

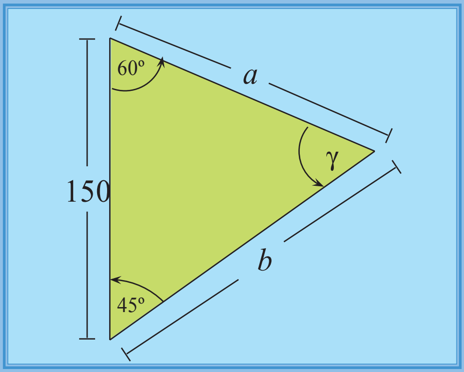
$$b = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}\ m.$$

**Ejemplo 7.22** Resolución de Triángulos no Rectángulos.

La estación $A$ de los guardacostas se encuentra directamente a $150$ millas al sur de la estación $B$. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio, la cual es recibida por ambas estaciones. La llamada a la estación $A$ indica que la posición del barco es $45º$ al noreste; la llamada a la estación $B$ indica que la posición del barco es $30º$ al sureste, tal como se muestra en la figura. ¿A qué distancia del barco se encuentra cada estación?




Solución:
Considerando el triángulo que se forma:




Aplicando la Ley de los Senos:

$$\frac{a}{sen(45º)} = \frac{150}{sen(180º - 45º - 60º)}$$

$$a = \frac{150\ sen(45º)}{sen(75º)}$$

$$= \frac{150\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)$$

$$a = 150\ (\sqrt{3} - 1) millas$$

Aplicando nuevamente la Ley de los Senos:

$$\frac{b}{sen(60º)} = \frac{a}{sen(45º)}$$

$$b = \frac{a\ sen(60º)}{sen(45º)}$$

$$= \frac{150(\sqrt{3}-1)\ \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$b = 75(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

La estación $A$ se encuentra a $75(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$ millas del barco y la estación $B$ se encuentra a $150(\sqrt{3} - 1)$ millas del barco.

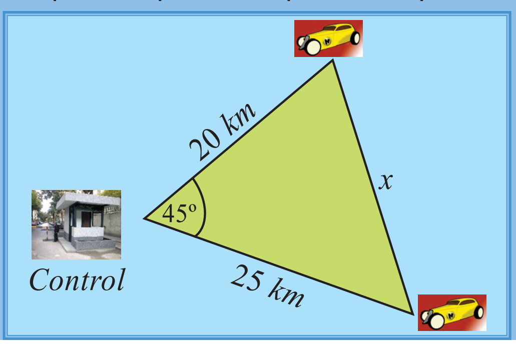
## **Ejemplo 7.23** Resolución de Triángulos no Rectángulos.

Dos autos parten de un control a dos ciudades diferentes. Las carreteras de estas ciudades son rectas y sus direcciones forman un ángulo de $45º$. Al cabo de $15$ minutos, los autos han recorrido una distancia de $25\ km$ y $20\ km$ respectivamente. Determine la distancia que los separa, en ese instante de tiempo.

Solución:

En la gráfica adjunta se observa que los trayectos recorridos por los dos autos forman un triángulo no rectángulo.

Con los datos que se dispone se puede emplear la Ley de los Cosenos, así:



$$x^2 = 25^2 + 20^2 - 2(25)(20)\,cos(45^o)$$

$$= 625 + 400 - 1000\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x^2 = 1025 - 500\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{1025 - 500\sqrt{2}}\ km$$

Se toma la respuesta positiva porque este valor representa una distancia en la realidad.

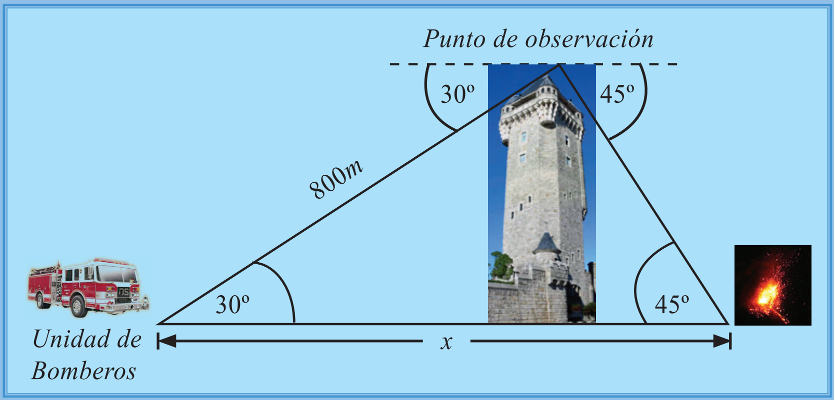
## **Ejemplo 7.24** Resolución de Triángulos no Rectángulos.

Desde una torre de control se observa un incendio con un ángulo de depresión de $45^o$. Sobre la horizontal que une la base de la torre con el lugar del incendio se observa la unidad de bomberos a un ángulo de depresión de $30^o$. Se conoce que la distancia desde el punto de observación de la torre hasta esta unidad es de $800\ m$. Determine qué distancia deben recorrer los bomberos hasta llegar al sitio del incendio.

Solución:

En la gráfica adjunta se observa que el punto de observación de la torre, el sitio del incendio y la unidad de bomberos forman un triángulo con ángulos de $30^o$, $45^o$ y el lado opuesto a este ángulo tiene una longitud de $800\ m$.

Con los datos que se dispone y el Teorema 7.5, se puede emplear la Ley de los Senos, así:




$$\frac{800}{sen(45^o)} = \frac{x}{sen(180^o - 45^o - 30^o)}$$

$$x = \frac{800\ sen(105^o)}{sen(45^o)}$$

De la sección 7.7, se sabe que:

$$\begin{aligned} sen(105º) &= sen(75º) \\ sen(105º) &= sen(30º + 45º) \\ &= sen(30º)\,cos(45º) + cos(30º)\,sen(45º) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ sen(105º) &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene que:

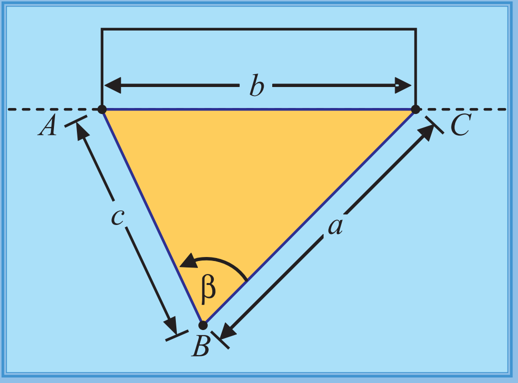
$$x = 800\,\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})\,\sqrt{2} = 400\,(1 + \sqrt{3})\ m.$$

Por lo que los bomberos deberán recorrer una distancia mayor a $1\ km$ para llegar al sitio del incendio.

## **Ejemplo 7.25** Resolución de Triángulos no Rectángulos.

En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto $B$ situado a $5\ m$ y $8\ m$ de los postes $A$ y $C$ respectivamente, de una portería cuyo ancho tiene longitud $7\ m$. Determine la medida del ángulo con vértice en $B$, sustentado por los segmentos $BA$ y $BC$.

Solución:




Aplicando la Ley de los Cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(\beta)$$

$$cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$cos(\beta) = \frac{(8)^2 + (5)^2 - (7)^2}{(2)\,(8)\,(5)}$$

$$cos(\beta) = \frac{64 + 25 - 49}{80}$$

$$cos(\beta) = \frac{1}{2}$$

$$\beta = arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

## **Ejemplo 7.26** Resolución de Triángulos no Rectángulos.

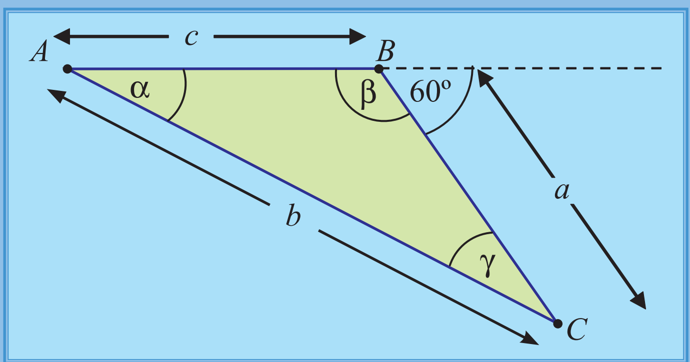
Dos ciudades $A$ y $B$ distan 150 millas entre sí y las ciudades $B$ y $C$ están separadas por una distancia de 100 millas. Un avión vuela de $A$ hasta $C$ de la manera siguiente:

a) Primero vuela a la ciudad $B$.

b) En $B$ se desvía con un ángulo cuya medida es de 60º hasta llegar a la ciudad $C$.

Determine la distancia entre las ciudades $A$ y $C$.

Solución:




$\beta = 120º$, por definición de ángulos suplementarios.

Aplicando la Ley de los Cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos(120º)$$

$$b^2 = (100)^2 + (150)^2 - 2(100)(150)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$b^2 = 10000 + 22500 + 15000$$

$$b^2 = 47500$$

$$b^2 = (25)(19)(100)$$

$$b = 50\sqrt{19}$$

La distancia entre las ciudades $A$ y $C$ es de $50\sqrt{19}$ millas.

## 7.8 Cuadriláteros

### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un cuadrilátero, clasificarlo de acuerdo a la longitud, paralelismo y medida de los ángulos.

**Definición 7.11 (Cuadrilátero)**

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Los cuadriláteros convexos tienen todas las medidas de sus ángulos interiores menores que $180^{\circ}$.

De acuerdo al paralelismo entre los lados, los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

### Paralelogramo

Es un cuadrilátero que tiene sus lados paralelos de dos en dos.

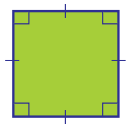
Sus **propiedades** son:

- En todo paralelogramo los lados paralelos tienen la misma longitud.
- En todo paralelogramo los ángulos opuestos tienen la misma medida.
- Cada diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.
- Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.

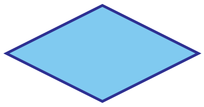
Los paralelogramos más utilizados son:

- **Rectángulo:** Paralelogramo en el cual todos los ángulos son rectos.

- **Cuadrado:** Rectángulo en el cual todos los lados son congruentes.



- **Rombo:** Paralelogramo no rectángulo en el cual todos los lados son congruentes.



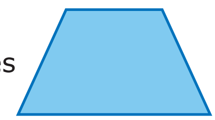
- **Romboide:** Paralelogramo no rectángulo en el cual los lados paralelos, son congruentes.

## Trapecio

Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos no paralelos. Los lados paralelos se denominan bases del trapecio y la distancia perpendicular entre ellos se denomina altura.

Si un trapecio tiene dos lados de igual longitud se denomina trapecio isósceles; mientras que si tiene un ángulo recto, se denomina trapecio rectángulo.

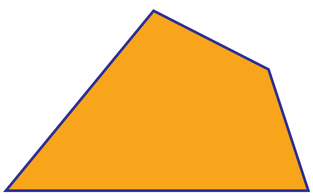
Trapecio Isósceles



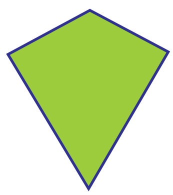
Trapecio Rectángulo

## Trapezoide

Es aquel cuadrilátero que no tiene lados paralelos. Puede ser asimétrico o simétrico.



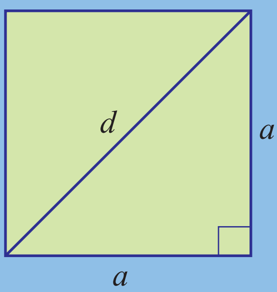
Trapezoide Asimétrico



Trapezoide Simétrico
"Deltoide"

## **Ejemplo 7.27** Cuadriláteros.

Demuestre que la longitud de la diagonal de un cuadrado es igual al producto de la longitud del lado por $\sqrt{2}$.




Solución:

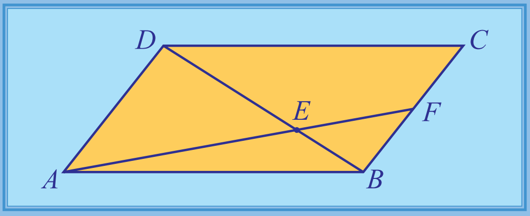
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 2a^2$$
$$d = a\sqrt{2}$$

Con lo cual se demuestra el enunciado.

## **Ejemplo 7.28** Semejanza de cuadriláteros.

En el siguiente bosquejo, si en el romboide se tiene $\overline{AD} = 48\ cm$, $\overline{AE} = 24\ cm$ y $\overline{EF} = 18\ cm$, determine $\overline{FB}$.




Solución:

Sea $x = \overline{FB}$.

Dado que $ABCD$ es un romboide, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $m(\measuredangle ADE) = m(\measuredangle FBE)$ (ángulos alternos internos entre rectas paralelas) y $m(\measuredangle DEA) = m(\measuredangle BEF)$ (ángulos opuestos por el vértice), entonces $\Delta ADE \sim \Delta FBE$. De la semejanza anterior, se deduce la proporción: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{FB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EF}}$.

Reemplazando los datos tendremos: $\dfrac{48}{x} = \dfrac{24}{18}$, de donde $x = \dfrac{(48)\,(18)}{24} = 36$.

Por lo tanto, $\overline{FB} = 36\ cm$.

## 7.9 Perímetro y área de un polígono

### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas las dimensiones de los elementos de un polígono, calcular su perímetro y área.
* Resolver problemas de áreas y perímetros de regiones con polígonos.
* Aplicar los criterios de semejanza para calcular áreas de las superficies de polígonos.

La construcción de casas proporciona varias aplicaciones sobre los conceptos que se tratarán en esta sección. Para colocar el marco de una ventana se necesita conocer el **perímetro** de la misma. Para pintar una pared, se necesita conocer cuán extensa es su superficie, para describir dicha extensión se emplea un número real denominado **área.**

**Definición 7.12 (Perímetro de un polígono)**

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los polígonos de $n$ lados, la función perímetro denotada por $Per(p)$ tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$\begin{aligned} Per: \mathbb{P} &\longmapsto \mathbb{R} \\ p &\longmapsto Per(p) = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \ldots + \overline{P_nP_1} \end{aligned}$$

Siendo los vértices de $\mathbb{P}$ los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y $\overline{P_iP_j}$ la distancia del punto $P_i$ al punto $P_j$.

Si los polígonos $p$ y $q$ son congruentes, entonces $Per(p) = Per(q)$.

### Superficie y área

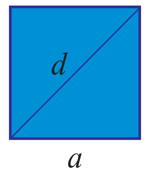
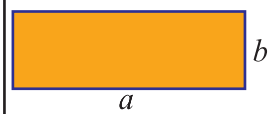
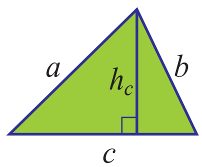
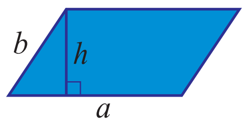
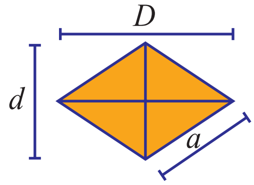
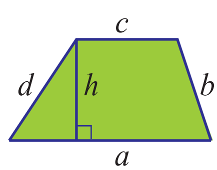
La **superficie**, en una región limitada, es el conjunto de puntos del plano encerrados por una figura geométrica plana simple. El **área** $A$ es la medida de tal superficie y expresa la extensión de un cuerpo en dos dimensiones.

Históricamente un "área" es una unidad de superficie antigua que equivale a $100$ metros cuadrados. Se sigue empleando con frecuencia su múltiplo, la hectárea y a veces su submúltiplo, la centiárea, que equivale a un metro cuadrado.

# Capítulo 7

# Geometría Plana

La siguiente tabla contiene las expresiones para calcular el perímetro y el área de los polígonos más conocidos, en base a sus dimensiones.

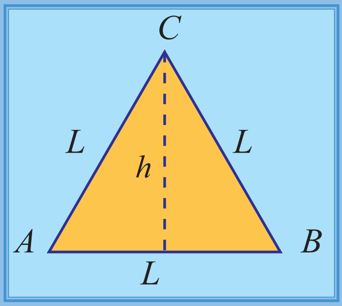
| Figura Geométrica | Representación | Perímetro | Área |
|---|---|---|---|
| **Cuadrado**<br>$a$: lado<br>$d$: diagonal |  | $Per = 4a$ | $A = a^2$<br>$A = \frac{d^2}{2}$ |
| **Rectángulo**<br>$a$, $b$: lados |  | $Per = 2(a+b)$ | $A = ab$ |
| **Triángulo**<br>$a, b, c$: lados<br>$h_c$: altura relativa a $c$ |  | $Per = a+b+c$ | $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ |
| **Paralelogramo**<br>$a, b$: lados<br>$h$: altura |  | $Per = 2(a+b)$ | $A = ah$ |
| **Rombo**<br>$a$: lado<br>$D, d$: diagonales mayor y menor |  | $Per = 4a$ | $A = \frac{dD}{2}$ |
| **Trapecio**<br>$a, c$: bases<br>$b, d$: lados<br>$h$: altura |  | $Per = a+b+c+d$ | $A = \left(\frac{a+c}{2}\right)h$ |

**Cuadro 7.2: Perímetro y Área de figuras geométricas.**

### **Ejemplo 7.29** Área de la superficie de un triángulo equilátero.

Demuestre que el área de la superficie de un triángulo equilátero de longitud de lado $L$, es igual a $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$.

Solución:




$$A(\Delta ABC)=\frac{L\,h}{2}$$ Fórmula para calcular el área de la superficie de un triángulo.

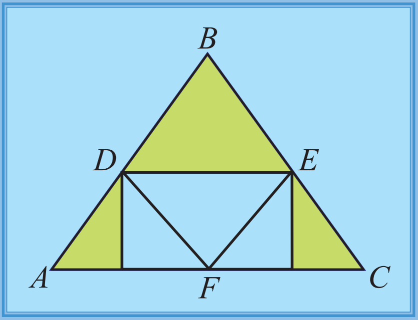
$$h=\frac{L\sqrt{3}}{2}$$ Fórmula para calcular la longitud de la altura de un triángulo equilátero.

$$A(\Delta ABC)=\frac{L(L\sqrt{3}/2)}{2}$$ Reemplazando $h$ en la fórmula del área.

$$A(\Delta ABC)=\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$ Área de la superficie de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de sus lados.

## **Ejemplo 7.30** Área de la superficie de un triángulo.

Sean $ABC$ un triángulo equilátero de longitud de lado igual a $2$ unidades; $D$, $E$ y $F$ son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Determine el área de la superficie sombreada.




Solución:

El área de la superficie del triángulo equilátero $ABC$ es $\sqrt{3}$. Recuerde que en un triángulo equilátero, su área es $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$. Este valor es igual a $4$ veces el área de la superficie del triángulo equilátero $DBE$, puesto que los triángulos $DBE$, $ADF$, $DFE$ y $FEC$ son congruentes y la suma de sus áreas es igual al área de la superficie del triángulo $ABC$.

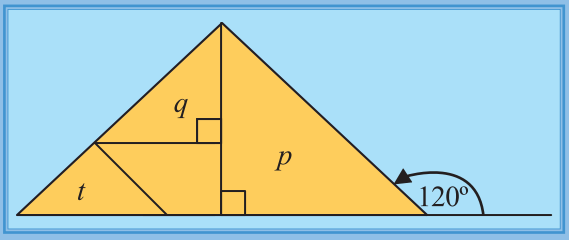
Es decir, que el área de la superficie de uno de los 4 triángulos es $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

El área de la región sombreada es igual al área de la superficie del triángulo $ABC$, menos 2 veces el área de la superficie de cualesquiera de los 4 triángulos.

Esto es: $A_{\text{sombreada}} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, u^2$.

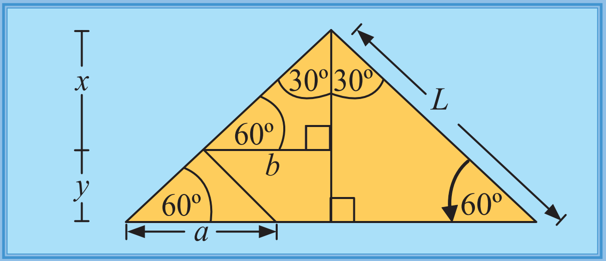
### **Ejemplo 7.31** Triángulos.

En el siguiente bosquejo, $q$ es un triángulo rectángulo de área igual a $2\sqrt{3}u^2$ y $t$ es un triángulo equilátero de lado de longitud igual a $2u$. Determine la longitud de la hipotenusa del triángulo $p$.




Solución:

Interpretando la información proporcionada, tenemos:




El área de la superficie del triángulo $q$ es $Aq = \frac{bx}{2} = 2\sqrt{3}$

Se puede notar que $tan\ (30º) = \frac{b}{x}$

$$b = x\ tan\ (30º)$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}\, x$$

Reemplazando:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)x}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 = 12$$

$$x = 2\sqrt{3}\ u$$

La altura del triángulo equilátero es $y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(2)$$

$$y = \sqrt{3}\ u$$

Por lo tanto, $x + y = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$$x + y = 3\sqrt{3}$$

La longitud $x + y$ es la altura del triángulo equilátero cuyo lado tiene por longitud $L$:

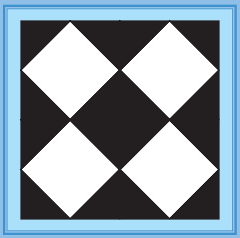
$$x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}(3\sqrt{3})$$

$$L = 6u.$$

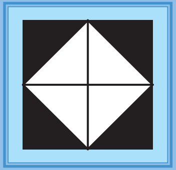
## **Ejemplo 7.32** Área de la superficie de cuadriláteros.

Se cubre el piso de un cuarto con 4 baldosas idénticas. Cada baldosa es un cuadrado negro en donde se ha pintado un cuadrado blanco cuyos vértices son los puntos medios de cada lado de dicha baldosa. Determine el porcentaje total de piso negro.



Solución:

Divídase cada baldosa en cuatro partes, como se muestra a continuación:

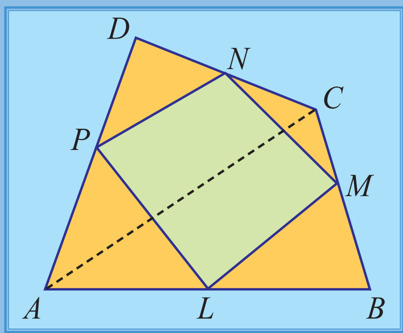


Se observa entonces que el piso negro corresponde al $50\%$ del total.

### **Ejemplo 7.33** Cuadriláteros

En el bosquejo de la figura se muestra un trapezoide. Si $L$, $M$, $N$ y $P$ son los puntos medios de los lados indicados, determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

I) El cuadrilátero $LMNP$ es un paralelogramo.
II) $\overline{LN} \perp \overline{MP}$
III) El perímetro del cuadrilátero $LMNP$ es $\overline{AC} + \overline{BD}$.




Solución:

I) Considerando el $\Delta ACD$ y los puntos medios $N$ y $P$, resulta que $\overline{PN}$ es la mitad de la medida del lado $\overline{AC}$. Así, $\overline{PN} \parallel \overline{AC}$, y de manera análoga, al considerar el $\Delta ACB$, $\overline{LM}$ es la mitad de la medida del lado $\overline{AC}$. Luego, $\overline{LM} \parallel \overline{AC}$. Por lo tanto, $\overline{PN} \parallel \overline{LM}$. Así mismo, de la consideración de los triángulos $ABD$ y $BCD$ resulta que: $\overline{MN} \parallel \overline{LP}$, es decir, el cuadrilátero $LMNP$ es un paralelogramo por tener los lados opuestos paralelos.

Luego, la proposición I es verdadera.

II) Ahora bien, como $LMNP$ es un paralelogramo cualquiera, no podemos asegurar que $\overline{LN} \perp \overline{MP}$.

Luego, la proposición II es falsa.

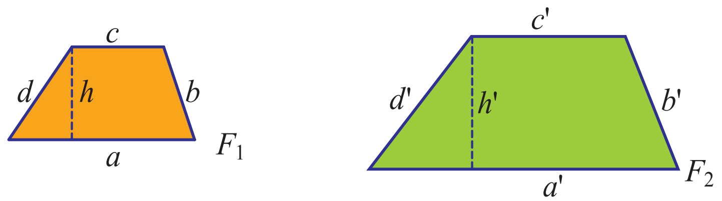
III) Finalmente, el perímetro del cuadrilátero $LMNP$ es $\overline{LM} + \overline{MN} + \overline{PN} + \overline{LP}$.

Puesto que $\overline{LM} = \overline{PN}$ y $\overline{MN} = \overline{LP}$ representan la mitad de las medidas de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente, se tiene:

$\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ y $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BD}$.

Entonces el perímetro del cuadrilátero $LMNP$ es igual a $\overline{AC} + \overline{BD}$.
Luego, la proposición III es verdadera.

Para figuras semejantes, se tiene que la relación entre las áreas es igual al cuadrado de la relación entre cualquiera de sus elementos lineales.

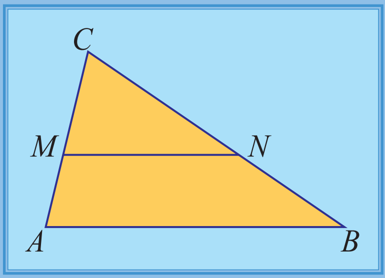



$$F_1 \sim F_2$$

$$\frac{A(F_1)}{A(F_2)} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 = \left(\frac{c}{c'}\right)^2$$

## **Ejemplo 7.34** Semejanza de áreas.

En el bosquejo de la siguiente figura $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, siendo $\overline{MN} = 3cm$ y $\overline{AB} = 5cm$. Determine la razón entre el área de la superficie del trapecio $ABNM$ y el área de la superficie del triángulo $ABC$.




Solución:

Puesto que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, resulta que $\Delta MNC \sim \Delta ABC$.

Luego: $\dfrac{A(\Delta MNC)}{A(\Delta ABC)} = \left(\dfrac{\overline{MN}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$.

Por lo tanto, $A(\Delta MNC) = \left(\dfrac{9}{25}\right) A(\Delta ABC)$, y puesto que el área de la superficie del trapecio $ABNM$ es igual al área de la superficie del triángulo $ABC$, menos el área del triángulo $MNC$, tenemos que:

$$A(\square ABNM) = A(\Delta ABC) - \left(\frac{9}{25}\right) A(\Delta ABC) = \left(\frac{16}{25}\right) A(\Delta ABC).$$

Luego, la razón pedida es $\dfrac{16}{25}$.

## 7.10 Circunferencia y círculo

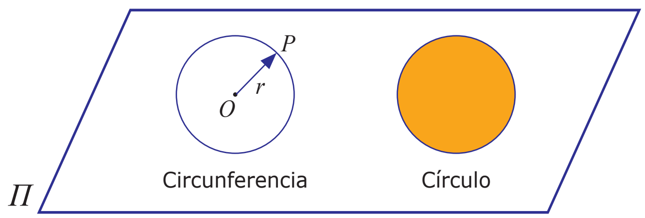
### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar la diferencia entre circunferencia y círculo.
* Dada una circunferencia, definir los elementos de la circunferencia y el círculo asociado, justificando gráficamente su respuesta.
* Dada una circunferencia con un ángulo central, calcular la medida del ángulo inscrito.
* Dada una circunferencia con dos pares de cuerdas que sostienen el mismo arco, calcular la medida del ángulo inscrito.
* Definir los elementos de una circunferencia empleando relaciones de ángulos, triángulos y semejanza de polígonos.

**Definición 7.13 (Circunferencia y círculo)**

Sea $r$ un número positivo y $O$ un punto en el plano $\Pi$, el conjunto $C = \{P / \overline{OP} = r, P \in \Pi\}$ es una circunferencia de longitud de radio $r$, centrada en $O$. La unión de una circunferencia con su interior se denomina círculo.




**Elementos de la circunferencia y el círculo**

Respecto a la siguiente figura, se pueden observar los siguientes elementos de una circunferencia y un círculo de centro $O$ y radio $r$.

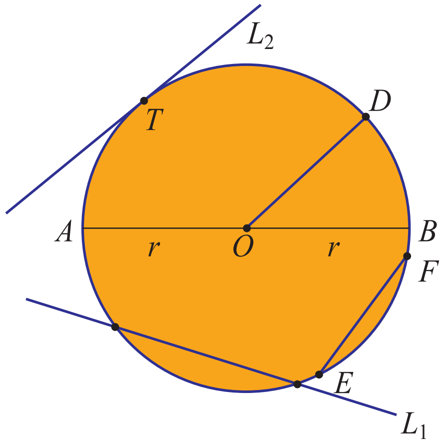



**Figura 7.24: Elementos de la circunferencia.**

**a) Radio ($r$):** Es un segmento que une el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de ella, por ejemplo: $\overline{OD}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$. Luego, $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$.

**b) Cuerda:** Es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia, por ejemplo $\overline{EF}$.

**c) Diámetro ($d$):** Es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia. La longitud del diámetro $d$ es el doble de la longitud del radio, es decir $d = 2r$, por ejemplo: $\overline{AB}$.

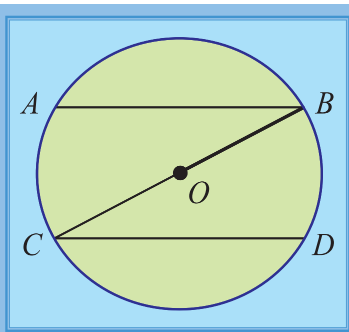
**d) Arco:** Es una línea curva perteneciente a la circunferencia que une dos puntos de ella. Por ejemplo, si la cuerda une los puntos $BD$, el arco se denota por $\overset{\frown}{BD}$. Las letras deben ser ordenadas en sentido de giro contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Por lo tanto, la longitud del arco $\overset{\frown}{BD}$ generalmente es diferente a la longitud del arco $\overset{\frown}{DB}$. En este caso $\overset{\frown}{BD}$ es el **arco menor** porque su longitud es menor que la longitud de la mitad de una circunferencia y $\overset{\frown}{DB}$ es el **arco mayor** porque su longitud es mayor que la longitud de la mitad de una circunferencia.

**e) Secante:** Es una recta que interseca a la circunferencia en dos puntos diferentes, por ejemplo, $L_1$.

**f) Tangente:** Es una recta que interseca a la circunferencia en un solo punto. Por ejemplo, $L_2$. El punto de intersección se llama punto de tangencia o de contacto. En la figura, $T$ es el punto de tangencia. Es de observar que el radio en el punto $T$ es perpendicular a la recta $L_2$.

## **Ejemplo 7.35** Elementos de la Circunferencia.

En la figura adjunta se tiene una circunferencia con centro en $O$ y radio $r$, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas. Si la cuerda $\overline{AB} = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ unidades, determine la distancia que separa las $2$ cuerdas.




Solución:

El triángulo que forman $A$, $B$ y $C$ es rectángulo y se puede aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^{\,2} + \overline{AB}^{\,2} = \overline{BC}^{\,2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^{\,2} - \overline{AB}^{\,2}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2}$$

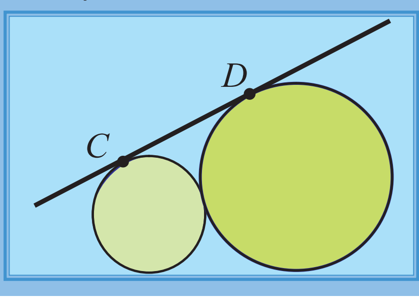
$$\overline{AC} = \sqrt{4r^2 - \frac{1}{2}r^{\,2}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{7}{2}}r$$

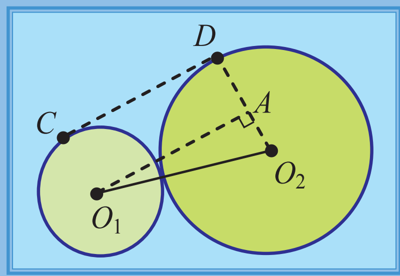
$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{14}}{2}r$$

## **Ejemplo 7.36** Elementos de la Circunferencia.

Determine la longitud del segmento $\overline{CD}$ tangente a dos circunferencias de radios de longitudes $4$ y $9$ unidades.



Solución:




Según la figura, si $O_1$ y $O_2$ son los centros de las circunferencias, se cumple que: $\overline{O_1O_2} = 13u$.
Se puede construir el segmento $\overline{O_1A}$ paralelo a $\overline{CD}$ y de igual longitud.
La longitud del segmento $\overline{O_2A}$ es igual a la longitud del segmento $\overline{O_2D}$ menos la longitud del segmento $\overline{AD}$, pero:

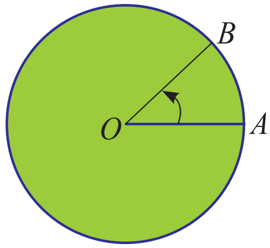
$$\begin{aligned} \overline{AD} &= 4 \\ \overline{O_2D} &= 9 \\ \overline{O_2A} &= 5 \end{aligned}$$

El triángulo $O_1O_2A$ es rectángulo y se puede aplicar el teorema de Pitágoras:

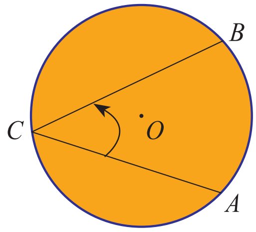
$$\begin{aligned} \overline{O_1A} &= \sqrt{\overline{O_1O_2}^{\,2} - \overline{O_2A}^{\,2}} \\ &= \sqrt{(13)^2 - (5)^2} \\ &= \sqrt{169 - 25} \\ \overline{O_1A} &= \sqrt{144} \\ \overline{CD} &= 12u \end{aligned}$$

### Ángulos en la circunferencia

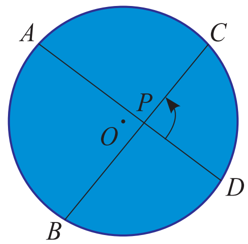
**a) Ángulo central:** Es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados están sobre los radios, por ejemplo, el ángulo $\measuredangle AOB$ de la figura.



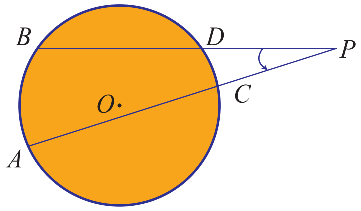
**b) Ángulo inscrito:** Es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados están sobre las cuerdas (o secantes). Por ejemplo, el ángulo $\measuredangle ACB$ de la figura.



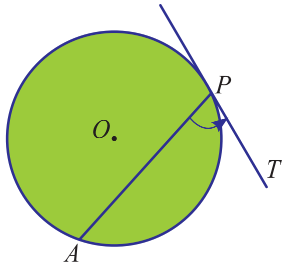

**c) Ángulo interior**: Es aquel que está formado por la intersección de dos cuerdas cualesquiera, por ejemplo, el ángulo $\measuredangle DPC$ de la figura.




**d) Ángulo exterior**: Es aquel que está formado por dos secantes (o tangentes, o una secante y una tangente) que parten de un mismo punto exterior a la circunferencia, por ejemplo, el ángulo $\measuredangle BPA$ de la figura.



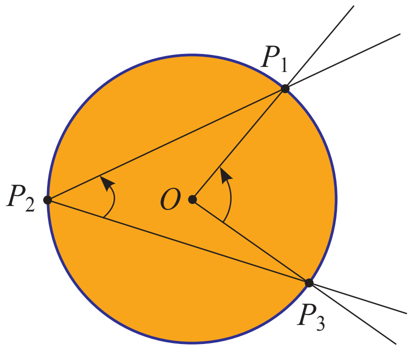

**e) Ángulo semi-inscrito**: Es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia y sus lados son una tangente y una cuerda, respectivamente. Por ejemplo, el ángulo $\measuredangle APT$ de la figura.



Dos **circunferencias** son **congruentes** si tienen radios de igual longitud.

Si $P_1$ y $P_2$ son extremos de un mismo diámetro, el segmento de recta $\overline{P_1 P_2}$ divide a la circunferencia y al círculo en dos semicircunferencias y semicírculos, respectivamente.

Una propiedad muy útil que relaciona el ángulo central con el ángulo inscrito es: ***"la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central para ángulos que intersecan la circunferencia en los mismos puntos"***.

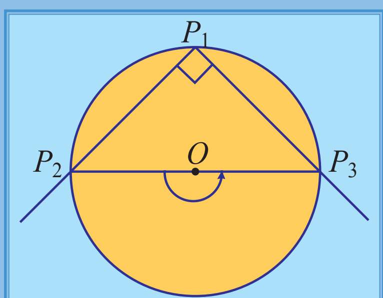



$$m(\measuredangle P_3 P_2 P_1) = \frac{1}{2} m(\measuredangle P_3 O P_1)$$

**Figura 7.25: Relación entre ángulo central e inscrito.**

## **Ejemplo 7.37** Ángulos en la circunferencia.

Demuestre que si $P_1$, $P_2$, $P_3$ son puntos sobre una circunferencia, tales que $P_2$ y $P_3$ son extremos de un mismo diámetro, entonces, $m(\measuredangle P_2 P_1 P_3) = \frac{\pi}{2}$ radianes.

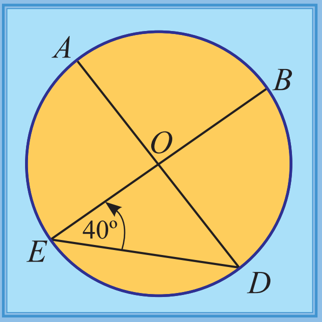



Solución:

Utilizando la propiedad entre ángulo central y ángulo inscrito respecto a la figura, se tiene que $m(\measuredangle P_2 P_1 P_3) = \frac{1}{2} m(\measuredangle P_2 O P_3) = \frac{1}{2}(\pi) = \frac{\pi}{2}$ radianes.

**Ejemplo 7.38** Ángulos en la circunferencia.

En la figura adjunta, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ son dos diámetros de la circunferencia con centro en $O$.



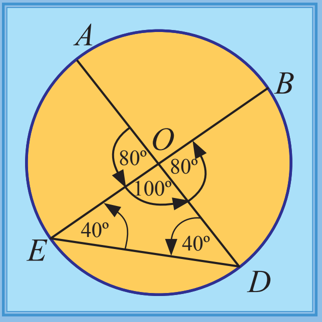

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $m(\measuredangle DEO) = m(\measuredangle BOA)/2$

b) $m(\measuredangle BOA) > m(\measuredangle AOE)$

c) $m(\measuredangle ODE) < m(\measuredangle DOB)$

Solución:




a) En la figura se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} m(\measuredangle DEO) &= 40º \\ m(\measuredangle DOB) &= 2m(\measuredangle DEB) = 2(40º) = 80º \\ m(\measuredangle BOA) &= 180º - m(\measuredangle DOB) \\ &= 180º - 80º = 100º \end{aligned}$$

b) $m(\measuredangle AOE) = m(\measuredangle DOB)$

$m(\measuredangle AOE) = 80º$

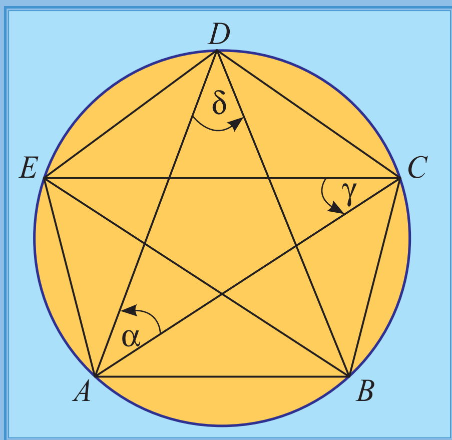
c) $m(\measuredangle ODE) = 180^{\circ} - m(\measuredangle EOD) - m(\measuredangle DEO) = 180^{\circ} - 100^{\circ} - 40^{\circ}$

$m(\measuredangle ODE) = 40^{\circ}$

Por lo tanto, la proposición a) es falsa y las proposiciones b) y c) son verdaderas.

## **Ejemplo 7.39** Ángulos en la circunferencia.

Las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ son todas congruentes. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos mostrados en la figura adjunta?

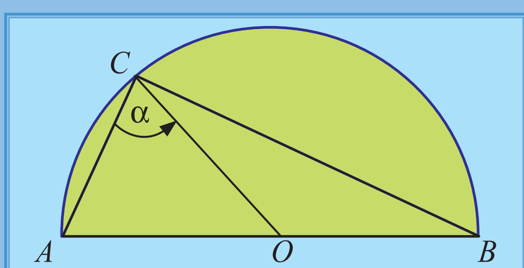



Solución:

Los ángulos centrales correspondientes a las cuerdas dadas, son todos congruentes por tratarse de ángulos inscritos en arcos congruentes. Pero cada uno de estos ángulos mide $\frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$. Luego, el ángulo $CAD = \alpha = \frac{72^{\circ}}{2} = 36^{\circ}$. Por lo tanto, la suma de las medidas de los tres ángulos es: $(3)(36^{\circ}) = 108^{\circ}$.

## **Ejemplo 7.40** Ángulos en la circunferencia.

En la figura adjunta, $O$ es el centro de la semicircunferencia y $\measuredangle BOC = 3\measuredangle COA$. ¿Cuál es el valor de $\alpha$?



Solución:

Puesto que $\measuredangle COA$ y $\measuredangle BOC$ son suplementarios, suman $180^o$, y como $\overset{\frown}{CB} = 3\overset{\frown}{AC}$, por hipótesis, resulta que $\measuredangle COA = 45^o$.

Ahora bien, como el triángulo $AOC$ es isósceles de base $\overline{AC}$, se cumple que $(\overline{OA} = \overline{OC})$ y resulta que:

$m(\measuredangle OAC) = m(\measuredangle ACO) = \alpha$

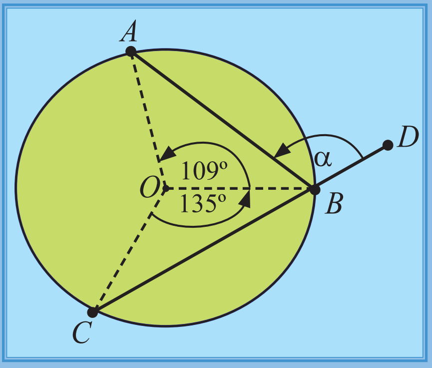
Luego:

$$\alpha + \alpha + 45^o = 180^o$$
$$2\alpha + 45^o = 180^o$$
$$2\alpha = 135^o$$

De donde: $\alpha = \dfrac{135^o}{2} = 67.5^o$

## **Ejemplo 7.41** Ángulos en la circunferencia.

En base a la figura adjunta, determine la medida de $\alpha$ en grados sexagesimales.




Solución:

$$m(\measuredangle AOC) + m(\measuredangle BOA) + m(\measuredangle COB) = 360^o$$

$$m(\measuredangle AOC) = 360^o - m(\measuredangle BOA) - m(\measuredangle COB) = 360^o - (109^o + 135^o) = 116^o$$

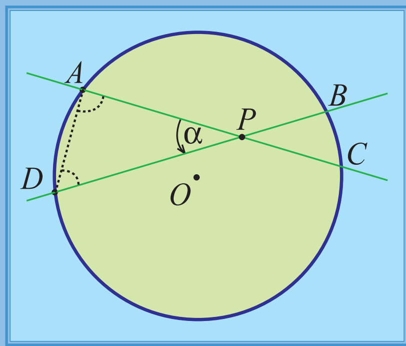
$$m(\measuredangle ABC) = \frac{1}{2}\, m(\measuredangle AOC) = \frac{116^o}{2} = 58^o$$

$$\alpha + m(\measuredangle ABC) = 180^o$$

$$\alpha = 180^o - m(\measuredangle ABC) = 180^o - 58^o = 122^o$$

## Ejemplo 7.42 Ángulo en la circunferencia.

A partir de la siguiente figura, demuestre que $m(\measuredangle\alpha)=\dfrac{m(\measuredangle CPB)+m(\measuredangle APD)}{2}$.




Solución:

$\measuredangle\alpha = \measuredangle APD$

$m(\measuredangle\ APD)+m(\measuredangle\ DAP)+m(\measuredangle\ PDA)=\pi$ Suma de la medidas de los ángulos interiores del $\Delta APD$.

$m(\measuredangle\ APD)=\pi-m(\measuredangle\ DAP)-m(\measuredangle\ PDA)$ Despejando $m(\measuredangle\ APD)$.

$m(\measuredangle\ APD)=\pi-\dfrac{m(\measuredangle DPC)}{2}-\dfrac{m(\measuredangle BPA)}{2}$ Propiedades de ángulos inscritos.

$m(\measuredangle\ APD)=\dfrac{2\pi-\left[m(\measuredangle DPC)+m(\measuredangle BPA)\right]}{2}$ Simplificando la expresión.

$$m(\measuredangle\ APD)=\frac{m(\measuredangle CPB)+m(\measuredangle APD)}{2}$$

## 7.11 Polígonos y circunferencias

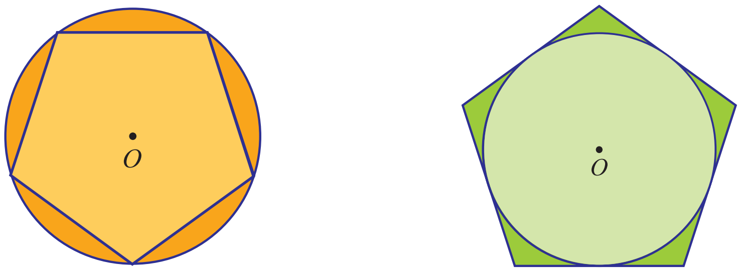
### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Determinar las relaciones entre los elementos que conforman circunferencias y polígonos, inscritos o circunscritos.

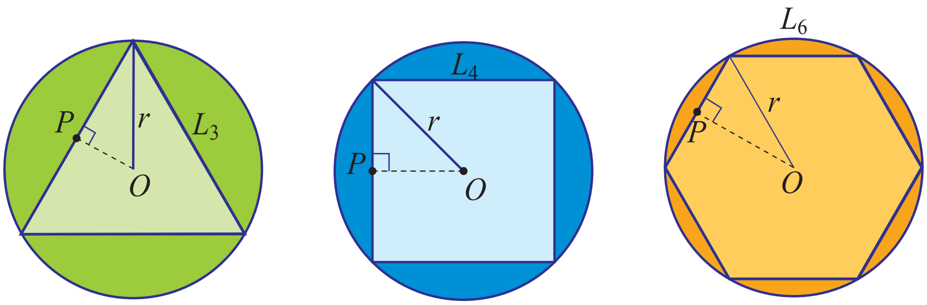
**Definición 7.14 (Polígono inscrito o circunscrito)**

Un polígono se dice inscrito en una circunferencia si todos sus vértices son puntos de la circunferencia. Recíprocamente, la circunferencia se dice circunscrita al polígono. Un polígono se dice circunscrito a una circunferencia si sus lados son segmentos tangentes a la circunferencia. Recíprocamente, la circunferencia se dice inscrita en el polígono.




Polígono inscrito    Polígono circunscrito

Una propiedad importante de los polígonos regulares es que siempre pueden inscribirse en una circunferencia.



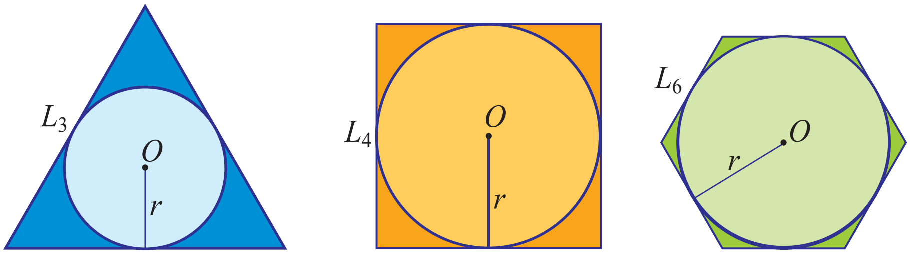

$L_3 = \sqrt{3}\, r$ (a)    $L_4 = \sqrt{2}\, r$ (b)    $L_6 = r$ (c)

**Figura 7.26: Polígonos inscritos.**

Tal como se puede observar, en la figura 7.26 (a), (b) y (c), $L_n$ y $r$ representan las longitudes de los lados de los polígonos y la longitud del radio de las circunferencias circunscritas, respectivamente.

La **apotema** $a_n$ en un polígono regular de $n$ lados es un segmento cuya longitud es igual a la distancia perpendicular desde el centro del círculo circunscrito hasta un lado del polígono. En las figuras (a), (b) y (c), $a_n = \overline{OP}$; y, es posible demostrar que $a_3 = \frac{r}{2}$, $a_4 = \frac{\sqrt{2}\, r}{2}$ y $a_6 = \frac{\sqrt{3}\, r}{2}$, siendo $r$, en cada uno de los casos, la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

De manera análoga, los polígonos regulares pueden siempre circunscribirse a una circunferencia.




$L_3 = 2\sqrt{3}r$ $\quad$ $L_4 = 2r$ $\quad$ $L_6 = \frac{2\sqrt{3}\,r}{3}$

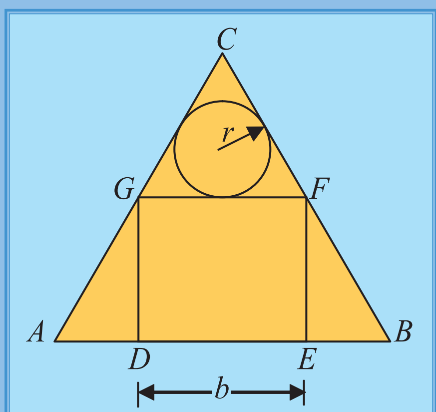
**Figura 7.27: Polígonos circunscritos.**

Si tomamos una circunferencia y en ella inscribimos un polígono regular $P$ de $n$ lados, para $n$ finito, $C - P_n > 0$, donde $C$ es la longitud de la circunferencia y $P_n$ el perímetro del polígono; a medida que $n$ aumenta $(n \to \infty)$, la diferencia $C - P_n$ se hace ínfima, es decir, $P_n \to C$. Esto será expresado diciendo que $C$ es el límite de $P_n$ cuando $n$ crece indefinidamente, lo cual se denota como:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n = C}$$

## **Ejemplo 7.43** Polígono circunscrito.

$ABC$ es un triángulo equilátero y $DEFG$ es un rectángulo de base $b$ unidades, como se observa en la figura. Si la circunferencia mostrada está inscrita en el triángulo $GFC$, determine la longitud de su diámetro.




Solución:

Se puede observar que $\overline{DE} = \overline{GF} = b$.

La circunferencia se ha inscrito en el triángulo $GFC$, que también debe ser equilátero, y se cumple que:

$$\overline{GF} = 2\sqrt{3}r$$

$$r = \frac{\overline{GF}}{2\sqrt{3}}$$

La longitud de su diámetro $d$ es $2r$.

$$d = \frac{\overline{GF}}{\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{\overline{DE}}{\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}b \text{ unidades.}$$

## 7.12 Figuras circulares

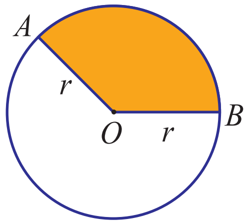
### Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

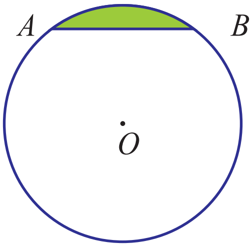
* Dada una circunferencia y un ángulo central, calcular la longitud de arco y el área del sector circular.

* Calcular áreas con figuras circulares que involucren al segmento circular y a la corona circular.

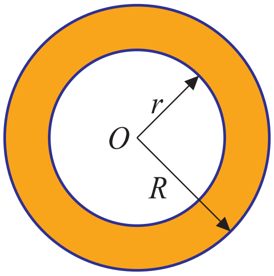
**a) Sector circular:** Es la región del círculo comprendida entre dos radios y el arco que subtienden.



**b) Segmento circular:** Es la porción del círculo comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente.

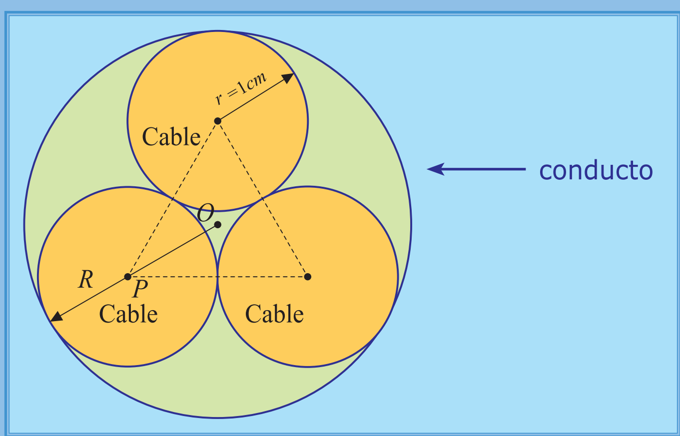



**c) Corona o anillo circular:** Es la región comprendida entre dos círculos concéntricos (que tienen el mismo centro).




## **Ejemplo 7.44** Polígono circunscrito.

Los conductos de cables telefónicos están construidos para contener tres cables, cuyas secciones transversales son circulares y tangentes al conducto y entre sí; y cuyos radios $r$ miden $1cm$. Determine la longitud $R$ del radio del conducto.




Solución:

De la figura se puede observar que $R$ (longitud del radio de la circunferencia mayor) puede ser calculado con la expresión:

$R = \overline{OP} + 1$

Debido a que el triángulo que se forma uniendo los centros de los tres círculos menores es equilátero, con longitud de lados $L = 2\ cm$, se puede deducir que:

$\overline{OP} = \frac{2}{3} h$ ($O$ es el ortocentro)

Por otra parte:

$h = \frac{\sqrt{3}}{2} L$ ($h$ es la altura del triángulo)

Luego $\overline{OP} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2) = \frac{2\sqrt{3}}{3} cm$.

Por lo tanto: $R = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right) cm$.

## Área del círculo

El área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos en la respectiva circunferencia.

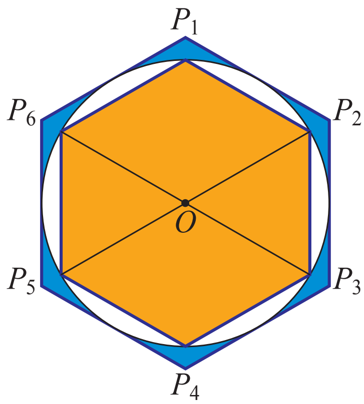
$$\lim_{n \to \infty} A(P_n) = A(círculo)$$

Si consideramos un polígono regular $p$ de $n$ lados, de perímetro $Per$ y apotema $a$, podemos descomponerlo en $n$ triángulos congruentes con base $l$ y altura $a$, de tal forma que:

$$A(polígono) = \frac{n(la)}{2} = \frac{(nl)a}{2} = \frac{Per(p)a}{2}$$

$$\boxed{A(polígono) = \frac{(PERÍMETRO)(APOTEMA)}{2}}$$

Consideremos ahora un círculo de radio $r$ y los polígonos regulares inscritos y circunscritos a ese círculo. Si hacemos crecer el número de lados $(n \to \infty)$, las apotemas se aproximan al radio del círculo. Diremos entonces que el área de la superficie circular es aproximadamente igual al área de la superficie de un polígono regular de número ilimitado de lados $(n \to \infty)$, esto es el semiproducto de la medida del perímetro por la longitud del radio.




Así se obtendría que $A(círculo) = \dfrac{(PERÍMETRO)(APOTEMA)}{2}$

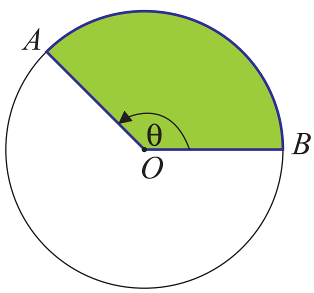
$$A(círculo) = \frac{(2\pi r)r}{2}$$

$$\boxed{A(círculo) = \pi r^2}$$

## Área del sector circular

Si $\theta$ es la medida en **radianes** del ángulo central de un sector circular, establecemos una relación de regla de 3 simple, a saber:

| | |
|---|---|
| $2\pi$ radianes | $\pi r^2$ |
| $\theta$ radianes | $A$ (sector circular) |




Por tanto: $\boxed{A(sector\ circular) = \dfrac{r^2\theta}{2}, \text{ θ se mide en radianes}}$

Si θ viene dado en **grados sexagesimales:**

$$\boxed{A(sector\ circular) = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}}$$

### Área del segmento circular

El área del segmento circular se obtiene como la diferencia entre las áreas del sector circular y del triángulo correspondiente. De la figura anterior, podemos deducir que:

$A(segmento\ circular) = A(sector\ circular\ AOB) - A\ (triángulo\ AOB)$

El área del triángulo $AOB$ se puede calcular como $\frac{1}{2}r^2 sen(\theta)$, con $\theta$ expresado en radianes. Así:

$$A(segmento\ circular) = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 sen(\theta)$$

$$\boxed{A(segmento\ circular) = \frac{1}{2}r^2(\theta - sen(\theta))}$$

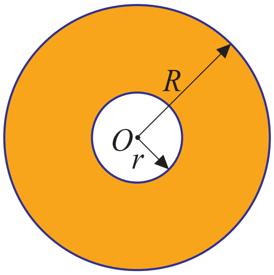
### Área de la corona circular

El área de la corona circular se obtiene como la diferencia entre las áreas de los círculos concéntricos.

$A$(corona circular) = $A$(círculo de radio $R$) – $A$(círculo de radio $r$)

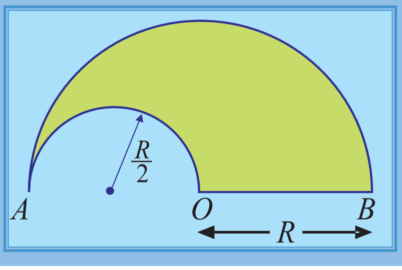
$$A(corona\ circular) = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\boxed{A(corona\ circular) = \pi(R^2 - r^2)}$$




**Ejemplo 7.45** Perímetro de figuras circulares.

Si $O$ es el centro del semicírculo de radio de longitud $R = 2cm$, determine el perímetro de la región sombreada.



Solución:

La semicircunferencia $AO$ tiene longitud de radio $r = 1\ cm$. El perímetro sería la longitud de la semicircunferencia pequeña $AO$, más la longitud del segmento de recta $OB$, más la longitud de la semicircunferencia grande $AB$.

$$P = \overset{\frown}{AO} + \overline{OB} + \overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}(2\pi r) + R + \frac{1}{2}(2\pi R)$$

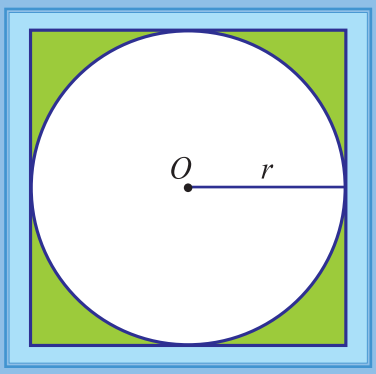
$$P = \frac{1}{2}[2\pi(1)] + 2 + \frac{1}{2}[2\pi(2)]$$

$$P = \pi + 2 + 2\pi$$

$$P = (3\pi + 2)\ cm$$

## **Ejemplo 7.46** Área relacionada con figuras circulares.

Determine el área de la región sombreada si el cuadrado circunscrito tiene lado de longitud $4u$.




Solución:

Cuadrado $= (\textit{región sombreada}) \cup (\textit{círculo})$

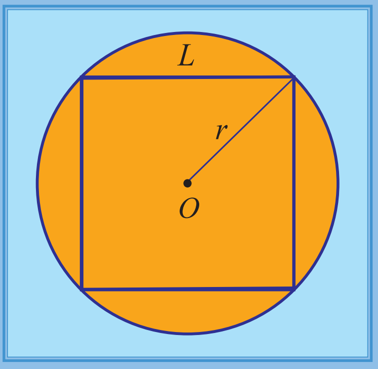
$$A(\textit{cuadrado}) = A(\textit{región sombreada}) + A(\textit{círculo})$$

$$A(\textit{región sombreada}) = A(\textit{cuadrado}) - A(\textit{círculo})$$

$$A(\textit{región sombreada}) = 4^2 - \pi(2)^2 = 16 - 4\pi = 4(4-\pi)\ u^2$$

## **Ejemplo 7.47** Área de figuras circulares.

Calcule el área de la superficie de un círculo en el que se ha inscrito un cuadrado de $50$ metros cuadrados de área.



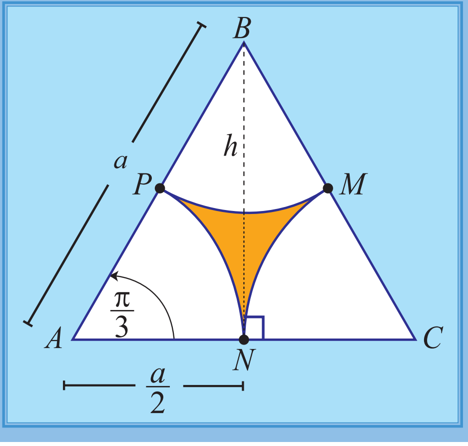

Solución:

Tenemos:
$50 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Pero $L = r\sqrt{2}$ y $r = 5m$, por tanto $A(círculo) = \pi r^2 = 25\ \pi m^2$.

## **Ejemplo 7.48** Área de una superficie sombreada.

El triángulo $ABC$ es equilátero, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$ y $P$, $M$, $N$ son los puntos medios de los lados. Determine el área de la región sombreada.



Solución:

El área $A_s$ de la superficie sombreada puede ser calculada mediante la diferencia entre el área de la superficie del triángulo equilátero y la de los tres sectores circulares de longitud de radio $\frac{a}{2}$ y medida de ángulo $\frac{\pi}{3}$. Así:

$$A_s = A_\Delta - 3A_{sc}$$

$$A_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{sc} = \frac{r^2\theta}{2}$$

$$A_{sc} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$A_{sc} = \frac{a^2\pi}{24}$$

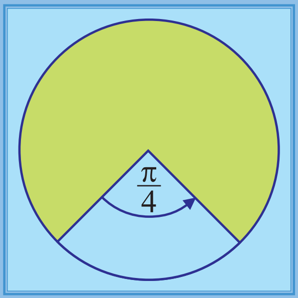
$$A_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3\left(\frac{a^2\pi}{24}\right)$$

$$A_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\pi}{8}$$

$$A_s = \frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi)\ u^2$$

## **Ejemplo 7.49** Área de figuras circulares.

Determine el porcentaje del área de la superficie sombreada respecto del área total del círculo.




Solución:

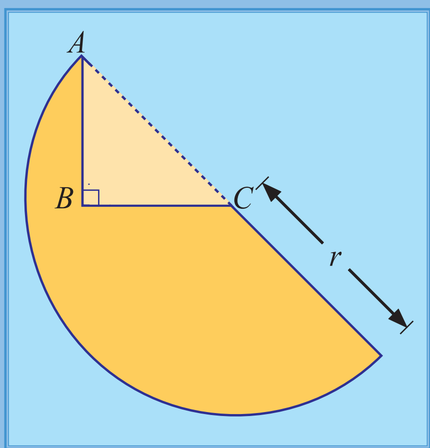
Si la medida del ángulo es $\frac{\pi}{4}$ o $45^\circ$, la superficie sombreada corresponde al área de un sector circular con un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ ó $315^\circ$.

Por lo tanto, el porcentaje del área de la superficie sombreada respecto del total, sería:

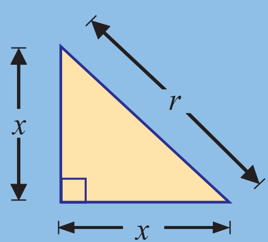
$$\frac{315^o}{360^o} \times 100 = \frac{7}{8} \times 100 = 87.5\%$$

## **Ejemplo 7.50** Área de figuras en el plano.

Si la figura adjunta corresponde a un semicírculo de longitud de radio $r = 2a$, determine el área de la superficie sombreada, considerando que el triángulo $ABC$ es rectángulo isósceles.




Solución:




Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = r^2$$
$$2x^2 = r^2$$
$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$
$$x^2 = 2a^2$$
$$x = \sqrt{2}a$$

$$A = A_{SEMICÍRCULO} - A_{TRIÁNGULO}$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{(x)(x)}{2}$$

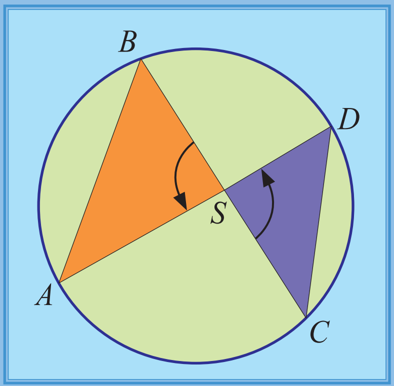
$$A = \frac{1}{2}\pi(2a)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}a)(\sqrt{2}a)$$

$$A = 2\pi a^2 - a^2$$

$$A = (2\pi - 1)a^2 u^2$$

## **Ejemplo 7.51** Semejanza de áreas.

En la figura adjunta, el área de la superficie del triángulo $SDC$ es $15\ m^2$ y se conoce que $\overline{BS} = 2\ \overline{DS}$. Encuentre el área de la superficie del triángulo $ABS$ en $m^2$.




Solución:

Los ángulos $BSA$ y $CSD$ son opuestos por el vértice y además:
$[m(\measuredangle BAS) = m(\measuredangle SCD)] \Rightarrow ABS$ y $DSC$ son triángulos semejantes.

$$\frac{A_{\Delta ABS}}{A_{\Delta CDS}} = \left(\frac{\overline{BS}}{\overline{DS}}\right)^2$$

$$A_{\Delta ABS} = \left(\frac{2\,\overline{DS}}{\overline{DS}}\right)^2 A_{\Delta CDS}$$

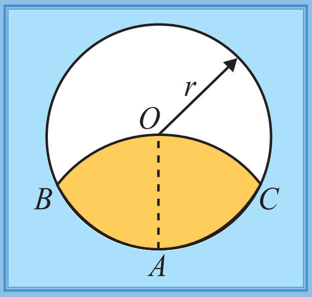
$$A_{\Delta ABS} = 4\ A_{\Delta CDS}$$

$$A_{\Delta ABS} = (4)(15)$$

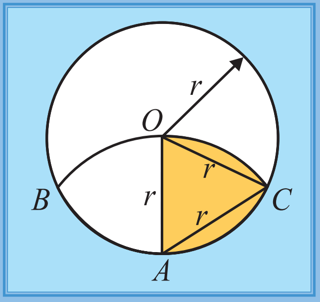
$$A_{\Delta ABS} = 60\ m^2$$

**Ejemplo 7.52** Área de figuras circulares.

Si en la figura adjunta el arco $\overset{\frown}{BC}$ tiene centro en el punto $A$, determine el área de la superficie sombreada.




Solución:




Sea $G$ el área del sector circular $AOC$.
Sea $H$ el área del segmento circular $OAC$.
Sea $I$ el área del triángulo equilátero $OAC$.

El área de la superficie sombreada en la segunda figura es $G + H$.
Pero $H = G - I$.
Se cumple que: $G + H = 2G - I$.
El área de la superficie sombreada original es $2(2G - I) = 4G - 2I$.

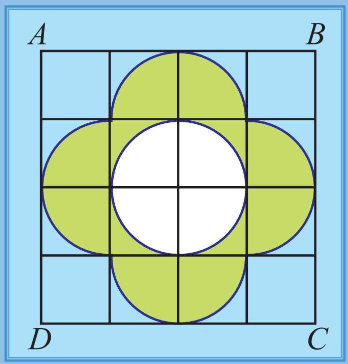
El sector circular $AOC$ tiene un ángulo central cuya medida es $60^o$, por lo tanto $G = \frac{\pi r^2}{6}$.

Además, el área de la superficie del triángulo equilátero $OAC$ es $I = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}$.

Por lo tanto, el área de la superficie pedida es: $4G - 2I = \frac{2\pi r^2}{3} - \frac{\sqrt{3}r^2}{2}$

## **Ejemplo 7.53** Área de figuras circulares.

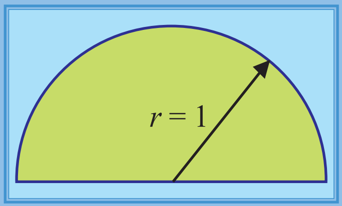
Si el área de la superficie del cuadrado $ABCD$ es $16u^2$ y se divide en 16 cuadrados iguales, calcule el área de la superficie sombreada.



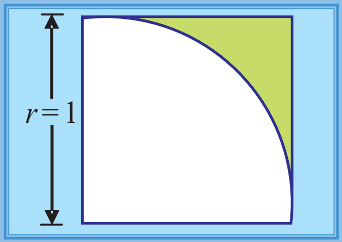

Solución:

Si $ABCD$ es un cuadrado de $16u^2$, cada cuadrado tiene un área de $1u^2$, esto es, longitud de lado igual a 1 unidad.

Sean $A$: Área de la superficie sombreada.
$V$: Área del semicírculo de longitud $r = 1$.
$W$: Área de la superficie del cuadrado – Área del cuarto de círculo.




$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{2}u^2$$




$$W = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = (1)^2 - \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)u^2$$

$$A = 4V + 4W$$

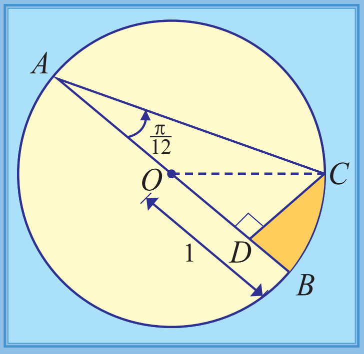
$$A = 4\left(\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = 4\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$$

$$A = (\pi + 4)u^2$$

## **Ejemplo 7.54** Área de figuras circulares.

En la figura adjunta, el radio de la circunferencia mide $1u$ y la medida del ángulo $BAC$ es $\frac{\pi}{12}$ radianes. Encuentre el área de la superficie sombreada.



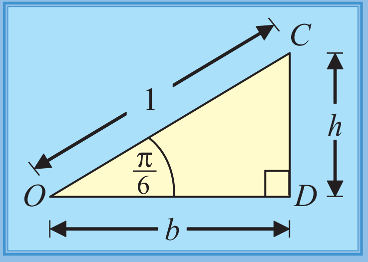

Solución:

$A = A_{\widehat{OCB}} - A_{\Delta OCD}$

$A = \frac{1}{2}\, r^2\theta - \frac{bh}{2}$

Sea $\theta = m(\measuredangle\, BOC)$, por el teorema del ángulo central se cumple que: $\theta = 2m(\measuredangle\, BAC) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} rad.$

El triángulo $OCD$ es rectángulo y podemos aplicar funciones trigonométricas:




$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{1} \qquad cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{b}{1}$

$h = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

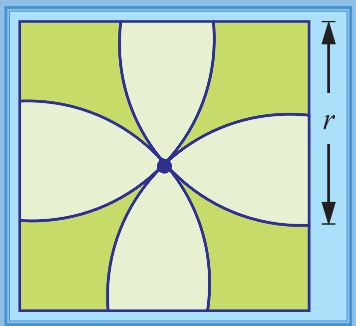
$$A = \frac{1}{2}\,(1)^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

El área de la región sombreada es $\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) u^2$.

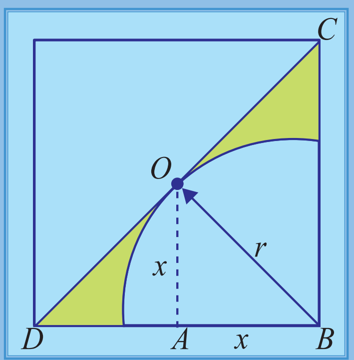
## **Ejemplo 7.55** Área de figuras circulares.

Determine el área de la superficie sombreada en la figura en términos de $r$.

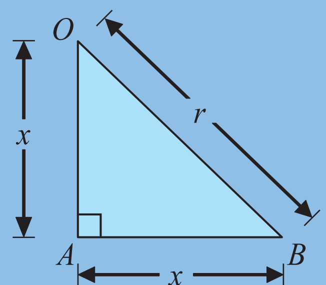



Solución:

Sea $U$ el área de la región mostrada:




Construimos un triángulo rectángulo isósceles:




Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = r^2$$

$$2x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$U$ representa el área de la superficie del triángulo $BCD$ menos el área de un cuarto de círculo.

$$U = \frac{bh}{2} - \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$U = \frac{(2x)(2x)}{2} - \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$U = 2x^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$U = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$$

El área de la superficie sombreada es igual a $4U$:

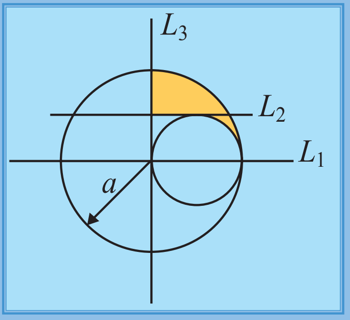
$$A_T = 4U$$

$$A_T = 4\left(\frac{4r^2 - \pi r^2}{4}\right)$$

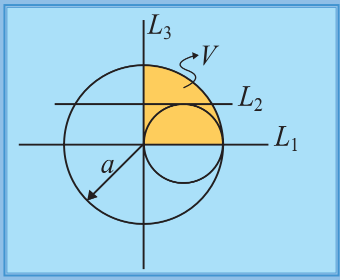
$$A_T = r^2(4 - \pi)u^2$$

## **Ejemplo 7.56** Área de figuras circulares.

En la figura adjunta $L_3 \perp L_1$ y $L_3 \perp L_2$. La circunferencia pequeña es tangente a la circunferencia grande y a las rectas $L_3$ y $L_2$. Se pide calcular el área $U$ de la superficie sombreada.

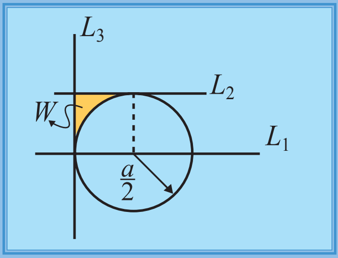


Solución:




Sea $V$ el área del cuarto del círculo de longitud de radio $r = a$.

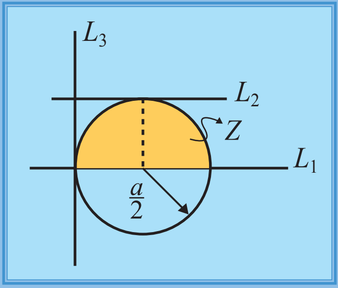
$V = \frac{1}{4}\left[\pi(a)^2\right] = \frac{\pi a^2}{4}$




Sea $W$ el valor de la superficie del cuadrado de longitud de lado $L = \frac{a}{2}$ menos el área del cuarto de círculo de longitud de radio $r = \frac{a}{2}$.

$W = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$

$W = \frac{a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{16}$




Sea $Z$ el área del semicírculo de longitud de radio $r = \frac{a}{2}$.

$Z = \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi a^2}{8}$

El área de la superficie sombreada se puede calcular así: $U = V - W - Z$.

Es decir: $U = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{16} - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{3\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{3\pi}{4} - 1\right)u^2$.