Capítulo 10

Geometría Analítica

Introducción

La geometría analítica es la rama de las matemáticas que usa el álgebra para describir o analizar figuras geométricas. En un sistema de coordenadas cartesianas, un punto del plano queda determinado por dos números, que son su abscisa y su ordenada, recíprocamente, a un par ordenado de números corresponde un único punto del plano. Consecuentemente, el sistema cartesiano establece una correspondencia biunívoca entre un concepto geométrico, como es un punto del plano; y un concepto algebraico, como es un par ordenado. Esta correspondencia constituye el fundamento de la geometría analítica.

El razonamiento anterior es válido también para un punto en el espacio y una terna ordenada de números.

Lo novedoso de la geometría analítica es que permite representar figuras geométricas mediante ecuaciones del tipo $R(x, y) = 0$, donde R representa una relación. Los problemas de la realidad física que nos rodea sobre el cálculo de distancias u otras mediciones, pueden ser resueltos gracias a la geometría analítica; para el efecto, el sistema de referencia es muy importante y debe ser elegido arbitrariamente siempre y cuando ayude a representar de la forma más sencilla posible las relaciones algebraicas.

Ernst Zermelo, matemático alemán (1871-1953)

En particular, las rectas pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de dos variables (x, y) de primer grado, por ejemplo: $2x + 6y = 0$; y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de segundo grado de dos variables (x, y), como es el caso de la circunferencia, $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Este hecho no fue visto con nitidez hasta el desarrollo del álgebra moderna y de la lógica matemática, entre finales del siglo XIX y principios

Adolf Fraenkel, matemático alemán (1891-1965)

del siglo XX, cuando a partir de la axiomática propuesta por los matemáticos alemanes Zermelo y Fraenkel, se pudo entender por qué la geometría de los griegos puede desprenderse de sus enunciados y convertirse en el estudio de las relaciones que existen entre polinomios de primer y segundo grado.

10.1 Rectas en el plano

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar los elementos que definen una recta en el plano en forma vectorial, paramétrica, general y de punto-pendiente.
* Dados dos puntos en el plano, calcular la distancia entre ellos y determinar su punto medio.
* Obtener la ecuación de una recta en el plano y graficarla, dadas condiciones sobre los elementos que la definen.
* Identificar condiciones de la pendiente para el paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
* Identificar el ángulo y punto de intersección entre dos rectas secantes.
* Aplicar el teorema de la distancia entre un punto y una recta.

La **recta** es la línea más corta que une dos puntos y constituye el lugar geométrico de los puntos en el plano que están en una misma dirección. Es uno de los entes geométricos fundamentales, junto al punto y el plano. Tal como se ha mencionado en este texto, estos conceptos son considerados primitivos, o sea que no es posible definirlos en base a otros elementos ya conocidos. Sin embargo, es posible elaborar definiciones de ellos, en base a los siguientes postulados característicos, que determinan relaciones entre los entes fundamentales:

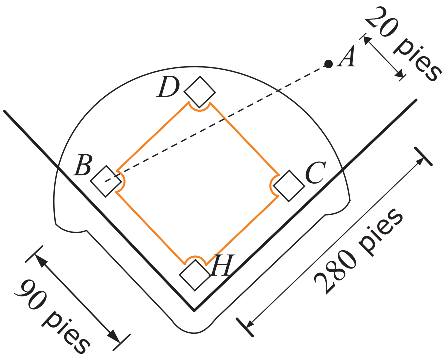
1. El punto es el inicio de todo.
2. Existen infinitos puntos e infinitas rectas.
3. Un punto pertenece a infinitas rectas.
4. Dos puntos determinan una única recta en el plano al cual pertenecen.
5. La recta determinada por dos puntos en un plano, pertenece al mismo plano.

Para continuar con el desarrollo del presente tema, ahora nos proponemos analizar algunos conceptos relevantes.

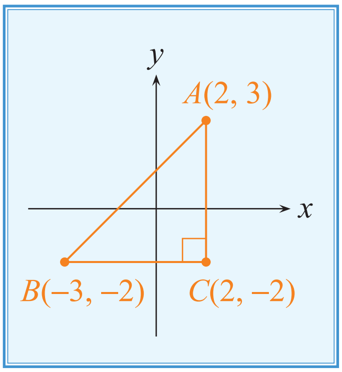
Geometría Analítica

10.1.1 Distancia entre dos puntos

A partir del concepto de un punto como una pareja ordenada $P(x, y)$, si se conocen las coordenadas de dos puntos, se puede determinar la distancia entre ellos midiendo la longitud del segmento de recta que los une. Por ejemplo, si queremos saber cuánto ha recorrido la pelota lanzada desde el punto A por un jardinero hasta la tercera base (punto B) en una cancha de béisbol (véase la figura), esto será posible si aplicamos el concepto de distancia entre dichos puntos.



A continuación se describe el procedimiento para encontrar la longitud de un segmento que no es paralelo a los ejes coordenados.



Si se desea encontrar $\overline{AB}$, podemos aplicar el siguiente procedimiento.

Sea $\overline{BC}$ un segmento paralelo al eje horizontal y $\overline{AC}$ un segmento paralelo al eje vertical, entonces, $\overline{BC} = |2-(-3)| = 5$ y $\overline{AC} = |3-(-2)| = 5$.

Como ABC es un triángulo rectángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$$

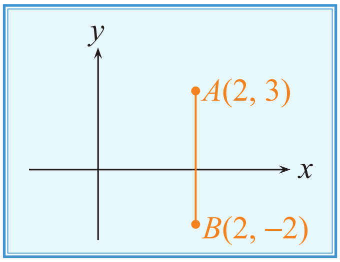
Por lo tanto:

$$\overline{AB}^2 = (5)^2 + (5)^2$$

O bien:

$$\overline{AB} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

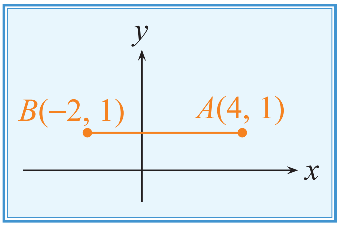
Para determinar la longitud de un segmento que es paralelo al eje vertical:



$$\overline{AB} = |3-(-2)|$$
$$\overline{AB} = |5|$$
$$\overline{AB} = 5$$

Si $\overline{AB}$ es paralelo al eje vertical y las coordenadas de A y B son (x_1, y_1) y (x_1, y_2), entonces $\overline{AB} = |y_1 - y_2|$.

Para determinar la longitud de un segmento que es paralelo al eje horizontal:



$$\overline{AB} = |4-(-2)|$$
$$\overline{AB} = |6|$$
$$\overline{AB} = 6$$

Si $\overline{AB}$ es paralelo al eje horizontal y las coordenadas de A y B son (x_1, y_1) y (x_2, y_1), entonces $\overline{AB} = |x_1 - x_2|$.

Definición 10.1 (Distancia entre dos puntos)

Si A tiene coordenadas (x_1, y_1) y B tiene coordenadas (x_2, y_2), entonces la distancia entre A y B, está dada por: $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

En esta definición, el orden en que se seleccionan los puntos no influye en el valor de la distancia.

Ejemplo 10.1 Distancia entre dos puntos.

Emplee la fórmula de la distancia entre dos puntos para determinar si el ΔABC bosquejado en la figura, es isósceles.

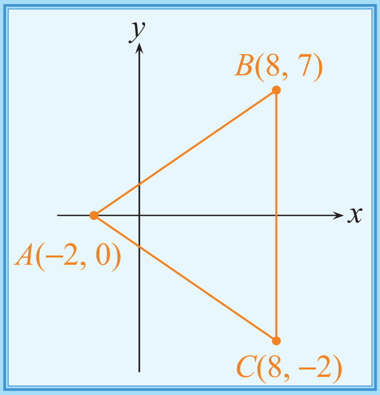
Solución:

Se empieza por determinar las longitudes de los tres lados.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-8)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{149}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{0^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{81}$$

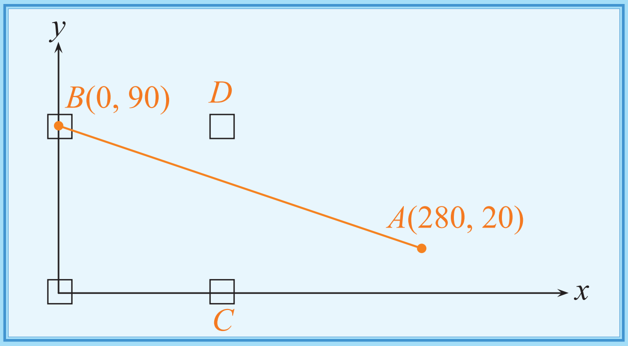
$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-8)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{104}$$



No existen dos lados que tengan la misma longitud, por lo tanto, el ΔABC no es triángulo isósceles.

Ejemplo 10.2 Distancia entre dos puntos.

Volviendo a la pregunta planteada al inicio de esta sección sobre la distancia que recorrió la pelota de béisbol y utilizando un sistema de coordenadas como el de la figura, con origen en *home*, el jardinero está en la posición del punto $A(280, 20)$, mientras que la tercera base se ubica en la posición del punto $B(0, 90)$. Tenemos el siguiente bosquejo.



Solución:

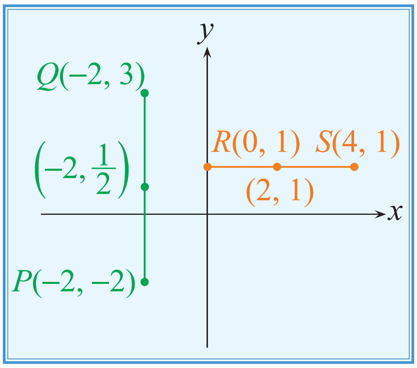
Utilizando la definición de distancia entre A y B, tenemos:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(280-0)^2 + (20-90)^2} \\ &= \sqrt{(280)^2 + (-70)^2} \\ &= \sqrt{78400 + 4900} \\ &= \sqrt{83300} \\ d(A, B) &= 10\sqrt{833} \end{aligned}$$

La pelota recorrió aproximadamente 289 pies.

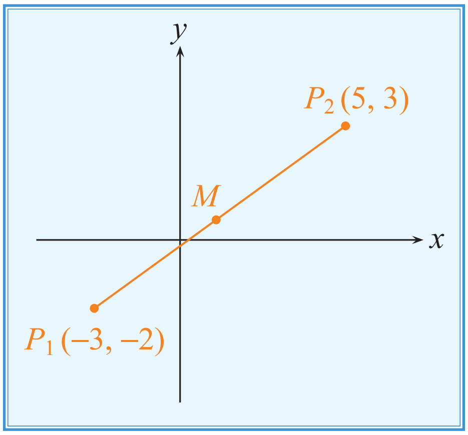
10.1.2 Punto medio de un segmento de recta

En la figura observe que los puntos $(2, 1)$ y $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ equidistan de los extremos de los segmentos a los cuales pertenecen $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente.



Para el segmento horizontal $\overline{RS}$, la abscisa del punto $(2, 1)$ es la semisuma de las abcisas de los extremos y la ordenada se mantiene. Para el segmento vertical $\overline{PQ}$, la ordenada del punto $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ es la semisuma de las ordenadas de los extremos y la abscisa se mantiene.

Este mismo concepto puede aplicarse para otros segmentos de recta. Sean $P_1(x_1, y_1)$ las coordenadas de un extremo y $P_2(x_2, y_2)$ las coordenadas del otro extremo, tal como se muestra en la siguiente figura.



Con $P_1(-3, -2)$ y $P_2(5, 3)$ se verifica que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Es decir, las coordenadas del punto M son $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, el cual equidista de P_1 y de P_2.

A continuación se enunciará y demostrará un teorema con el que se generaliza este resultado.

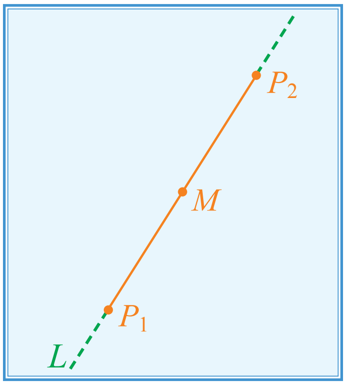
Teorema 10.1 (Punto medio de un segmento de recta)

Si las coordenadas de los extremos del segmento $\overline{P_1 P_2}$ son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio M de $\overline{P_1 P_2}$ son:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Demostración:
Como se analizará en la sección 10.1.3, la ecuación de la recta L que contiene a los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$



Debido a que el punto $M(x_0, y_0)$ pertenece a la recta L, tenemos:

$$y_0 - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_0 - x_1)$$

$$\Rightarrow y_0 = \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_0 - x_1)\right] + y_1 \qquad (1)$$

Como $M(x_0, y_0)$ es el punto medio entre P_1 y P_2:

$$d(P_1, M) = d(M, P_2)$$

Aplicando la definición de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}$$

Elevando al cuadrado y transponiendo términos:

$$(x_1 - x_0)^2 - (x_2 - x_0)^2 = (y_2 - y_0)^2 - (y_1 - y_0)^2$$

Factorizando:

$$[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_0)]\,[(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)] = [(y_2 - y_0) + (y_1 - y_0)]\,[(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)]$$

Simplificando:

$$[(x_1 + x_2) - 2x_0]\,(x_1 - x_2) = [(y_1 + y_2) - 2y_0]\,(y_2 - y_1)$$

Se reemplaza el valor de y_0 descrito por la ecuación (1), y se obtiene:

$$[(x_1 + x_2) - 2x_0](x_1 - x_2) = \left[(y_1 + y_2) - 2\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_0 - x_1) - 2y_1\right](y_2 - y_1)$$

A continuación se despeja x_0:

$$[2x_0-(x_1+x_2)](x_2-x_1)=\left[(y_1+y_2)-2\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x_0-x_1)-2y_1\right](y_2-y_1)$$

$$[2x_0-(x_1+x_2)](x_2-x_1)^2=[(y_1+y_2)(x_2-x_1)-2(y_2-y_1)(x_0-x_1)-2y_1(x_2-x_1)](y_2-y_1)$$

$$2x_0(x_2-x_1)^2-(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2=(y_2+y_1)(y_2-y_1)(x_2-x_1)-2(y_2-y_1)^2(x_0-x_1)-2y_1(x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

$$2x_0(x_2-x_1)^2+2(y_2-y_1)^2(x_0-x_1)=[(y_2+y_1)(y_2-y_1)(x_2-x_1)-2y_1(y_2-y_1)(x_2-x_1)]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0(x_2-x_1)^2+2x_0(y_2-y_1)^2-2x_1(y_2-y_1)^2=[(y_2-y_1)(x_2-x_1)(y_2+y_1-2y_1)]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(y_2-y_1)(x_2-x_1)(y_2-y_1)+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2+2x_1(y_2-y_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(y_2-y_1)^2(x_2-x_1)+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2+2x_1(y_2-y_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=[(y_2-y_1)^2(x_2-x_1)+2x_1(y_2-y_1)^2]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=[(y_2-y_1)^2(x_2-x_1+2x_1)]+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(y_2-y_1)^2(x_1+x_2)+(x_1+x_2)(x_2-x_1)^2$$

$$2x_0[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=(x_1+x_2)[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]$$

Simplificando el factor $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]$ de ambos miembros, se tiene: $2x_0=x_1+x_2$.

Luego, $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

Para encontrar y_0 se reemplaza en (1):

$$y_0=\left[\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)\right]+y_1$$

$$y_0=\left[\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x_1+x_2-2x_1}{2}\right)\right]+y_1$$

$$y_0=\left[\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right]+y_1$$

$$y_0=\frac{y_2-y_1}{2}+y_1$$

$$y_0=\frac{y_2-y_1+2y_1}{2}$$

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad \therefore\ M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

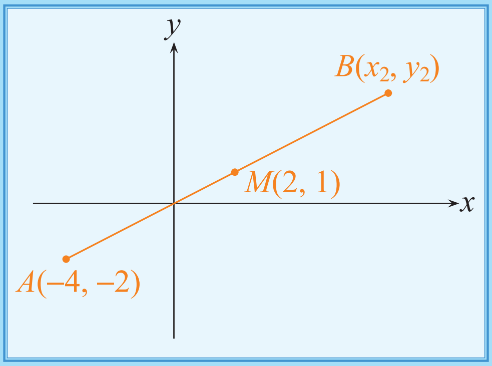
Con esto se demuestra que el punto M equidista de los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$.

Ejemplo 10.3 Punto medio de un segmento de recta.

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, donde $(-4, -2)$ son las coordenadas de A y $(2, 1)$ son las coordenadas de M, determine las coordenadas de B.

Solución:

Sean (x_2, y_2) las coordenadas de B. Por el teorema 10.1, $2 = \frac{-4 + x_2}{2}$ y $1 = \frac{-2 + y_2}{2}$.



Despejando se obtiene $x_2 = 8$, $y_2 = 4$. Las coordenadas de B son $(8, 4)$.

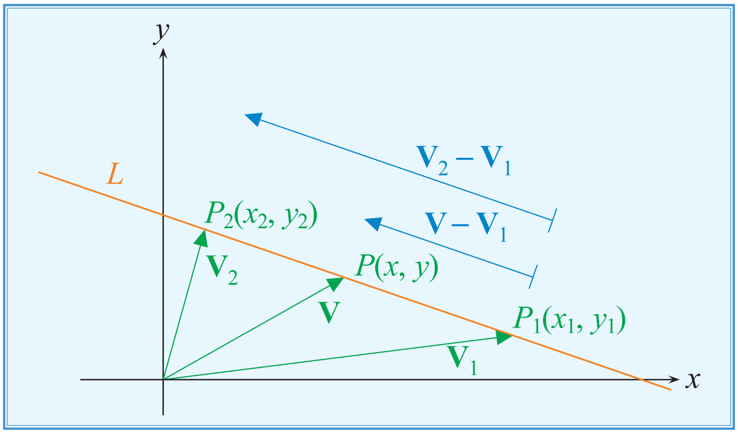
10.1.3 Ecuación de la recta

Si tomamos un sistema de coordenadas en dos dimensiones, a cada punto del plano le corresponden dos números reales o coordenadas x e y. Ocurre además que con cada punto está asociado un vector y solamente uno: aquel que parte del origen y termina en el punto.

En base a los postulados que se mencionaron al inicio de esta sección, una recta se determina completamente por dos puntos distintos, es decir, dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que pertenecen a $\mathbb{R}^2$, existe una sola recta que contiene a ambos.

Apoyándonos en el análisis vectorial, tomaremos un punto arbitrario $P(x, y) \in L$ y su vector asociado respectivo $\mathbf{V} = (x, y)$, para luego establecer la relación necesaria entre dicho punto P con la recta L.

Tomando también la referencia de los puntos $P_1 \in L$ y $P_2 \in L$, construimos los vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, que nos servirán para calcular los vectores $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V} - \mathbf{V}_1$.



Con esta construcción vectorial podemos concluir que para que el punto $P(x, y) \in L$, es necesario y suficiente que el vector $\mathbf{V} - \mathbf{V}_1$ sea paralelo al vector $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$:

$$P(x, y) \in L \equiv (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)$$

Además, por la definición de vectores paralelos dada en el capítulo anterior:

$$(\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 \parallel \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \equiv (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 = \mu\,(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1))$$
$$[\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 = \mu(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)] \equiv [(x - x_1, y - y_1) = \mu\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)]$$

Con lo cual:

$$x - x_1 = \mu\,(x_2 - x_1)$$
$$y - y_1 = \mu\,(y_2 - y_1)$$

El número $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro que caracteriza al punto P, ya que para distintos puntos en el plano, μ toma diferentes valores. De aquí que estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas** de la recta.

Despejando algebraicamente este parámetro μ en las últimas ecuaciones, tenemos que:

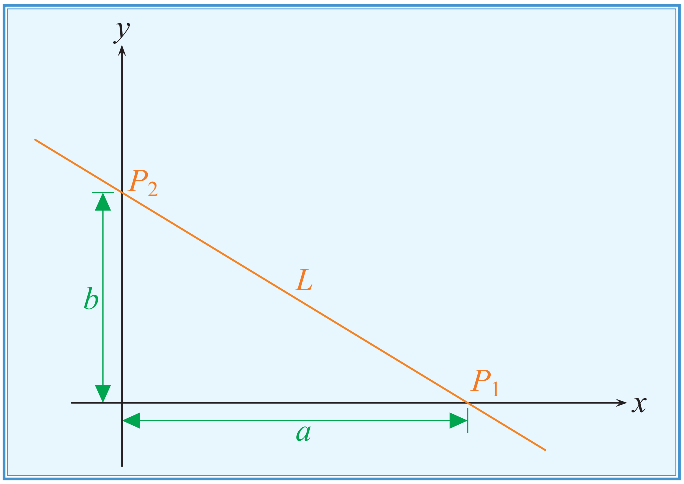
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Numéricamente, esta ecuación tiene sentido cuando $x_2 \neq x_1$ y $y_2 \neq y_1$.

Esta igualdad define una ecuación que describe el conjunto de puntos pertenecientes a la recta L, cuando se conocen las coordenadas de dos puntos que pertenecen a ella, es decir:

$$\boxed{P(x, y) \in L \equiv \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right)}$$

Si se conocen las intersecciones con los ejes coordenados:



Podemos considerar que la recta L contiene a los puntos $P_1(a, 0)$ y $P_2(0, b)$. De esta manera, tenemos que:

$$P(x, y) \in L \equiv \left(\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}\right)$$

Esto es:

$$P(x, y) \in L \equiv \left(-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}\right)$$

Finalmente:

$$\boxed{P(x, y) \in L \equiv \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right)}$$

Esta última ecuación se denomina **forma simétrica** de la ecuación de la recta.

En la expresión que se dedujo para la ecuación de la recta: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, los números x_1, y_1, x_2 e y_2 son las coordenadas de los puntos dados P_1 y P_2, por lo tanto, puede transformarse en:

$$P(x, y) \in L \equiv ((y_2-y_1)(x-x_1) = (x_2-x_1)(y-y_1))$$
$$P(x, y) \in L \equiv ((y_2-y_1)\,x - (x_2-x_1)\,y - (y_2-y_1)\,x_1 + (x_2-x_1)\,y_1 = 0)$$

Si reemplazamos:

$$y_2 - y_1 = a$$
$$-(x_2-x_1) = b$$
$$-(y_2-y_1)\,x_1 + (x_2-x_1)\,y_1 = c$$

Podemos escribir:

$$\boxed{P(x, y) \in L \equiv ax + by + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}}$$

La cual representa la **ecuación general** de una recta en el plano.

Ya que: $(y_2-y_1)(x-x_1) = (x_2-x_1)(y-y_1)$

Y reemplazando los valores de a y b, se tiene:

$$a(x-x_1) = -b(y-y_1)$$
$$a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0$$

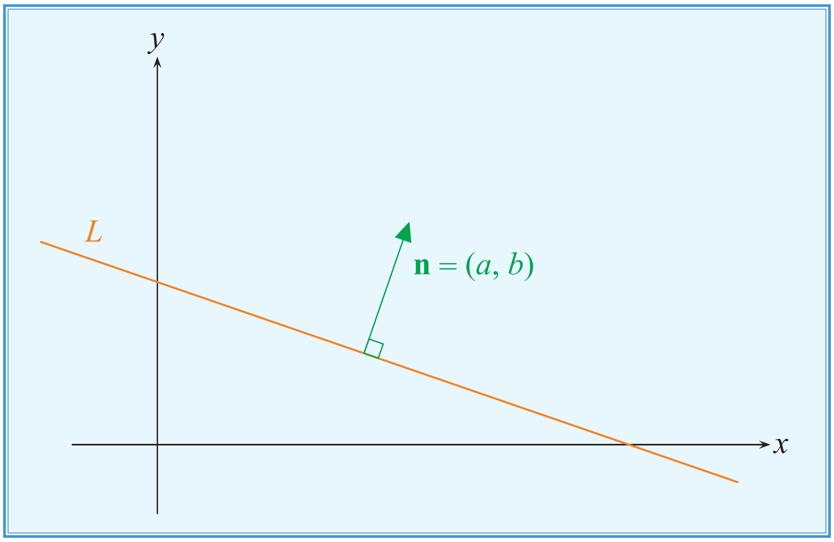
Recordando que $\mathbf{V} - \mathbf{V}_1 = (x-x_1, y-y_1)$ es un vector paralelo en la dirección de la recta L, y considerando el vector $\mathbf{n} = (a, b)$, puede observarse que la última expresión es:

$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1) = 0$$

Esto es:

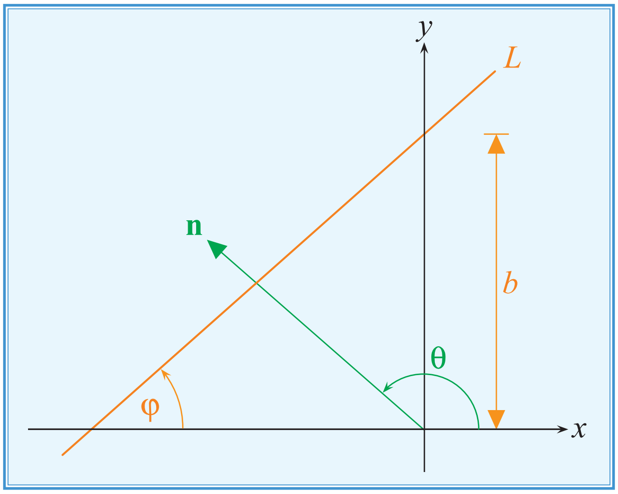
$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1) = 0 \Rightarrow (\mathbf{n} \perp (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1))$$

Con este análisis, podemos concluir que el vector $\mathbf{n} = (a, b)$ es ortogonal a la recta L y se lo denomina **vector normal** a la recta.



Otra forma de definir una recta es conociendo su intersección con el eje Y y la dirección que forma con el semieje X positivo.

Si queremos determinar la ecuación de la recta que interseca el eje Y a una distancia b del origen y forma un ángulo de medida φ con la dirección positiva del eje X, se debe determinar las coordenadas del vector normal unitario $\mathbf{n}$.



El vector $\mathbf{n}$ es normal a la recta, la cual forma un ángulo de medida φ con el eje X. θ es la medida del ángulo que forma $\mathbf{n}$ con el semieje X positivo, cuya medida es $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$. Las coordenadas de este vector son:

$$\mathbf{n} = (cos(\theta), sen(\theta)).$$

Puesto que:

$$cos(\theta) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\,sen(\varphi)$$

$$sen(\theta) = sen\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = cos(\varphi)$$

Luego:

$$\mathbf{n} = (-\,sen(\varphi),\ cos(\varphi))$$

De esta manera, la ecuación de la recta L es:

$$(-\,sen(\varphi))x + (cos(\varphi))y + c = 0$$

Para encontrar el valor c, se conoce que $P(0, b) \in L$:

$$-\,(sen(\varphi))(0) + (cos(\varphi))(b) + c = 0$$

Entonces:

$$c = -\,b\ cos(\varphi)$$

Finalmente:

$$(-\,sen(\varphi))x + (cos(\varphi))y - b\ cos(\varphi) = 0$$

Si $cos(\varphi) \neq 0$, podemos dividir por este factor:

$$-\frac{sen(\varphi)}{cos(\varphi)}x + y - b = 0$$

O también:

$$y = \frac{sen(\varphi)}{cos(\varphi)}x + b$$

$$\boxed{P(x, y) \in L \equiv y = (tan(\varphi))\ x + b}$$

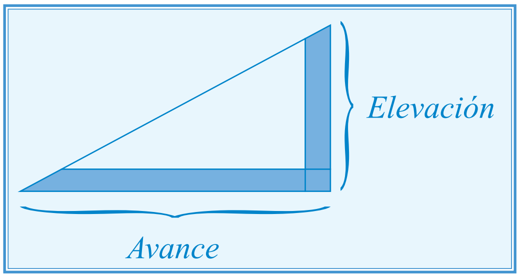
Esta expresión representa la ecuación de una recta, cuando se conoce la medida del ángulo φ que forma con respecto a la dirección positiva del eje X, y que interseca el eje Y a una distancia b del origen.

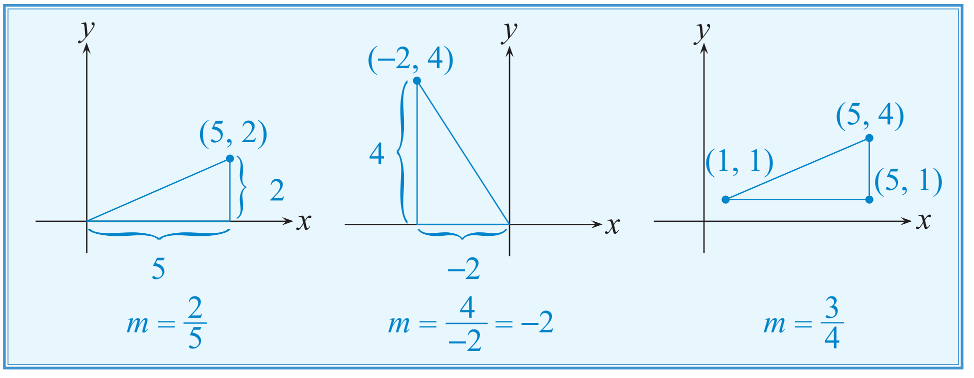
Cuando $tan(\varphi)$ no está definida, la recta es paralela al eje Y y su ecuación es de la forma $x = k$, $k \in \mathbb{R}$.

10.1.4 Pendiente de una recta

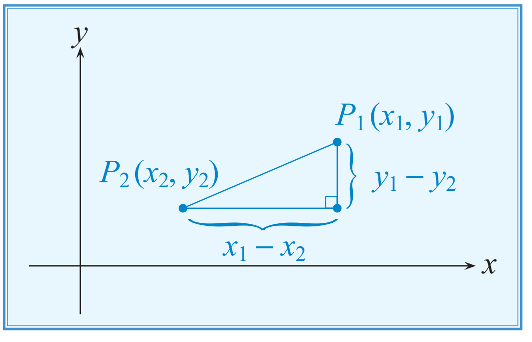
La tangente del ángulo que una recta forma con la dirección positiva del eje X se denomina **pendiente de la recta**, la cual puede denotarse por $m = tan(\varphi)$.

La pendiente de una recta o de un segmento puede considerarse como la razón $\frac{elevación}{avance}$, tal como aparece en la figura.





En general, la pendiente de una recta está determinada por el cambio en la distancia vertical ($y_1 - y_2$), dividida entre el cambio en la distancia horizontal ($x_1 - x_2$).



Definición 10.2 (Pendiente de una recta)

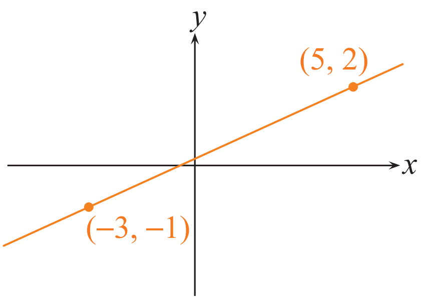
Si P_1 y P_2 tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, entonces la pendiente m de la recta que los contiene es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \text{ si } x_1 - x_2 \neq 0.$$

Si $y_1 = y_2$, su pendiente es cero. Si $x_1 = x_2$, la pendiente de la recta usualmente se denota por el símbolo "∞" y se dice que es infinita; ∞ no es un número, es una forma de decir que no está definida.

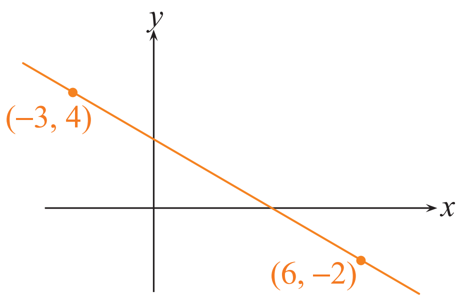
Los ejemplos siguientes muestran que la pendiente de una recta puede ser positiva, negativa, cero o infinita.

Recta con pendiente positiva



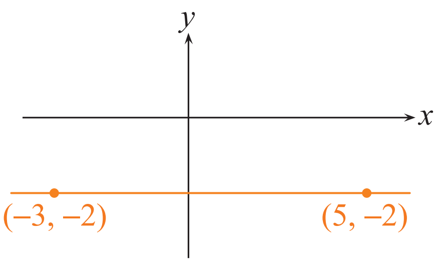
$$m = \frac{2-(-1)}{5-(-3)} = \frac{3}{8}$$

Recta con pendiente negativa



$$m = \frac{4-(-2)}{-3-6} = -\frac{2}{3}$$

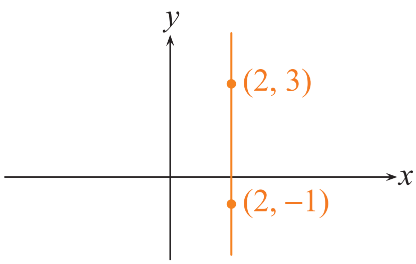
Recta con pendiente cero



$$m = \frac{-2-(-2)}{5-(-3)} = \frac{0}{8} = 0$$

Si es paralela al eje X, $m = 0$.

Recta con pendiente infinita



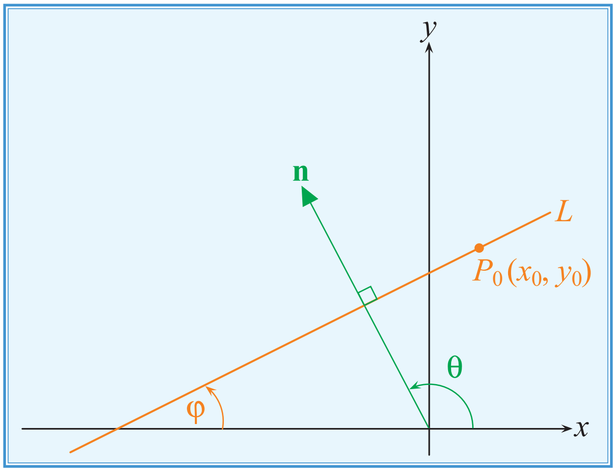
$$m = \frac{3-(-1)}{2-2} = \frac{4}{0}$$

Si es paralela al eje Y, $m = \infty$.

Una recta paralela al eje X se representa de la forma $y = k$, donde k es una constante real. Su interpretación práctica está en el hecho que la variable y no varía si la variable x cambia. Esta situación se presenta, por ejemplo, en un móvil con velocidad constante en el plano Velocidad vs. Tiempo.

Una recta paralela al eje Y, se representa de la forma $x = k$, donde k es una constante real. Su interpretación práctica está en el hecho que la variable x no varía si la variable y cambia. Una situación que refleja este comportamiento es la demanda de combustible en el plano Precio vs. Cantidad.

Para encontrar la ecuación de la recta de pendiente m que contiene al punto $P_0(x_0, y_0)$, partimos de las coordenadas de su vector normal unitario.



$$\mathbf{n} = (-sen(\varphi), cos(\varphi))$$

La ecuación de la recta buscada será del tipo:

$$(-sen(\varphi))x + (cos(\varphi))y + c = 0$$

Si suponemos que $cos(\varphi) \neq 0$, podemos escribir:

$$(-tan(\varphi))x + y + \frac{c}{cos(\varphi)} = 0$$

O también:

$$y = mx + b$$

Y así:

$$b = y_0 - mx_0$$

Finalmente:

$$P(x, y) \in L \equiv y - y_0 = m(x - x_0)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de la recta **punto-pendiente.**

Cabe recordar que la forma $y = mx + b$ es equivalente a la forma $y = (tan(\varphi))x + b$, obtenida anteriormente, por lo que m es la tangente del ángulo de medida φ que la recta forma con el semieje X positivo.

También es cierto que toda recta en el plano se representa por una ecuación general del tipo $ax + by + c = 0$ y viceversa.

Despejando y se obtiene $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, por lo que $m = -\frac{a}{b}$, cuando $b \neq 0$.

Ejemplo 10.4 Ecuación de una recta.

Determine la ecuación de la recta L que contiene al punto $P_0(4, 2)$ y que es paralela al eje X.

Solución:

Encontraremos la ecuación de la recta L, conociendo un punto que pertenece a ella y su pendiente.

El punto que contiene es $P_0(4, 2)$ y su pendiente será $m = 0$, ya que es paralela al eje X.

Luego, aplicando la forma de la ecuación para L, tenemos:

$P\,(x, y) \in L \equiv y - y_0 = m(x - x_0)$

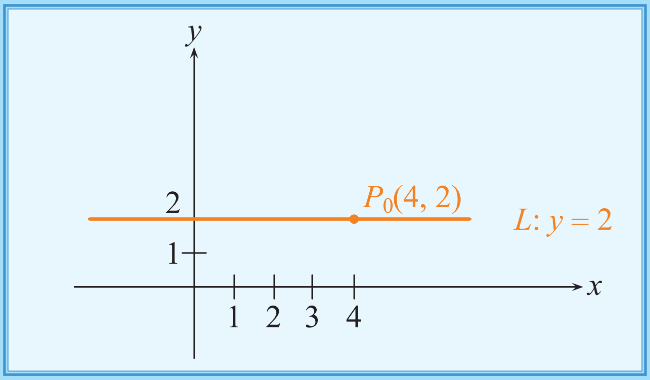
$P_0(4, 2) \in L \equiv y - 2 \ = 0(x - 4)$

La ecuación de la recta L sería:

L: $y = 2$

Nótese que todos los puntos cuya ordenada es 2, pertenecen a la recta solicitada.

Veamos la gráfica de L:



Ejemplo 10.5 Ecuación de una recta.

Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $P_0(3, 4)$ y que es paralela al eje Y.

Solución:

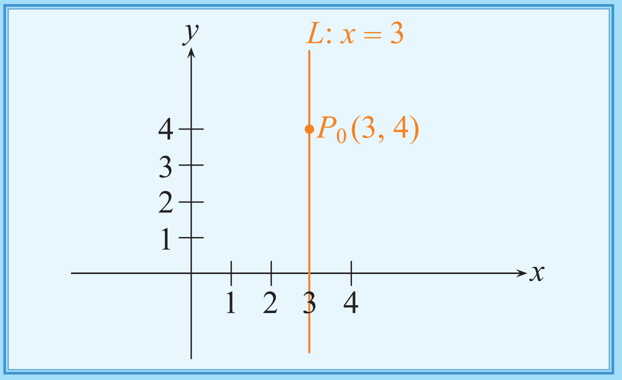
Encontraremos la ecuación de la recta L, conociendo un punto que pertenece a ella y su pendiente.

El punto que contiene es $P_0(3, 4)$, y su pendiente $m = \infty$; ya que es paralela al eje Y.

La ecuación de la recta L solicitada será:

$P(x, y) \in L \equiv (x = 3)$

Analizando la gráfica de L, tenemos:



Nótese que todos los puntos cuya abscisa es 3, pertenecen a la recta solicitada.

Ejemplo 10.6 Pendiente e intersecciones de una recta.

Determine el valor de la pendiente y las intersecciones con los ejes coordenados, de la recta cuya ecuación es: $3x + 2y = 6$.

Solución:

Para obtener el valor de la pendiente de la recta, comparamos esta ecuación con la de una recta cuando se conoce un punto que pertenece a ella y su pendiente; así:

$P(x, y) \in L \equiv (y - y_0) = m(x - x_0)$

Despejando y de la ecuación dada:

$2y = 6 - 3x$

$y = 3 - \frac{3}{2}x$

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

Luego, su pendiente $m = -\frac{3}{2}$.

Ahora determinamos las intersecciones con los ejes:

- Con el eje X:

La intersección con el eje X ocurrirá cuando $y = 0$, así:

$0 = -\frac{3}{2}x + 3$

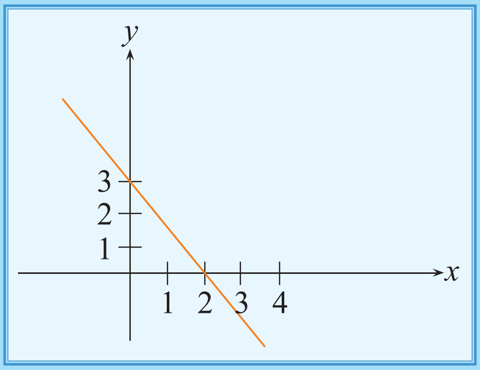
$$-\frac{3}{2}x = -3 \qquad \therefore\ x = 2$$

- Con el eje Y

La intersección con el eje Y ocurrirá cuando $x = 0$, así:

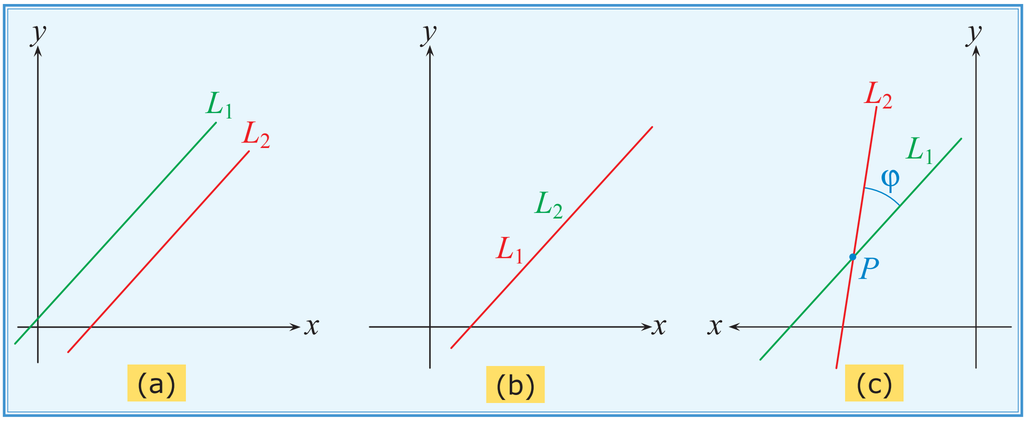
$$y = -\frac{3}{2}(0) + 3 \qquad \therefore\ y = 3$$

Por lo tanto, la recta cuya ecuación se solicita tendrá por pendiente el valor de $-\frac{3}{2}$, y sus intersecciones con los ejes estarán dadas por los puntos $P_1(2, 0)$ y $P_2(0, 3)$, tal como se puede observar en su gráfica:



Nótese que la ecuación de la recta puede ser expresada así: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, la cual se indicó que constituye su forma simétrica, en donde los denominadores de las fracciones que contienen x, y, representan las intersecciones con los ejes coordenados.

Si al mismo tiempo consideramos dos rectas en el plano, solamente una de las siguientes situaciones ha de ocurrir:



En el caso (a) las rectas L_1 y L_2 se conocen como **paralelas**; el caso (b) presenta rectas L_1 y L_2, que son **coincidentes**; el caso (c) presenta rectas L_1 y L_2, **secantes**.

Ahora queremos determinar en cada caso, qué relaciones hay entre los coeficientes de las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2.

$P(x, y) \in L_1 \equiv (a_1 x + b_1 y + c_1 = 0)$
$P(x, y) \in L_2 \equiv (a_2 x + b_2 y + c_2 = 0)$

Empecemos por el caso (a); si $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ es el vector normal a L_1 y $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$, el vector normal a L_2 y además sabemos que si $L_1 \parallel L_2$, se debe cumplir que $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$:

$$(\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2) \equiv (\mathbf{n}_1 = \mu \mathbf{n}_2)$$

Es decir:

$$(a_1 = \mu a_2) \wedge (b_1 = \mu b_2)$$

En otras palabras, dos rectas L_1 y L_2 son paralelas, si y sólo si los coeficientes de las variables x, y, en sus ecuaciones algebraicas, son respectivamente proporcionales:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \mu$$

Con esto se deduce que $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, y por tanto, $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$.

De la ecuación general de una recta se sabe que m es igual a $-\frac{a}{b}$. Por lo tanto, se demuestra que $m_1 = m_2$, es decir, que las pendientes de dos rectas paralelas son iguales.

Si, a más de esto, se cumple que:

$$\frac{c_1}{c_2} = \mu$$

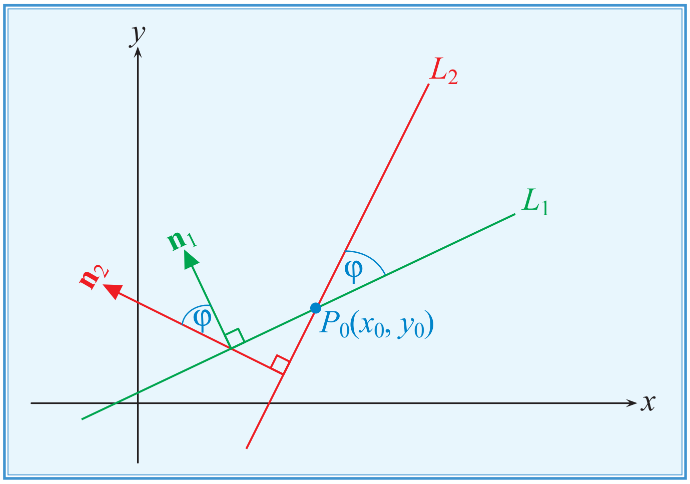
tendremos el caso (b), y ambas rectas serán coincidentes, es decir, describirán la misma recta.

Teorema 10.2 (Pendiente de rectas paralelas)

Las pendientes de dos rectas paralelas entre sí tienen el mismo valor.

En el caso (c) se dan algunas situaciones de interés, como el ángulo que forman las dos rectas al intersecarse y el punto en el que se intersecan.

La medida del ángulo φ, formado por las rectas L_1 y L_2 (o su suplemento), puede calcularse mediante el siguiente procedimiento:



En primer lugar, conviene observar que los vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ deben formar entre sí el mismo ángulo de medida φ (o su suplemento), si $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$:

$$\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = \|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\| \, cos(\varphi)$$

$$cos(\varphi) = \frac{\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|}$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|}\right)$$

Las coordenadas del punto de intersección $P_0(x_0, y_0)$ de las rectas L_1 y L_2 se obtienen construyendo el siguiente S.E.L.:

$$((P_0(x_0, y_0) \in L_1) \wedge ((P_0(x_0, y_0) \in L_2) \equiv \begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

El problema geométrico de determinar el punto de intersección de L_1 y L_2 es equivalente al problema algebraico de encontrar las soluciones del S.E.L.

Para el caso de rectas secantes, el sistema es consistente y tendrá como solución única el par ordenado (x_0, y_0).

En el caso de dos rectas paralelas no coincidentes, el sistema es inconsistente, y para el caso de rectas coincidentes, el sistema es consistente pero tendrá infinitas soluciones.

Cuando las rectas son secantes, puede ocurrir que $L_1 \perp L_2$, en este caso determinaremos la relación que existe entre las pendientes m_1 y m_2.

$$P(x, y) \in L_1 \equiv (y = m_1 x + b_1) \equiv (m_1 x - y + b_1 = 0)$$
$$P(x, y) \in L_2 \equiv (y = m_2 x + b_2) \equiv (m_2 x - y + b_2 = 0)$$

L_1 tiene el vector normal $\mathbf{n}_1 = (m_1, -1)$.

L_2 en cambio, tiene $\mathbf{n}_2 = (m_2, -1)$.

Por condición, $L_1 \perp L_2$, y así:

$$(L_1 \perp L_2) \Rightarrow (\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2) \Rightarrow (\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = 0)$$
$$m_1 m_2 + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Teorema 10.3 (Pendiente de rectas perpendiculares)

El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares entre sí es -1.

Ejemplo 10.7 Rectas en el plano.

Sean las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1 : 2x - y + 3 = 0$$
$$L_2 : x + 2y - 2 = 0$$

Determine la medida del ángulo de intersección de las rectas L_1 y L_2 y las coordenadas del punto de intersección.

Solución:

El vector normal a la recta L_1 es $\mathbf{n}_1 = (2, -1)$, y el normal a la recta L_2 es $\mathbf{n}_2 = (1, 2)$

$$cos(\varphi) = \frac{(\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2)}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|} = 0$$

Puesto que $cos(\varphi) = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, a fin de encontrar las coordenadas del punto $P_0(x_0, y_0)$, resolvamos el S.E.L.:

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 3 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema se puede concluir que $y_0 = 2x_0 + 3$. Utilizando esta información en la segunda ecuación.

$$x_0 + 2(2x_0 + 3) - 2 = 0$$

Es decir:

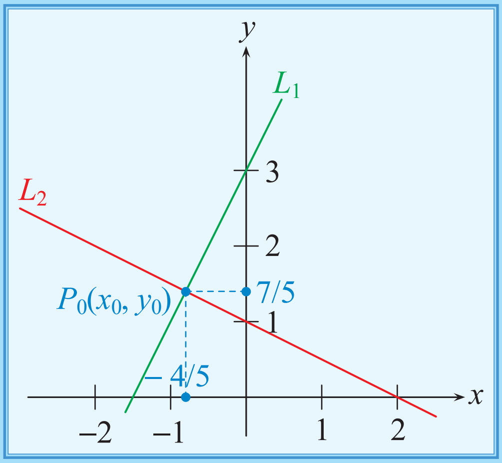
$$5x_0 = -4 \Rightarrow x_0 = -\frac{4}{5}$$

De esta manera:

$$y_0 = 2\left(-\frac{4}{5}\right) + 3 = \frac{7}{5}$$

Finalmente:

$$P_0\left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

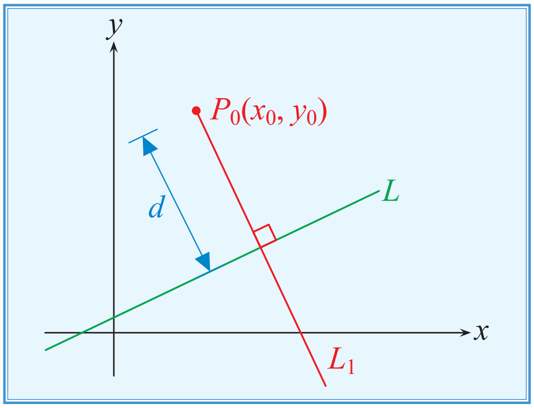


10.1.5 Distancia de un punto a una recta

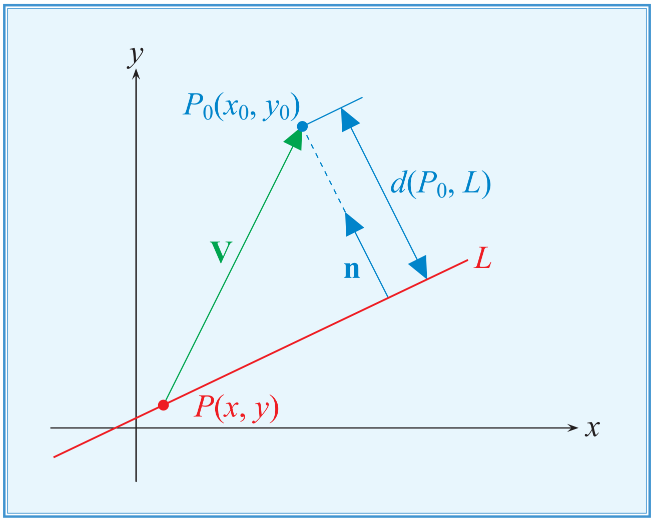
Supongamos que $\neg(P_0(x_0, y_0) \in L)$, en donde $(P(x, y) \in L) \equiv (ax + by + c = 0)$, nos proponemos encontrar la mínima distancia del punto P_0 a la recta L, denotada por $d(P_0, L)$.

Conviene recalcar que la distancia $d(P_0, L)$ siempre es positiva. Además, esta distancia se mide perpendicularmente a la recta.

Una opción para resolver este problema sería construir una recta perpendicular L_1 a la dada que contenga el punto $P_0(x_0, y_0)$, y calcular el punto de intersección con la recta. La distancia buscada se encontraría como la distancia entre los puntos P_0 y el punto de intersección de ambas rectas. No es difícil imaginar que este procedimiento no es muy eficiente.



Otra opción para el cálculo de esta distancia, respaldada en el análisis vectorial, sería construir un vector normal **n**, a la recta L. Desde un punto perteneciente a L, se construye el vector caracterizado por el recorrido $\mathbf{V} = \overrightarrow{PP_0}$. La distancia buscada será el valor absoluto de la proyección escalar del vector **V** sobre el vector **n**.



Siendo el vector $\mathbf{V} = (x_0 - x, y_0 - y)$ y $\mathbf{n} = (a, b)$.

La proyección escalar de **V** sobre el vector **n** está dada por:

$$\mathbf{Proy_n V} = \frac{\mathbf{V} \bullet \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

$$= \frac{(x_0 - x, y_0 - y) \bullet (a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{ax_0 + by_0 - (ax + by)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\mathbf{Proy_n V} = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Como la distancia $d(P_0, L)$ siempre es positiva:

$$d(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ejemplo 10.8 Distancia de un punto a una recta.

Determine la distancia del punto $P_0(-2, 1)$ a la recta L, cuya ecuación es $2x - 3y + 2 = 0$.

Solución:

La distancia de P_0 a L, se calcula con:

$$d(P_0, L) = \frac{|(2)(-2) + (-3)(1) + 2|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{|-4 -3 + 2|}{\sqrt{4 + 9}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$d(P_0, L) = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

El punto P_0 se encuentra a $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ unidades de la recta L.

Ejemplo 10.9 Distancia de un punto a una recta.

Si las rectas $L_1: -x + y - 1 = 0$ y $L_2: 2x - 2y + k = 0$ distan entre sí $\sqrt{2}$ unidades, determine el producto de los valores de k.

Solución:

Como se puede concluir a partir de las ecuaciones de ambas rectas L_1, L_2, estas resultan paralelas, y para determinar la distancia entre ellas localizaremos primero un punto que pertenece a L_1, así:

$L_1: -x + y - 1 = 0$

Tomamos $x = 1$, con lo que evaluando en L_1 tenemos $y = 2$, obteniendo el punto $P_0(1, 2) \in L_1$.

Luego determinaremos la distancia desde este punto P_0 hasta la recta L_2, de acuerdo con la expresión:

$$d(P_0, L_2) = \frac{|(2)(1) + (-2)(2) + k|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2}}$$

$$d(P_0, L_2) = \frac{|2 - 4 + k|}{\sqrt{8}}$$

Puesto que la distancia $d(P_0,\ L_2)$ debe ser $\sqrt{2}$, según condición del problema, tenemos:

$$\frac{|2 - 4 + k|}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

$$|-2 + k| = \sqrt{16}$$

$$k = 2 \pm \sqrt{16}$$

De donde:

$$k_1 = 2 + 4 \quad \wedge \quad k_2 = 2 - 4$$

Por lo tanto,

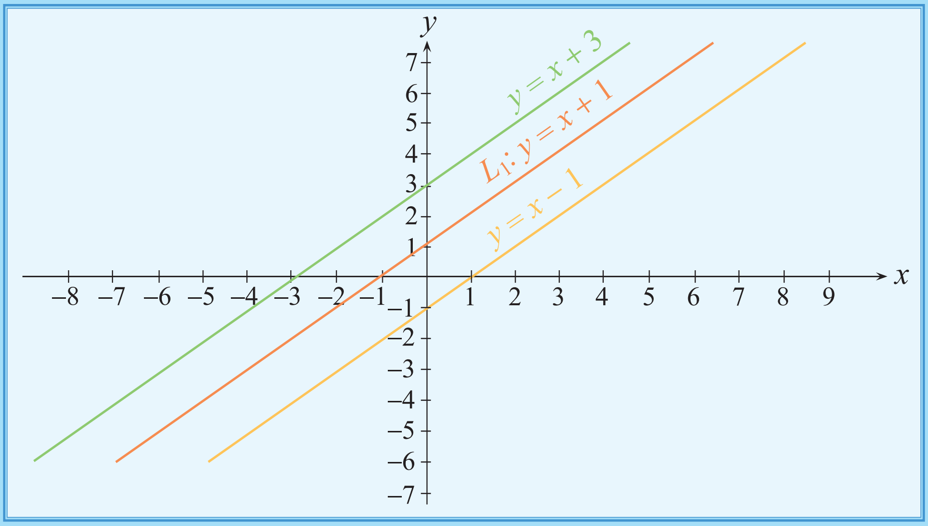
$$k_1 = 6 \qquad \wedge \quad k_2 = -2$$

Y el producto de los valores de k es:

$$k_1\, k_2 = (6)(-2) = -12$$

A partir de los valores de k, la gráfica de L_1 y las posibilidades para la recta L_2 serían:

$$y = x + \frac{k}{2}$$



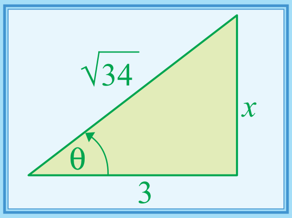
Ejemplo 10.10 Ecuación de una recta.

Determine la ecuación de la recta L que contiene al punto $P_0\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y que forma un ángulo de medida θ con el semieje X positivo, tal que $cos\,(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Solución:

Para determinar la ecuación de la recta L solicitada, debemos contar con un punto que pertenece a ella y su pendiente. El punto es conocido: $P_0\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

El valor de la pendiente de la recta, es la medida de la tangente del ángulo de medida θ; para encontrar su valor construimos un triángulo rectángulo tal que $cos\,(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}}$, así:



Luego, $x = \sqrt{(\sqrt{34}\,)^2 - 9} = \sqrt{25} = 5$.

De donde $tan\,(\theta) = \frac{5}{3}$, valor que representa la pendiente de la recta L, con lo cual su ecuación sería:

$$y - \frac{1}{4} = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{5}{3}x - \frac{15}{12}$$

$$12y - 3 = 20x - 15$$

$$20x - 12y - 12 = 0$$

$$L\colon 5x - 3y - 3 = 0$$

10.2 Secciones cónicas

Objetivos

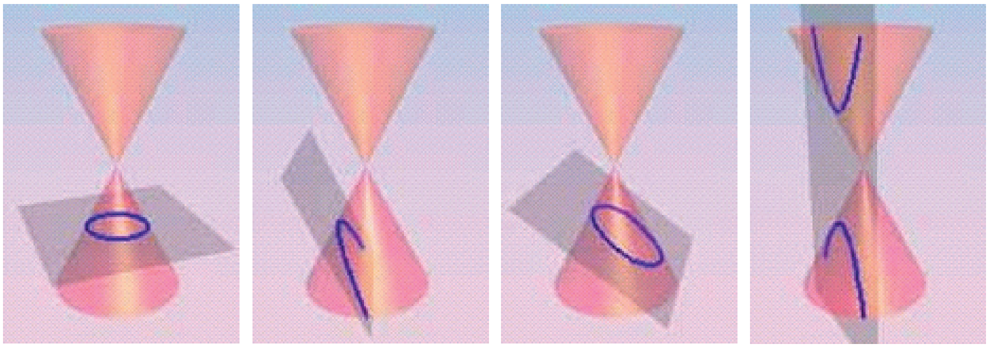
Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar el origen de las cónicas.
* Dada una ecuación general cuadrática, identificar la cónica que representa, en caso de que ésta exista, justificando cada uno de sus elementos.
* Obtener la ecuación en forma canónica de una cónica.
* Representar una cónica en el plano y ubicar sus elementos, a partir de su ecuación canónica.
* Resolver elementos geométricos empleando relaciones cónicas.
* Reconocer el lugar geométrico de una, cónica, dada su definición o empleando relaciones entre números complejos.
* Resolver sistemas de inecuaciones empleando relaciones cónicas.

En el libro “*Cónicas*”, de Apolonio de Perga, se estudian las figuras que pueden obtenerse al intersecar un bicono con diversos planos. Previo a este trabajo, existían estudios elementales sobre determinadas intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de un cono, obteniéndose circunferencias, elipses, parábolas o hipérbolas, según el ángulo superior del cono fuese agudo, recto u obtuso.

Si bien no disponía de la geometría analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las mismas que se aproxima mucho a aquella. Los resultados obtenidos por él fueron los únicos que existieron hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, retomaron el problema, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone.

Las figuras que se van a estudiar son la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, todas ellas conocidas con el nombre genérico de cónicas, pues todas ellas se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano.



circunferencia	*parábola*	*elipse*	*hipérbola*

La importancia fundamental de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales:

La trayectoria que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, se puede considerar una parábola. Esto no es realmente exacto, ya que la gravedad no es constante: depende de la distancia del punto al centro de la Tierra. En realidad, la curva que describe el móvil (si se ignora el rozamiento del aire), es una elipse que tiene uno de sus focos en el centro de la Tierra.

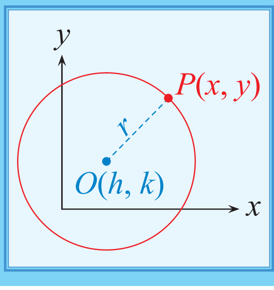
La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas dice que éstos siguen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Es muy posible que Newton no hubiese podido descubrir su famosa ley de la gravitación universal de no haber conocido ampliamente la geometría de las elipses.

En el Sistema de Navegación de Largo Alcance (LORAN por sus siglas en inglés), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar. Aunque un barco reciba siempre las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola, cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio.

10.2.1 Circunferencia

Definición 10.3 (Circunferencia)

Conjunto de puntos en el plano cartesiano que se encuentran a una distancia fija r, de un punto fijo $O(h, k)$. La distancia fija r es denominada longitud del *radio* y el punto fijo $O(h, k)$ es el *centro* de la circunferencia.



Circunferencia $= \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, d(O, P) = r\}$

Forma canónica de la ecuación de una circunferencia

Considérese la circunferencia centrada en $O(h, k)$ y de longitud de radio r. La condición para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la misma es:

$$d(O, P) = r$$

Es decir:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{(a)}$$

Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas $(0, 0)$, la **forma canónica** de la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Forma general de la ecuación de una circunferencia

Desarrollando la expresión (a), se obtiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Considerando que los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales, se los puede agrupar con un factor común A y obtener:

$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0;\ A,D,E,F \in \mathbb{R};\ \neg(A = 0)$$

En la cual se ha denominado $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

De aquí se deduce que, una condición necesaria para que una ecuación cuadrática represente una circunferencia, es que los coeficientes de x^2 y y^2 sean iguales.

Ejemplo 10.11 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación general de la circunferencia centrada en el punto $O(5, -2)$ y cuya longitud del radio es 3.

Solución:

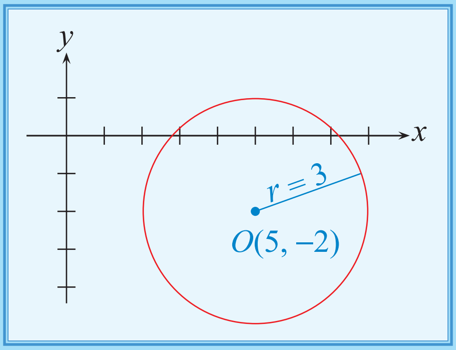
La distancia de $P(x, y)$ al punto $O(5, -2)$ es $r = 3$.

Para que el punto pertenezca a la circunferencia, se ha de verificar:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$$



Ejemplo 10.12 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación general de la circunferencia de centro $O(1, 1)$ y que contiene al punto $P(-2, 3)$.

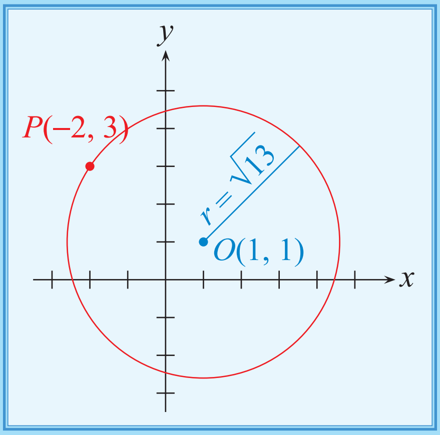
Solución:

La longitud del radio será calculada con la fórmula de distancia entre los dos puntos dados:

$$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

Así, la ecuación de la circunferencia es:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{13})^2$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 13$
$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$



Ejemplo 10.13 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el punto $O(3, 4)$ y es tangente a la recta $x - 2y + 3 = 0$.

Solución:

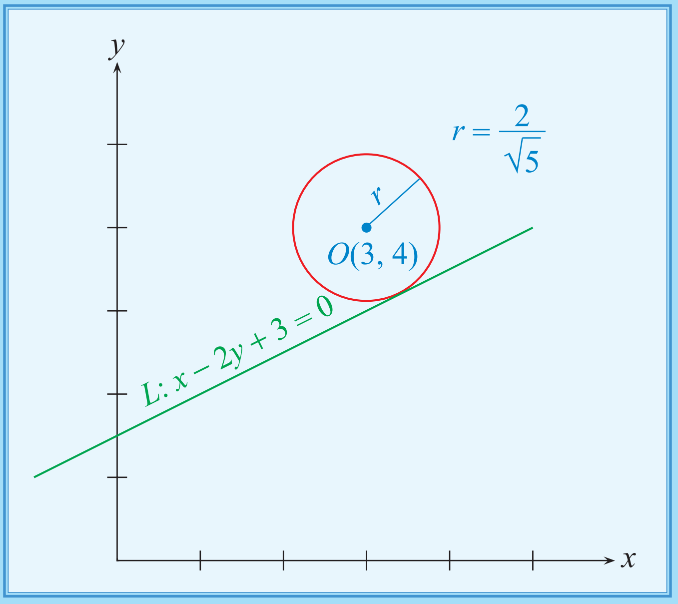
La longitud del radio es la distancia desde el centro de la circunferencia a la recta tangente especificada:

$$r = d(O, L)$$

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r = \frac{|(1)(3) - (2)(4) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=(2/\sqrt{5})^2$$
$$x^2-6x+9+y^2-8y+16=4/5$$
$$5x^2+5y^2-30x-40y+121=0$$



Ejemplo 10.14 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos $(3, 2)$, $(2, 4)$ y $(-1, 1)$.

Solución:

La ecuación de una circunferencia tiene la forma $A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$, la cual puede ser representada también por: $x^2+y^2+D'x+E'y+F'=0$.

Para que dicha circunferencia contenga a todos los puntos dados, estos han de verificar la ecuación:

$$\left.\begin{array}{ll}(3,2): 3^2+2^2+3D'+2E'+F'=0 & \Rightarrow\ 3D'+2E'+F'=-13\\ (2,4): 2^2+4^2+2D'+4E'+F'=0 & \Rightarrow\ 2D'+4E'+F'=-20\\ (-1,1): (-1)^2+1^2-D'+E'+F'=0 & \Rightarrow\ -D'+E'+F'=-2\end{array}\right\}$$

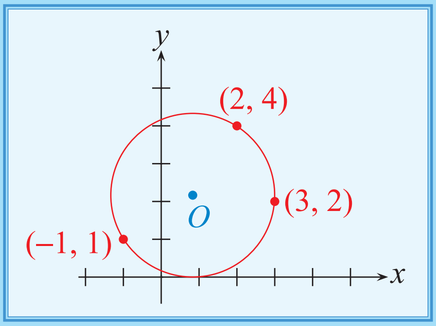
Resolviendo este S.E.L. de tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtiene:

$$D'=-\frac{5}{3};\qquad E'=-\frac{13}{3};\qquad F'=\frac{2}{3}$$

Así, la ecuación es:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}y + \frac{2}{3} = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 5x - 13y + 2 = 0$$



Cálculo de los elementos de una circunferencia

La ecuación de una circunferencia con centro en $O(h, k)$ y longitud de radio r es: $(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$, donde $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

A partir de estos datos, se obtienen los siguientes resultados:

$$h = -\frac{D}{2} \qquad k = -\frac{E}{2}$$

$$r^2 = h^2 + k^2 - F = \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

Si $\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} < 0$, ha de interpretarse que no existe tal circunferencia y se dirá, en este caso, que se trata de una circunferencia imaginaria.

Si $\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} = 0$, ha de interpretarse que no existe tal circunferencia y en este caso, la ecuación representa un punto con coordenadas (h, k).

Ejemplo 10.15 Ecuación de una circunferencia.

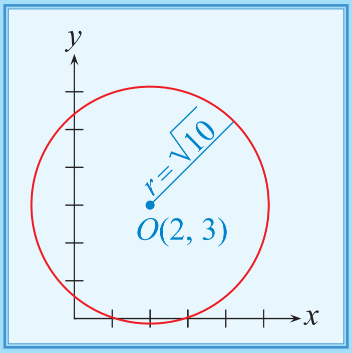
Determine las coordenadas del centro O y la longitud r del radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} h &= -\frac{D}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ k &= -\frac{E}{2} = -\frac{-6}{2} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; Centro\text{: } O(2, 3)$$

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\frac{(-4)^2 + (-6)^2 - 4(3)}{4}} = \sqrt{\frac{40}{4}}$$

$$r = \sqrt{10}\ u$$



Otra forma de reconocer que la circunferencia existe y determinar las coordenadas del centro O y la longitud r del radio, es conociendo su ecuación general y completando el trinomio cuadrado perfecto en las variables x e y. Si la circunferencia existe, la suma de los cuadrados de los binomios que se forman debe ser positiva, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.16 Reconocimiento de una circunferencia.

Encuentre de ser posible, las coordenadas del centro O y la longitud r del radio de los siguientes lugares geométricos:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 41 = 0$

Solución:

a) $(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) = -1$

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -1 + 1 + 4$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

$r = 2;\ Centro\text{: } O(-1, 2)$

En este caso, la circunferencia existe, la longitud de su radio es r, y su centro es el punto O.

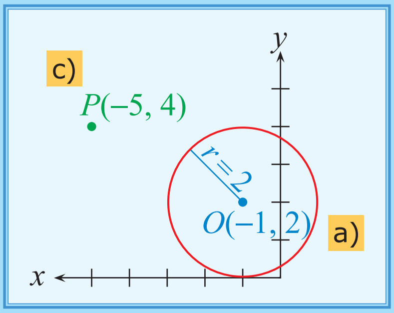
b) $(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = -16$
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = -16 + 4 + 9$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -3$

En este caso, la circunferencia no existe.

c) $(x^2 + 10x) + (y^2 - 8y) = -41$
$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) = -41 + 25 + 16$
$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 0$

En este caso, la ecuación representa un punto cuyas coordenadas son $(-5, 4)$.

En la siguiente gráfica se encuentran representados los literales a) y c).



Ecuación de la recta tangente a una circunferencia

Un punto P puede pertenecer o no a la circunferencia, por lo tanto, se pueden dar las siguientes situaciones:

- Si el punto P pertenece a la circunferencia, existe una recta tangente. El radio es perpendicular a esta recta en dicho punto.
- Si el punto P es exterior al círculo, existen dos rectas tangentes. El centro del círculo equidista de dichas rectas en los puntos de tangencia.
- Si el punto P es interior al círculo, no existe la posibilidad de definir una recta tangente.

Ejemplo 10.17 Ecuación de la recta tangente a una circunferencia.

Determine la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 18 = 0$, si dichas rectas contienen los puntos:

a) $(2, 3)$

b) $(5, 5)$

c) $(1, 1)$

Solución:

Se comprueba si los puntos pertenecen o no a la circunferencia:

a) $(2, 3)$: $2^2 + 3^2 - 4 + 9 - 18 = 0 \Rightarrow (2, 3)$, pertenece a la circunferencia.

b) $(5, 5)$: $5^2 + 5^2 - 10 + 15 - 18 = 37 > 0 \Rightarrow (5, 5)$, es exterior al círculo.

c) $(1, 1)$: $1^2 + 1^2 - 2 + 3 - 18 = -15 < 0 \Rightarrow (1, 1)$, es interior al círculo.

Según este análisis, habrá una recta tangente a la circunferencia que contiene el punto $(2, 3)$, dos rectas tangentes que contienen el punto $(5, 5)$, y ninguna en $(1, 1)$.

a) Recta tangente a la circunferencia en el punto $(2, 3)$:

Se ha de encontrar la ecuación de una recta que contenga a $(2, 3)$ y sea perpendicular al radio que contiene a este punto.

Centro de la circunferencia:

$$O\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

La recta que contiene al radio, contiene a los puntos $(2, 3)$ y $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, y su pendiente es:

$$m = \frac{-\frac{3}{2} - 3}{1 - 2} = \frac{9}{2}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{9}{2}} = -\frac{2}{9}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es: $y - 3 = -\frac{2}{9}(x - 2)$.

b) Rectas tangentes a la circunferencia que contienen el punto $(5, 5)$:

En el caso del punto $(5, 5)$ hay que encontrar las ecuaciones de las rectas que, conteniendo a éste, su distancia al centro sea igual a la longitud del radio.

Calculamos la longitud del radio:

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\frac{(-2)^2 + (3)^2 - 4(-18)}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}}$$

La ecuación de una recta que contenga a $(5, 5)$ es:

$$y - 5 = m\,(x - 5)$$
$$mx - y + (5 - 5m) = 0$$

La distancia de $\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$ a dicha recta es la longitud del radio:

$$r = \frac{\left| m + \dfrac{3}{2} + 5 - 5m \right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\left| \dfrac{13}{2} - 4m \right|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Igualando la expresión encontrada con la longitud del radio:

$$\frac{\left| \dfrac{13}{2} - 4m \right|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{\frac{85}{4}} \Rightarrow \frac{\left(\dfrac{13}{2} - 4m \right)^2}{1 + m^2} = \frac{85}{4}$$

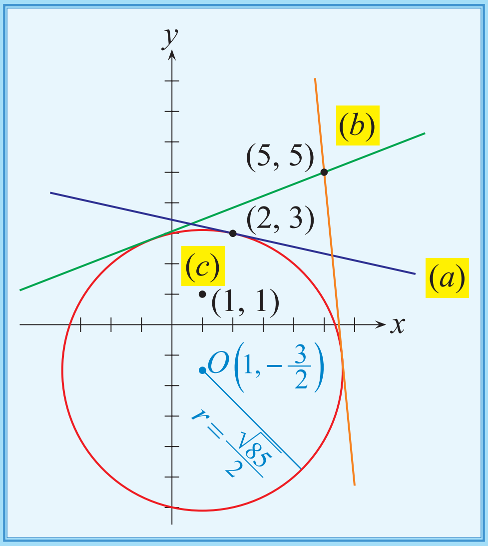
$$4\left(\frac{169}{4} - 52m + 16m^2 \right) = 85 + 85m^2$$

$$169 - 208m + 64m^2 = 85 + 85m^2$$

$$21m^2 + 208m - 84 = 0 \Rightarrow m = \frac{-208 \pm \sqrt{50320}}{42}$$

Sustituyendo cada uno de estos valores de m en la ecuación $y - 5 = m(x - 5)$, se obtienen las ecuaciones de las dos rectas tangentes.

En la siguiente gráfica se encuentran representados los literales a) y b).



Ejemplo 10.18 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos $A(0, 6)$ y $B(1, 5)$ y cuyo centro se encuentra localizado sobre la recta $L: x + y = -1$.

Solución:

Partiremos de la ecuación de la circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Reemplazamos las coordenadas de los puntos A y B que pertenecen a ella:

$$(0 - h)^2 + (6 - k)^2 = r^2 \qquad \text{(I)}$$

$$(1 - h)^2 + (5 - k)^2 = r^2 \qquad \text{(II)}$$

Como además el centro $O(h, k)$ pertenece a la recta L, éste debe satisfacer su ecuación:

$$h + k = -1$$
$$h = -1 - k \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (III) en (I) y (II), respectivamente:

$$(1 + k)^2 + (6 - k)^2 = r^2$$

$$(2 + k)^2 + (5 - k)^2 = r^2$$

$$1 + 2k + k^2 + 36 - 12k + k^2 = r^2$$

$$4 + 4k + k^2 + 25 - 10k + k^2 = r^2$$

$$2k^2 - 10k + 37 = r^2 \qquad \text{(IV)}$$

$$2k^2 - 6k + 29 = r^2 \qquad \text{(V)}$$

Restando las expresiones (IV) – (V) y despejando k, se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2k^2 - 10k + 37 = r^2 \\ -2k^2 + 6k - 29 = -r^2 \\ \hline -4k = -8 \\ k = 2 \end{array}$$

Reemplazando en (III) el valor de $k = 2$, tenemos:

$$h = -1 - 2$$
$$h = -3$$

Reemplazando h y k en (I), se obtiene:

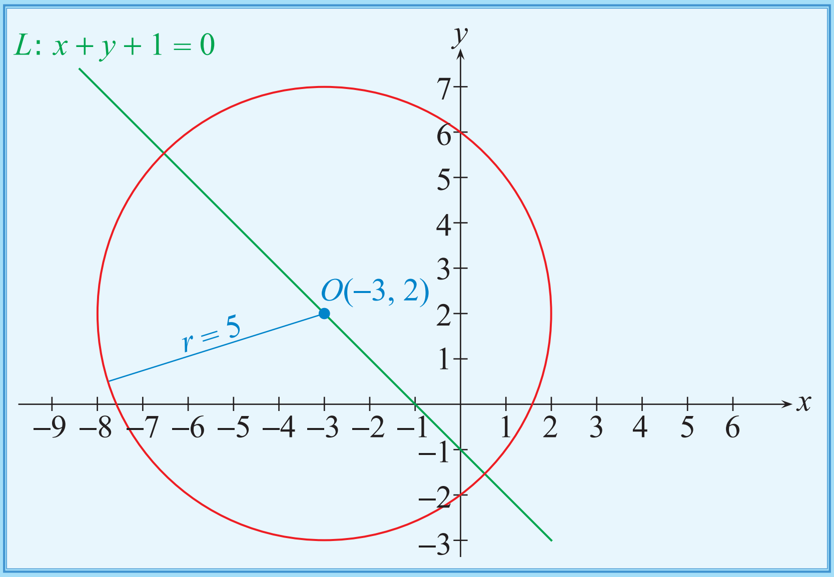
$$(3)^2 + (6 - 2)^2 = r^2$$
$$r^2 = 9 + 16$$
$$r^2 = 25$$

$r = 5$

Con lo cual, la ecuación de la circunferencia buscada sería:

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Cuya gráfica sería:



Ejemplo 10.19 Ecuación de una circunferencia.

Determine la ecuación del lugar geométrico dado por la igualdad $|z - 1| = 2|z + 2i|$, $z \in \mathbb{C}$.

Solución:

Definimos un complejo $z = x + yi$ y lo reemplazamos en la igualdad dada:

$|z - 1| = 2\,|z + 2i|$

$|x + yi - 1| = 2|x + yi + 2i|$

$|(x - 1) + yi| = 2|x + (y + 2)i|$

Calculando los módulos indicados, tenemos:

$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + (y + 2)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo los términos semejantes:

$(x-1)^2 + y^2 = 4[x^2 + (y+2)^2]$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + y^2 + 4y + 4)$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 16y + 16$
$3x^2 + 3y^2 + 2x + 16y + 15 = 0$

Completando trinomios:

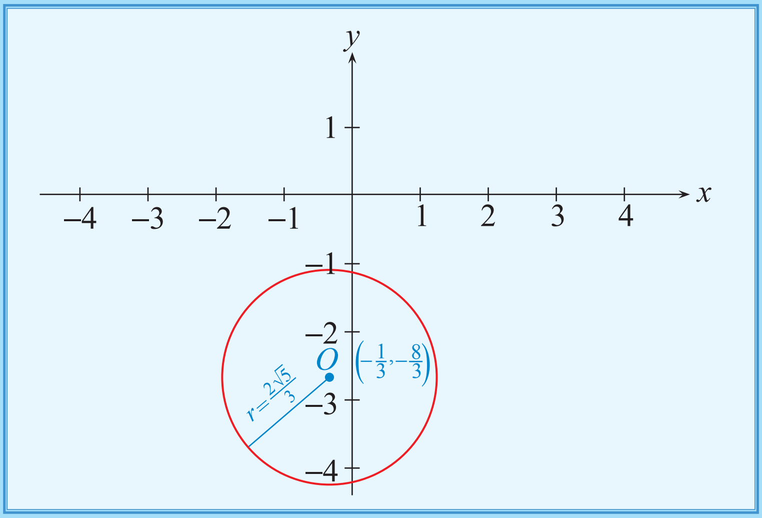
$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 3\left(y^2 + \frac{16}{3}y + \frac{64}{9}\right) = \frac{1}{3} + \frac{64}{3} - 15$$

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{3}$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

La cual representa la ecuación de una circunferencia centrada en $O\left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ y cuya longitud del radio es $r = \frac{\sqrt{20}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

La gráfica de la circunferencia sería:

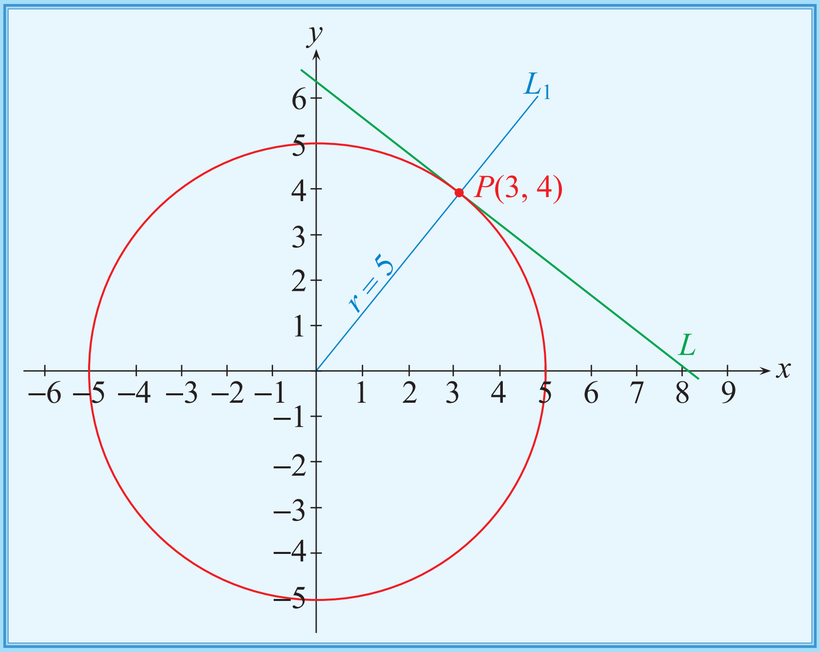


Ejemplo 10.20 Circunferencia y recta tangente.

Determine la ecuación de la recta L tangente a la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.

Solución:

Para analizar la información dada en el problema, procedemos a graficar la cónica dada y el punto.



$x^2 + y^2 = 25$ representa una circunferencia con centro $O(0, 0)$ y $r = 5$.

Para determinar la ecuación de la recta L debemos contar con un punto y su pendiente. El punto $P(3, 4)$ es conocido, y para obtener la pendiente determinaremos la ecuación de la recta L_1 que contiene al radio de la circunferencia y a la que pertenecen los puntos $(0, 0)$ y $(3, 4)$.

Así:

$$L_1: y = \frac{4}{3}x$$

Debido a que L_1 es perpendicular a L por ser la recta tangente perpendicular al radio en el punto de tangencia, la pendiente de L se obtendrá a partir de:

$$m\,m_1 = -1$$

$$m\left(\frac{4}{3}\right) = -1$$

$$m = -\frac{3}{4}$$

Con las coordenadas del punto $(3, 4)$, y la pendiente $m = -\frac{3}{4}$, procedemos a determinar la ecuación de L:

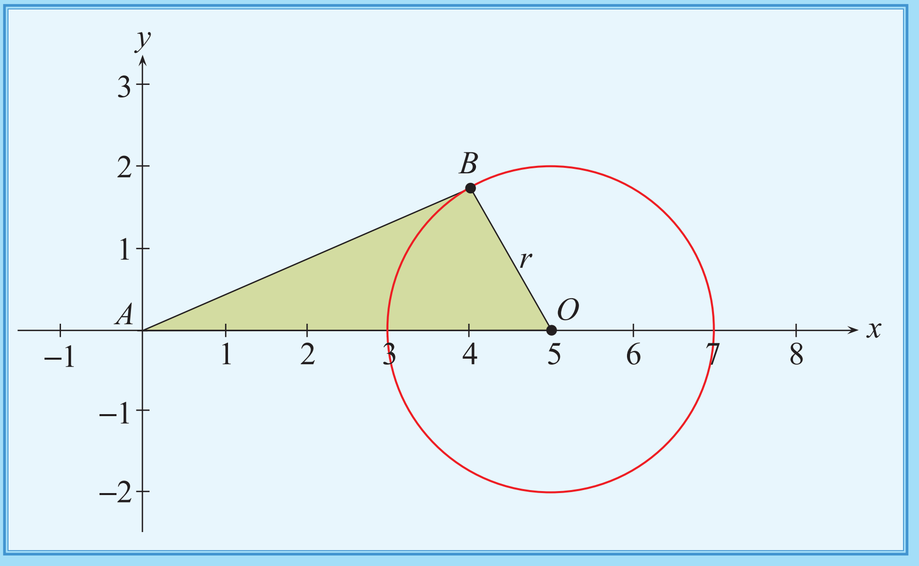
$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$4y - 16 = -3x + 9$$

$$L: 3x + 4y - 25 = 0$$

Ejemplo 10.21 Circunferencia y triángulo.

De acuerdo al bosquejo gráfico que se presenta a continuación, la ecuación de la circunferencia es: $x^2 - 10x + y^2 + 21 = 0$, siendo $\overline{AB}$ un segmento tangente y el punto O su centro. Calcule el área de la superficie del triángulo ABO.



Solución:

Trabajamos en primer lugar, con la ecuación de la circunferencia dada, a fin de determinar las coordenadas del punto O y la longitud de su radio r. Así:

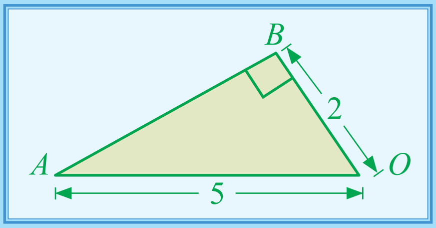
$$x^2 - 10x + y^2 + 21 = 0$$

$$(x^2 - 10x + 25) + y^2 + 21 - 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 4$$

Luego: $O(5, 0)$ y $r = 2$.

Debido a que el segmento $\overline{AB}$, por ser tangente a la circunferencia es perpendicular al radio, el triángulo ABO que se forma es rectángulo con las siguientes medidas:



Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la longitud $\overline{AB}$, así:

$(\overline{AB})^2 = (5)^2 - (2)^2$

$(\overline{AB})^2 = 25 - 4$

$\overline{AB} \quad = \sqrt{21}$

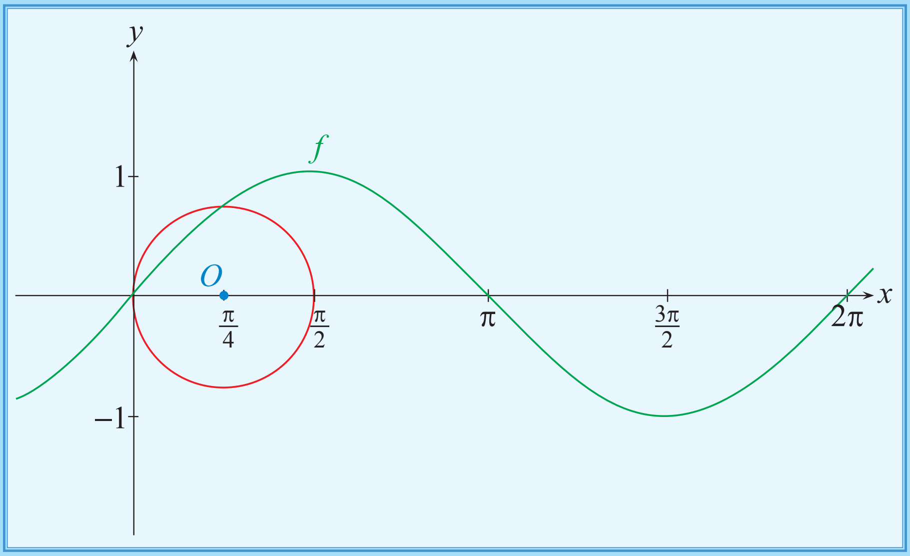
Luego, calculando el área de la superficie del triángulo ABO, tenemos:

$$A_\Delta = \frac{(2)(\sqrt{21})}{2}$$

$$A_\Delta = \sqrt{21}\ u^2$$

Ejemplo 10.22 Circunferencia y funciones trigonométricas.

Dada la gráfica que se presenta a continuación, y si además $f(x) = sen\ (x)$, determine la ecuación de la circunferencia mostrada:



Solución:

De la gráfica se puede concluir que:

$O\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ y $r = \frac{\pi}{4}$.

Con lo cual se puede determinar la ecuación de la circunferencia solicitada, así:

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{16}$$

Ejemplo 10.23 Inecuaciones que induyen circunferencia y números complejos.

Grafique en el plano complejo la región determinada por la desigualdad: $4 - z\overline{z} \geq 0$.

Solución:

Si tomamos el complejo $z = x + yi$, su conjugado $\overline{z} = x - yi$, y los reemplazamos en la desigualdad, tenemos:

$$4 - (x + yi)(x - yi) \geq 0$$

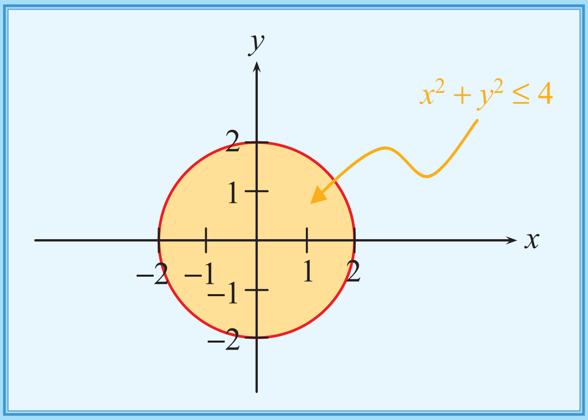
$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

De donde:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Esta región representa un círculo centrado en el origen, cuyo radio mide $2u$.

Gráficamente tenemos:



Ejemplo 10.24 Lugares geométricos.

Determine el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, tales que sus distancias a los puntos $A(8, 0)$ y $B(0, 6)$ están en la razón: $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{1}{2}$.

Solución:

$\overline{PA} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}$ $\qquad\qquad$ $\overline{PB} = \sqrt{x^2 + (y-6)^2}$

Por hipótesis:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 16x + 64 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 12y + 36}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4(x^2 - 16x + 64 + y^2) = x^2 + y^2 - 12y + 36$$

$$3x^2 + 3y^2 - 64x + 12y + 220 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{64}{3}x + 4y + \frac{220}{3} = 0$$

Luego:

Ya que los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales, podría tratarse de una circunferencia donde:

$D = -\dfrac{64}{3}$, $E = 4$ y $F = \dfrac{220}{3}$

Luego:

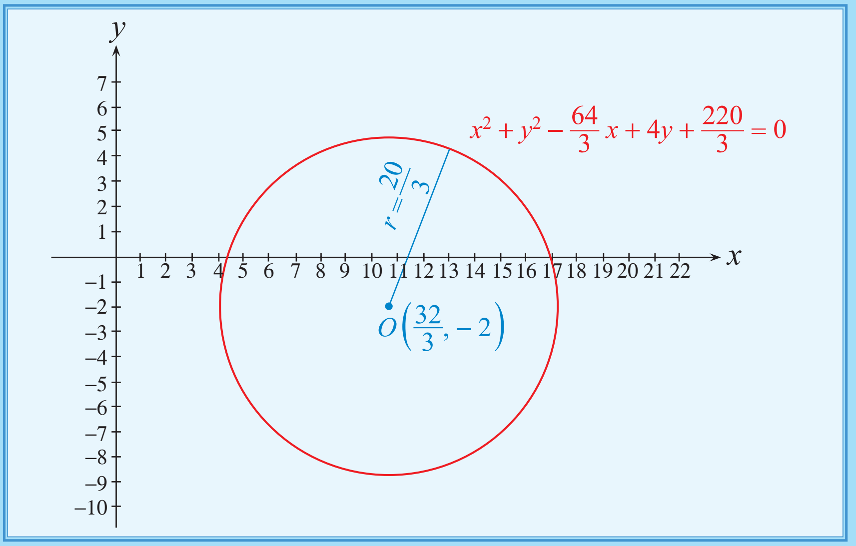
$$h = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

$$k = -\frac{4}{2} = -2$$

$$r = \sqrt{\frac{\left(-\frac{64}{3}\right)^2 + (4)^2 - 4\left(\frac{220}{3}\right)}{4}}$$

$$r = \frac{20}{3}$$

La gráfica de esta circunferencia se muestra a continuación:



Ejemplo 10.25 Circunferencia y volumen de un sólido de revolución.

Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región limitada por la mitad del círculo definido por la inecuación $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 \leq 0$, alrededor de la recta $y = x + 1$.

Solución:

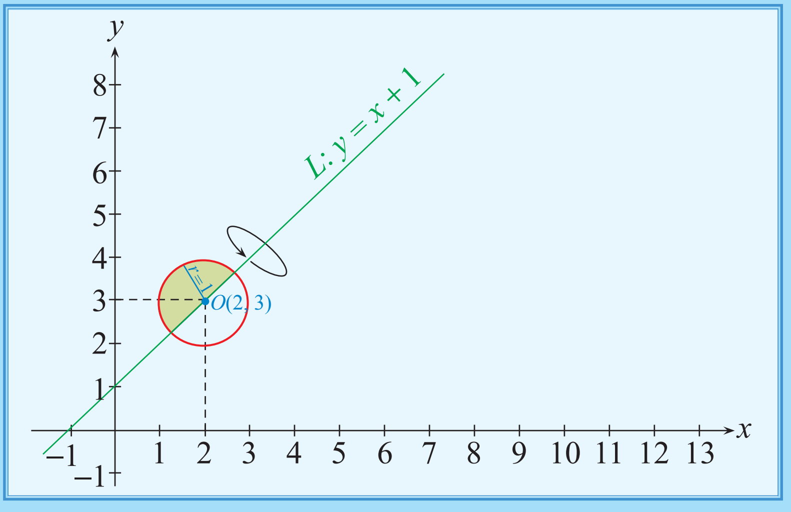
A partir de la inecuación, tenemos:

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 \leq 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) \leq 13 - 12$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 1$

La región limitada por el semicírculo y la recta se presenta a continuación:



El volumen de la esfera generada sería:

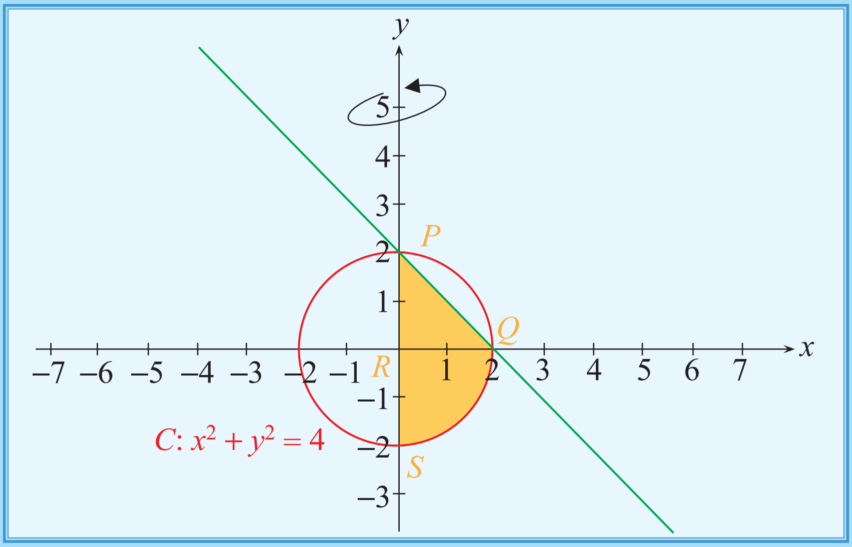
$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_E = \frac{4}{3}\pi (1)^3$$

$$V_E = \frac{4}{3}\pi u^3$$

Ejemplo 10.26 Circunferencia y volumen de un sólido de revolución.

En el gráfico se muestra una circunferencia C. Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar la región sombreada alrededor del eje Y.



Solución:

El volumen del sólido generado se obtendrá al sumar el volumen del cono más el de la semiesfera, generados al rotar el triángulo rectángulo PQR y el cuarto de círculo, alrededor del eje Y.

$$\begin{aligned} V &= V_{CO} + V_{SE} \\ &= \frac{1}{3}\pi (2)^2(2) + \frac{2}{3}\pi (2)^3 \\ &= \frac{8\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

$$V = \frac{24\pi}{3} u^3.$$

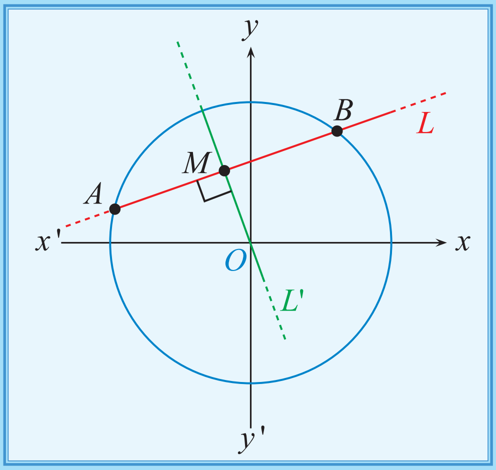
Ejemplo 10.27 Demostración de Teorema.

Demuestre el siguiente Teorema:

"El segmento de recta que une el centro de una circunferencia con el punto medio de cualquier cuerda de dicha circunferencia, es perpendicular a la cuerda."

Solución:

Hacemos un bosquejo de los elementos definidos en el teorema.



Demostración:

Sin pérdida de generalidad se ha ubicado el centro de la circunferencia en el origen de coordenadas rectangulares, es decir $O(0, 0)$.

Supongamos que r es la longitud del radio de la circunferencia.

Entonces, la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$.

Como los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ pertenecen a la circunferencia, tenemos:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

Combinando ambas ecuaciones:

$(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 0$

$(y_2^2 - y_1^2) + (x_2^2 - x_1^2) = 0$

$\Rightarrow (y_2^2 - y_1^2) = -(x_2^2 - x_1^2)$ (1)

Debemos demostrar que las rectas L y L' son perpendiculares.

Sea m la pendiente de la recta L, entonces su valor es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Debido a que M es el punto medio de la cuerda, sus coordenadas son:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Sea m' la pendiente de la recta L', entonces su valor es:

$$m' = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} - 0}{\frac{x_1 + x_2}{2} - 0} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$$

Las rectas L y L' son perpendiculares si y sólo si $mm' = -1$.

$$mm' = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}\right)$$

$$mm' = \left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2}\right)$$

Reemplazando el resultado de la ecuación (1) en el numerador, tenemos:

$$mm' = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{-(x_2^2 - x_1^2)}{(x_2^2 - x_1^2)} = -1$$

$$\therefore\ mm' = -1$$

Con lo cual se demuestra que el segmento $\overline{OM}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$.

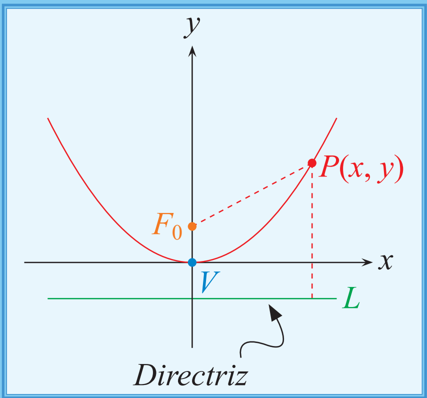
10.2.2 Parábola

En el capítulo de funciones de variable real, se presentó la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ como una parábola, cuyo vértice y eje de simetría pueden obtenerse de la ecuación en forma canónica de f. Las parábolas estudiadas en ese capítulo tenían eje de simetría vertical, no obstante, la parábola también puede tener eje de simetría horizontal, en cuyo caso no representa una función de y en x, pero sí una relación entre estas dos variables. En esta sección se estudiarán las parábolas con ejes de simetría vertical y horizontal de una forma más amplia, de acuerdo a la definición que se dará a continuación.

Definición 10.4 (Parábola)

Conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano que equidistan de un punto fijo F_0 y de una recta fija L. El punto F_0 es denominado foco de la parábola; la recta L es la directriz de la parábola.

$$\text{Parábola} = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ d(P, F_0) = d(P, L)\}$$



Dada una parábola, se denomina **eje de simetría** a la recta que contiene al foco y es perpendicular a la recta directriz. Se denomina **vértice** de la parábola al punto donde ésta cambia su monotonía.

La distancia entre el vértice y el foco de una parábola recibe el nombre de **parámetro** de la parábola (suele denotarse por p). El segmento de recta perpendicular al eje de simetría que une dos puntos de la parábola y que incluye al foco, se denomina **lado recto** y su longitud es $4p$.

Forma canónica de la ecuación de una parábola

Se supondrá que el vértice es el origen de coordenadas y que el foco se encuentra en el semieje positivo de las ordenadas.

En este caso, la directriz es una recta horizontal L de ecuación $y = -p$, o sea, $y + p = 0$.

Dado un punto $P(x, y)$ del plano, su distancia al foco $F_0\,(0, p)$ es $d(P, F_0) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$.

La distancia del punto P a la recta directriz es $d(P, L) = |\,y + p\,|$.

La condición para que el punto P pertenezca a la parábola, es que ambas distancias coincidan:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |\,y + p\,|$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 - 2py = 2py$$

La ecuación de esta parábola, con vértice en el origen de coordenadas $V(0, 0)$ y foco en el punto $F_0\,(0, p)$, es:

$$x^2 = 4py$$

Basándose en la deducción realizada, existen otros tres casos elementales de parábolas:

- Si el eje de simetría es vertical y el foco está en el semieje negativo de las ordenadas $F_0\,(0, -p)$, la ecuación es:

$$x^2 = -4py$$

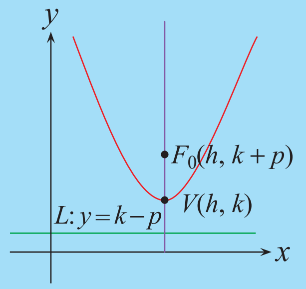
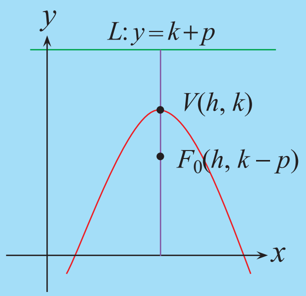
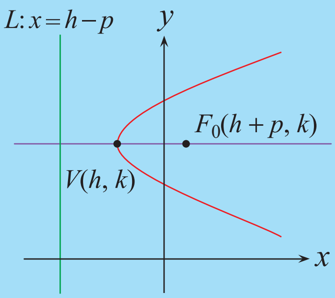
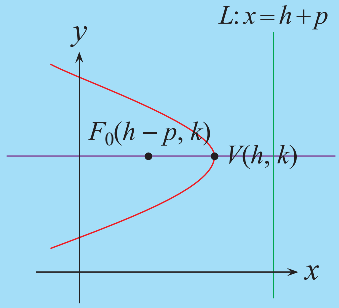
- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje positivo de las abcisas $F_0\,(p, 0)$, la ecuación es:

$$y^2 = 4px$$

- Si el eje de simetría es horizontal y el foco está en el semieje negativo de las abcisas $F_0\,(-p, 0)$, la ecuación es:

$$y^2 = -4px$$

Si el vértice de una parábola se encuentra en un punto $V(h, k)$, considere:

Coordenadas del foco	Recta directriz	Forma canónica	Gráfica
$F_0(h, k+p)$	$L: y = k - p$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	
$F_0(h, k-p)$	$L: y = k + p$	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	
$F_0(h+p, k)$	$L: x = h - p$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	
$F_0(h-p, k)$	$L: x = h + p$	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	

Se puede resumir que la variable con término cuadrático determina la dirección del eje de simetría de la parábola, y el signo del término lineal determina la dirección de la concavidad.

Forma general de la ecuación de una parábola

Dada una ecuación de los tipos $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ o $By^2 + Dx + Ey + F = 0$; donde A, B, D, E, $F \in \mathbb{R}$ y además A, E y B, D deben ser diferentes de cero respectivamente, siempre es posible reducirla a la forma canónica de una parábola. Para ello, se completa un trinomio cuadrado perfecto en la variable con término cuadrático y se manipula adecuadamente el otro miembro de la ecuación.

Ejemplo 10.28 Ecuación de una parábola.

Determine la forma canónica de la ecuación de la parábola $2x^2 + 8x + 3y - 5 = 0$. Encuentre su vértice, su foco y la ecuación de su recta directriz.

Solución:

Puesto que la ecuación dada tiene un término en x^2, habrá que transformarla en una del tipo $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 8x + 3y - 5 &= 0 \\
2x^2 + 8x &= -3y + 5 \\
2(x^2 + 4x) &= -3y + 5 \\
(x^2 + 4x) &= -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \\
(x + 2)^2 &= -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} + 4 \\
(x + 2)^2 &= -\frac{3}{2}y + \frac{13}{2} \\
(x + 2)^2 &= -\frac{3}{2}\left(y - \frac{13}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$V(h, k) = V\left(-2, \frac{13}{3}\right)$ y $p = \frac{3}{8}$

Se trata de una parábola con eje de simetría vertical y cóncava hacia abajo. Para hallar las coordenadas del foco se le resta el parámetro p a la ordenada del vértice:

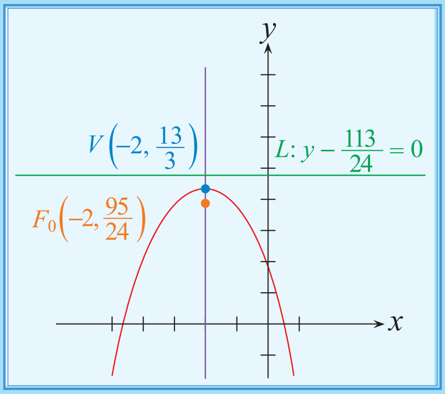
$$F_0\left(-2, \frac{13}{3} - \frac{3}{8}\right) = F_0\left(-2, \frac{95}{24}\right)$$

Puesto que el eje de simetría es vertical, la recta directriz es horizontal, y su ordenada se obtiene sumándole el parámetro p a la ordenada del vértice:

$$y = \frac{13}{3} + \frac{3}{8} = \frac{113}{24}$$

La ecuación de la recta directriz es:

$$L: y - \frac{113}{24} = 0$$



Ejemplo 10.29 Ecuación de una parábola.

Encuentre los elementos de la parábola $y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

Solución:

Se procede como en el caso anterior, teniendo en cuenta que ahora la variable que aparece elevada al cuadrado es y:

$$y^2 + 6y = 4x - 13$$
$$(y + 3)^2 = 4x - 13 + 9$$
$$(y + 3)^2 = 4x - 4$$
$$(y + 3)^2 = 4(x - 1)$$

Es una parábola con vértice en el punto $V(1, -3)$.

Su parámetro $p = 1$, el eje de simetría es horizontal y el foco está localizado a la derecha del vértice.

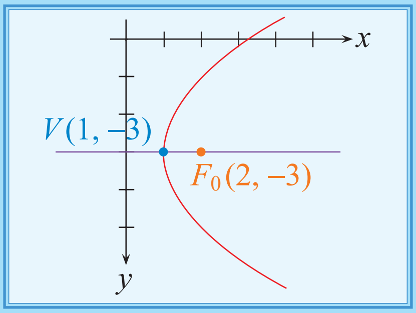
Para hallar las coordenadas del foco se le suma el parámetro p a la abscisa del vértice:

$$F_0(1 + 1, -3)$$
$$F_0(2, -3)$$

La ecuación de la recta directriz se obtiene restándole el valor del parámetro p a la abscisa del vértice:

$$L: x = 1 - 1 = 0$$

Con lo cual se concluye que la recta directriz es el eje de las ordenadas.



Ejemplo 10.30 Ecuación de una parábola.

Determine la ecuación de la parábola con eje de simetría horizontal que tiene su vértice en el punto $V(2, 2)$ y que contiene al punto $P(1, 1)$.

Solución:

Dado que el eje de simetría de la parábola es horizontal y por la ubicación de los puntos V y P, la forma de su ecuación será:

$$(y-k)^2 = -4p\,(x-h)$$

Reemplazando las coordenadas del vértice, tenemos:

$$(y-2)^2 = -4p\,(x-2)$$

Puesto que el punto $(1, 1)$ pertenece a la parábola, debe satisfacer su ecuación:

$$(1-2)^2 = -4p\,(1-2)$$

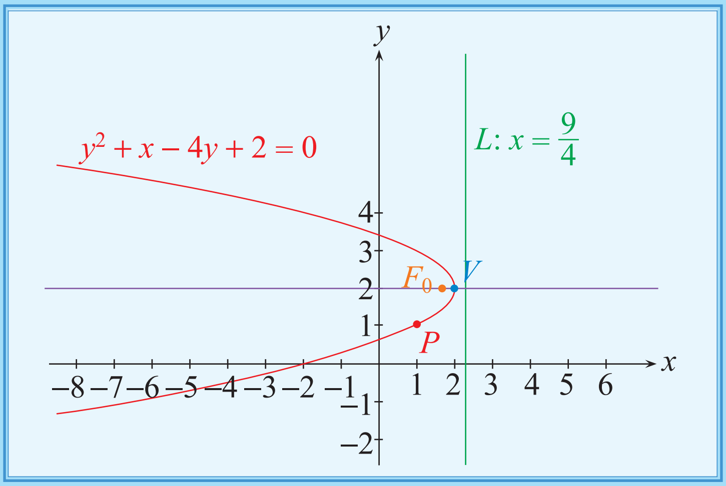
De donde:

$$4p = 1$$
$$p = \frac{1}{4}$$

En base a lo anotado, la ecuación de la parábola sería:

$$(y-2)^2 = -(x-2)$$
$$y^2 - 4y + 4 = -x + 2$$
$$y^2 + x - 4y + 2 = 0 \qquad \text{siendo } V(2, 2) \text{ y } F_0\left(\frac{7}{4}, 2\right).$$

Su gráfica se presenta a continuación:



Ejemplo 10.31 Ecuación de una parábola.

Determine las coordenadas del vértice y el foco de la parábola cuya ecuación es: $y = \frac{1}{2}(1 - 2x - x^2)$.

Solución:

Trabajamos en primer lugar con la ecuación dada:

$$y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -y$$

$$x^2 + 2x - 1 = -2y$$

Completando el trinomio como cuadrado perfecto:

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 1 = -2y$$

$$(x + 1)^2 = -2y + 2$$

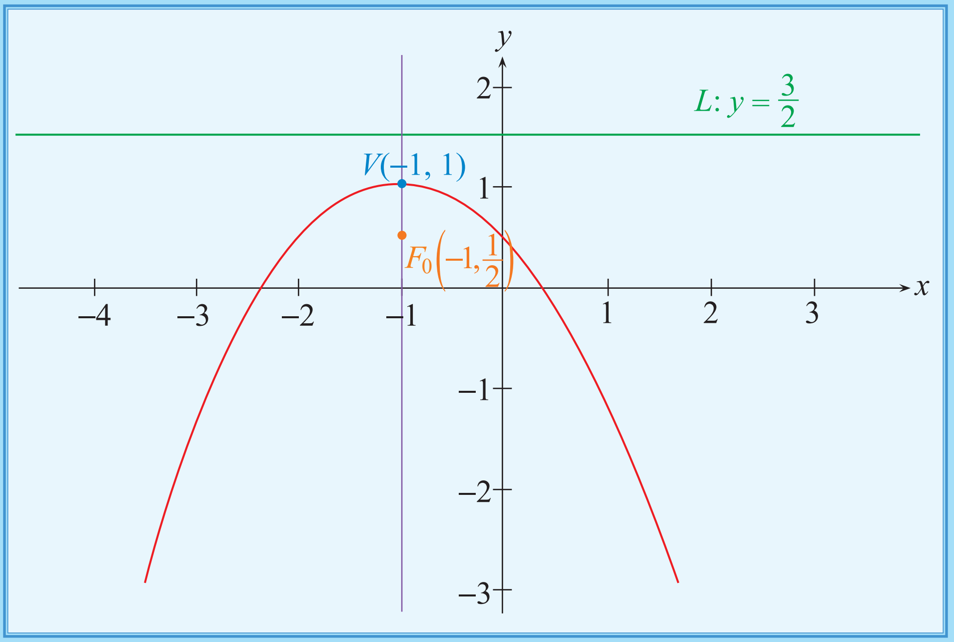
$$(x + 1)^2 = -2(y - 1)$$

Comparando esta ecuación con la de una parábola de la forma: $(x - h)^2 = -4p(y - k)$, tenemos que:

$$V(-1, 1)$$

$$4p = 2 \quad \therefore \quad p = \frac{1}{2}$$

$$F_0\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$



Ejemplo 10.32 Ecuación de una parábola.

Los extremos del lado recto de una parábola son los puntos $(5, k)$ y $(-5, k)$. Si el vértice de esta parábola está en el origen y la parábola es cóncava hacia abajo, determine la ecuación de la cónica.

Solución:

Por hipótesis:

$$x^2 = -4py$$

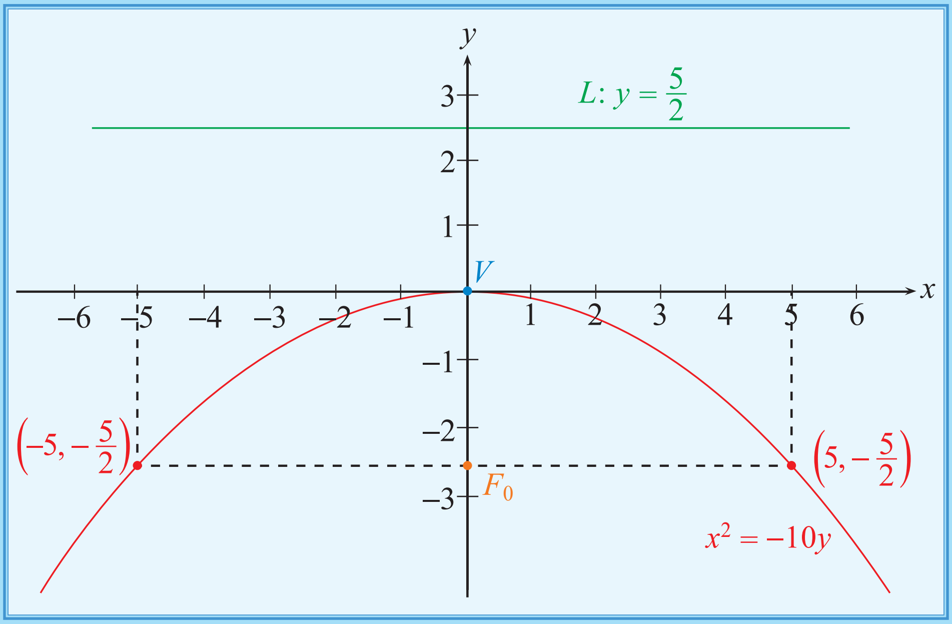
$$k = -p$$

Por definición del lado recto:

$$|4p| = \sqrt{(5+5)^2 + (k-k)^2} \Rightarrow 4p = 10$$

$$p = \frac{5}{2} \quad \therefore \quad k = -\frac{5}{2}$$

Entonces la ecuación de la parábola sería: $x^2 = -10y$, donde $V(0, 0)$, $F_0\left(0, -\frac{5}{2}\right)$, $L: y = \frac{5}{2}$, y su gráfica sería:



Ejemplo 10.33 Sistema de inecuaciones no lineales.

Dado el siguiente sistema de inecuaciones no lineales, determine su solución:

$$\begin{cases} y^2 - 4x \geq 0 \\ y^2 + 4x - 16 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Trabajamos con la primera inecuación tomándola como ecuación, así:

$$y^2 - 4x = 0$$

Del análisis de esta expresión, observamos que se la puede comparar con la ecuación de una parábola de la forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

En base a las comparaciones realizadas, tenemos:

$$y^2 = 4x$$

$$V(0, 0) \text{ y } p = 1$$

Luego, trabajamos con la segunda inecuación tomándola también como ecuación y comparándola con la parábola de la forma $(y - k)^2 = -4p(x - h)$, tenemos:

$$y^2 = -4x + 16$$

$$y^2 = -4(x - 4)$$

Por lo tanto, $V(4, 0)$, $p = 1$ y será cóncava hacia la izquierda.

Se determina la región definida por la primera desigualdad despejando x:

$$4x \leq y^2$$

$$x \leq \frac{1}{4}y^2$$

Se determina la región definida por la segunda desigualdad, despejando así mismo x.

$$4x \leq -y^2 + 16$$

$$x \leq \frac{-y^2 + 16}{4}$$

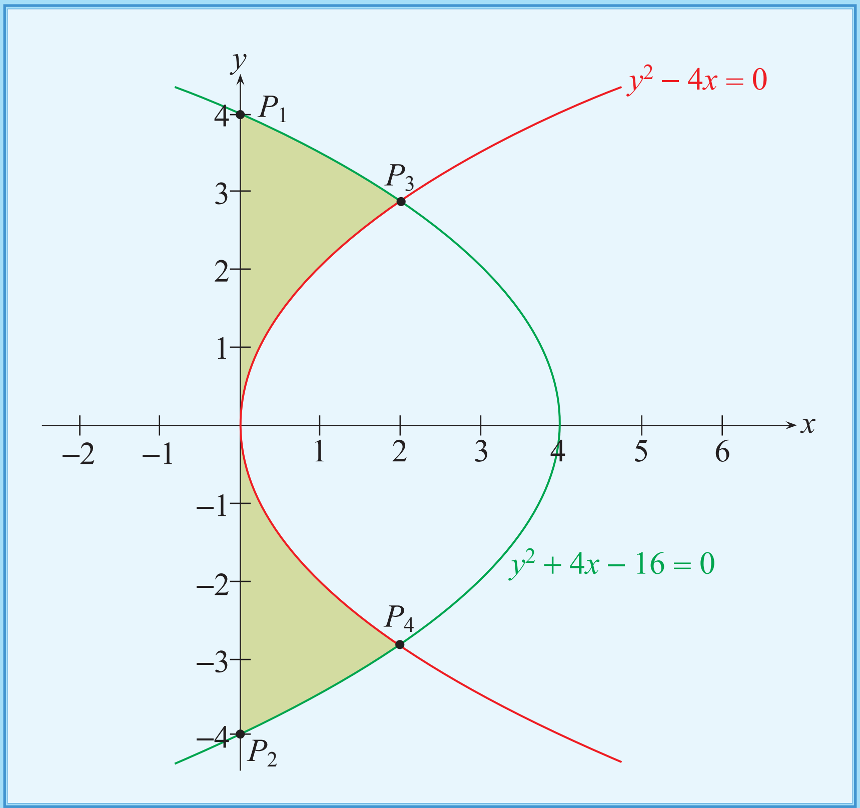
Con este análisis, procedemos a graficar las curvas y a sombrear las regiones dadas por las inecuaciones. Así:

Como $4x \leq y^2$, $x \leq \frac{y^2}{4}$, sombrearemos la región que incluye a la cónica y a toda la región a la izquierda de ella.

Como $4x \leq -y^2 + 16$, $x \leq \dfrac{-y^2+16}{4}$, sombrearemos la región que incluye a la cónica y a toda la región a la izquierda de ella.

La última desigualdad, $x \geq 0$, comprenderá todos los puntos del plano localizados en el I y IV cuadrante.

En base a nuestro estudio, procedemos a graficar las regiones referidas para obtener la solución del sistema. Así:



Con lo que se puede observar la región común a las inecuaciones dadas, es decir, la solución del S.I.N.L.

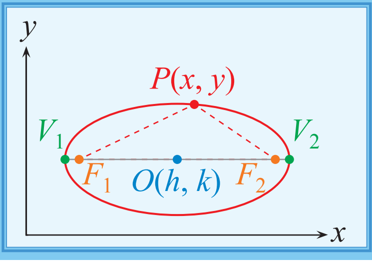
El lector puede confirmar las coordenadas de los puntos $P_1(4, 0)$, $P_2(-4, 0)$, $P_3\,(2, \sqrt{2})$ y $P_4\,(2, -\sqrt{2})$, resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales respectivo.

10.2.3 Elipse

Definición 10.5 (Elipse)

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos F_1 y F_2, es una constante.

Elipse $= \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ d\,(P, F_1) + d\,(P, F_2) = \text{constante}\}$



El valor constante al cual se hace referencia en la definición es $2a$ y corresponde a la longitud del **eje mayor** de la elipse, y la distancia entre los focos es $2c$. Los valores a y c se denominan **semieje mayor** y **semidistancia focal**, respectivamente. El punto medio entre los dos focos se denomina **centro** de la elipse de coordenadas $O(h, k)$.

Se denominan **vértices** de la elipse a los puntos V_1 y V_2 que se encuentran a una distancia a del centro de la elipse. Estos puntos pertenecen a la elipse y geométricamente se puede apreciar que son los puntos más distantes de su centro.

El segmento de recta perpendicular al eje mayor, que une dos puntos de la elipse y que incluye a uno de los focos, se denomina **lado recto** y su longitud es $\frac{2b^2}{a}$, siendo b la longitud del **semieje menor** de la elipse.

El valor $e = \frac{c}{a}$, que está comprendido entre 0 y 1, se denomina **excentricidad** de la elipse.

Cálculo de la longitud del eje menor

Denominando $2b$ a la longitud del eje menor, P al vértice superior ubicado sobre el centro de la elipse, F_1 y F_2 a los focos de la elipse, por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Por definición de elipse,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}=2a \Rightarrow 2\sqrt{b^2+c^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2+c^2}=a \Rightarrow b^2+c^2=a^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

Esta es la distancia b denominada longitud del **semieje menor.**

Forma canónica de la ecuación de una elipse

La ecuación de una elipse centrada en el origen y con focos en $F_1(-c, 0)$ y $F_2\,(c, 0)$, se puede obtener aplicando la definición:

$$d(P, F_1)+d(P, F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}=2a \qquad \text{(I)}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}=f \qquad \text{(II)}$$

Multiplicando las expresiones (I) y (II):

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}\right)^2-\left(\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}\right)^2=2af$$

$$(x^2+2xc+c^2+y^2)-(x^2-2xc+c^2+y^2)=2af$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2-x^2+2xc-c^2-y^2=2af$$

$$4xc=2af$$

$$f=\frac{2xc}{a}$$

Reemplazando f en (II) y sumando las expresiones (I) y (II):

$$2\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}=2a+\frac{2xc}{a}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2-\frac{x^2c^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2$$

$$x^2\left[1-\frac{c^2}{a^2}\right]+y^2=a^2-c^2$$

Resolviendo y dividiendo la expresión por $a^2 - c^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Reemplazando $a^2 - c^2$ por b^2, tenemos:

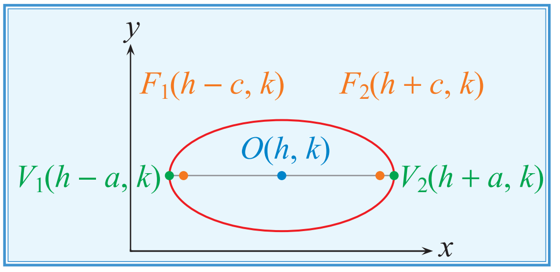
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación de una elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Si una elipse tiene sus ejes mayor y menor paralelos a los ejes de coordenadas, y su centro en el punto $O(h, k)$, se pueden dar los siguientes casos:

- Eje mayor horizontal:

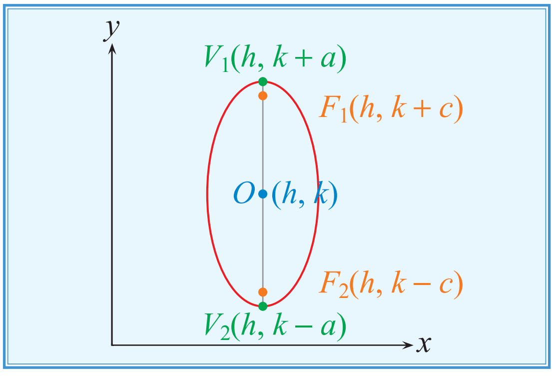
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h \pm a, k)$ y los focos son de la forma $(h \pm c, k)$.

- Eje mayor vertical:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h, k \pm a)$ y los focos son de la forma $(h, k \pm c)$.

Forma general de la ecuación de una elipse

Dada una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y B tienen el mismo signo, además $A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$, siendo $A \neq 0$, $B \neq 0$, ésta puede transformarse en otra del tipo $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \pm 1$.

Así, la condición necesaria para que la ecuación cuadrática represente a una elipse, es que los coeficientes A y B tengan igual signo, pero diferente valor.

Si el segundo miembro fuese positivo, se tendría una elipse centrada en (h, k). En el caso que resultare negativo, como una suma de cuadrados es siempre positiva, se tendría que ningún punto la verifica y se habla de una elipse imaginaria. Así mismo, si el segundo miembro es cero, la ecuación representa un punto en (h, k).

Ejemplo 10.34 Ecuación de una elipse.

Determine la forma canónica de la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$. Si se trata de una elipse, encuentre su centro, sus focos y sus vértices.

Solución:

Se agrupan los términos en x^2 con los términos en x, y los términos en y^2 con los términos en y:

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 + 18y) - 23 = 0$$

Se saca el factor común, en cada paréntesis, dado por el coeficiente del término de segundo grado:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 2y) - 23 = 0$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos:

$$4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y+1)^2 - 1] - 23 = 0$$
$$4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

Se divide entre 36:

$$\frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Centro de la elipse: $O(1, -1)$; $a = 3$ y $b = 2$.

Por la forma de la ecuación, se concluye que se trata de una elipse con eje mayor horizontal; y para hallar los focos hay que sumar y restar c a la abscisa del centro.

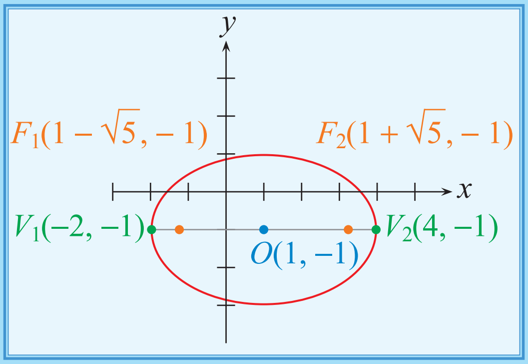
$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Las coordenadas de los focos son:

$$F_1(1 - \sqrt{5}, -1)$$
$$F_2(1 + \sqrt{5}, -1)$$

Las coordenadas de los vértices se obtienen restando y sumando a la abscisa del centro O el valor de la longitud del semieje mayor a, con lo que se obtiene:

$V_1(-2, -1)$
$V_2(4, -1)$



Ejemplo 10.35 Ecuación de una elipse.

De ser posible, determine los elementos de la cónica cuya ecuación es $x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$.

Solución:

$$(x^2 - 8x) + (3y^2 - 12y) + 32 = 0$$
$$(x^2 - 8x) + 3(y^2 - 4y) + 32 = 0$$
$$(x-4)^2 + 3(y-2)^2 - 16 - 12 + 32 = 0$$
$$(x-4)^2 + 3(y-2)^2 = -4$$

Como el primer miembro es la suma de números positivos y el segundo miembro es un número negativo, la ecuación no tiene solución y se trata de una elipse imaginaria.

Ejemplo 10.36 Ecuación de una elipse.

Encuentre los elementos de la elipse $25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 311 = 0$.

Solución:

$$(25x^2 - 50x) + (16y^2 + 64y) - 311 = 0$$
$$25(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 4y) - 311 = 0$$
$$x^2 - 2x = x^2 - (2)(1)x + 1^2 - 1^2 = (x-1)^2 - 1$$
$$y^2 + 4y = y^2 + (2)(2)y + 2^2 - 2^2 = (y+2)^2 - 4$$

Sustituyendo, la ecuación es:

$$25(x-1)^2 - 25 + 16(y+2)^2 - 64 - 311 = 0$$
$$25(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 25 + 64 + 311 = 400$$

$$\frac{25(x-1)^2}{400} + \frac{16(y+2)^2}{400} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{400/25} + \frac{(y+2)^2}{400/16} = 1, \text{ es decir, } \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

Como el denominador de la segunda fracción es mayor que el de la primera, $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, lo cual significa que la elipse tiene su eje mayor vertical.

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$$
$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \sqrt{16} = 4$$

Además $c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = \sqrt{9} = 3$.

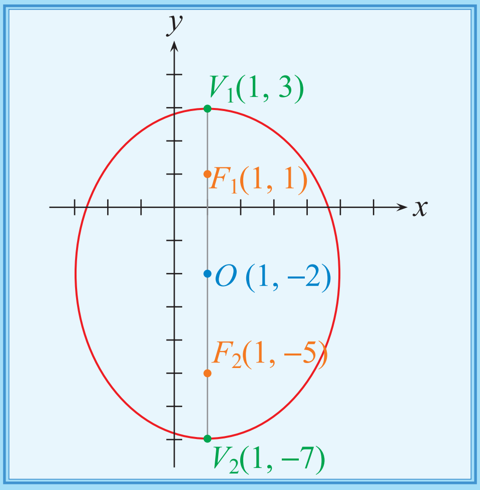
Las coordenadas del centro son $O\,(1, -2)$.

Las coordenadas de los vértices son:

$V_1(1, 3)$
$V_2(1, -7)$

Las coordenadas de los focos son:

$F_1(1, 1)$
$F_2(1, -5)$



Ejemplo 10.37 Elipse y circunferencia.

Una elipse concéntrica con una circunferencia tiene por eje menor el diámetro de dicha circunferencia. El eje mayor de la elipse mide $6u$, y es paralelo al eje X. Si la ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-8x-6y+21=0$, determine la ecuación de la elipse y las coordenadas de sus vertices y focos.

Solución:

Trabajamos en primer lugar, con la ecuación de la circunferencia dada:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

Completando los valores para obtener trinomios cuadrados perfectos:

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 25 - 21$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

A partir de esta ecuación, se tiene que:

$$O(4, 3);\ r = 2$$

De acuerdo a los datos del problema, la ecuación de la elipse solicitada tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$ (semieje mayor de la elipse).

$d = 2r = 4 = 2b \Rightarrow b = 2$ (semieje menor de la elipse).

Luego, la ecuación de la elipse requerida es:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

A partir de esta ecuación, se obtiene:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 9 - 4$$

$$c = \sqrt{5}$$

$V_1\,(1, 3)$ $\quad F_1(4 - \sqrt{5}, 3)$

$V_2\,(7, 3)$ $\quad F_2(4 + \sqrt{5}, 3)$

Llevando la ecuación a la forma general:

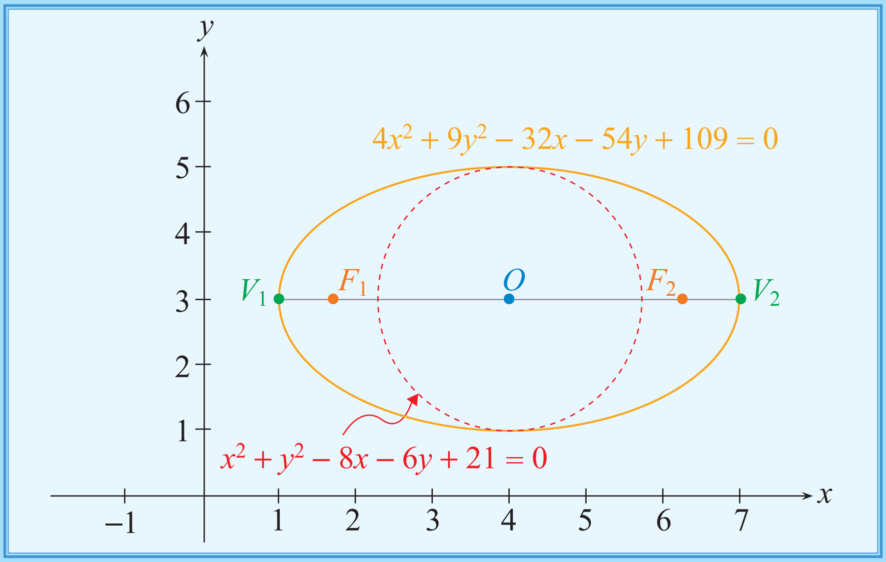
$$4(x-4)^2 + 9(y-3)^2 = 36$$

$$4(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) = 36$$

$$4x^2 - 32x + 64 + 9y^2 - 54y + 81 = 36$$

$$4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 = 0$$

La gráfica de la elipse sería:

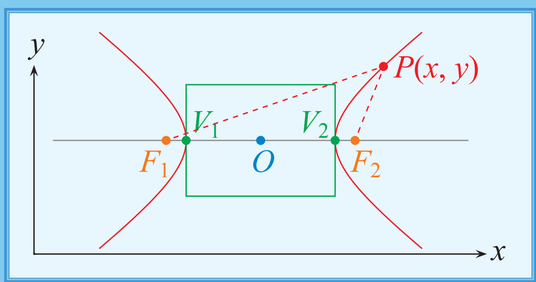


10.2.4 Hipérbola

Definición 10.6 (Hipérbola)

Conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos F_1 y F_2, es una constante.

Hipérbola $= \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, |d\,(P, F_1) - d(P, F_2)| = \text{constante}\}$



El valor constante al cual se hace referencia en la definición es $2a$ y corresponde a la longitud del **eje transverso** de la hipérbola. La mediatriz de este eje se denomina **eje conjugado** de la hipérbola.

El punto donde se intersecan ambos ejes (que es, evidentemente, el punto medio de los focos) se denomina **centro** de la hipérbola O.

Los puntos donde la hipérbola interseca al eje transverso se denominan **vértices** de la hipérbola V_1 y V_2.

Al igual que en la elipse, se conoce como **distancia focal** a la distancia entre los dos focos $2c$. La distancia entre los vértices es $2a$. A diferencia de la elipse, aquí se tiene $2c > 2a$ (por tanto $c > a$) y se puede considerar $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Este valor se denomina longitud del **semieje conjugado** de la hipérbola.

El segmento de recta perpendicular al eje transverso, que une dos puntos de la hipérbola y que incluye a uno de los focos, se denomina **lado recto** y su longitud es $\frac{2b^2}{a}$.

El cociente $e = \frac{c}{a}$, que es un número mayor que 1, se denomina **excentricidad** de la hipérbola.

Al igual que en la elipse, se considerarán en primer lugar las hipérbolas centradas en el origen de coordenadas y con focos en el eje de abscisas.

Forma canónica de la ecuación de una hipérbola

La ecuación de una hipérbola centrada en el origen, y con focos en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, se puede obtener aplicando la definición:

$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ (se supondrá que $d(P, F_1) > d(P, F_2)$)

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a \quad (\mathrm{I})$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = f \quad (\mathrm{II})$$

Multiplicando las expresiones (I) y (II):

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\right)^2 = 2af$$

$$(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) - (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = 2af$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 = 2af$$

$$4xc = 2af$$

$$f = \frac{2xc}{a}$$

Reemplazando f en (II) y sumando las expresiones (I) y (II):

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \frac{2xc}{a}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2 = a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = a^2+2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}$$

$$c^2-a^2 = \frac{x^2c^2}{a^2}-x^2-y^2$$

$$c^2-a^2 = x^2\left[\frac{c^2}{a^2}-1\right]-y^2$$

$$x^2\left[\frac{c^2-a^2}{a^2}\right]-y^2 = c^2-a^2$$

Resolviendo y dividiendo la expresión por c^2-a^2:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Reemplazando c^2-a^2 por b^2, tenemos:

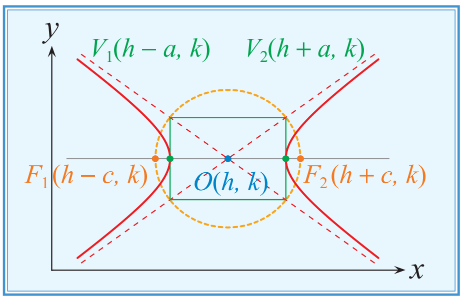
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación de una hipérbola con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Si una hipérbola tiene sus ejes transverso y conjugado paralelos a los ejes de coordenadas, y su centro en el punto $O(h, k)$, se pueden dar los siguientes casos:

- Eje transverso horizontal:

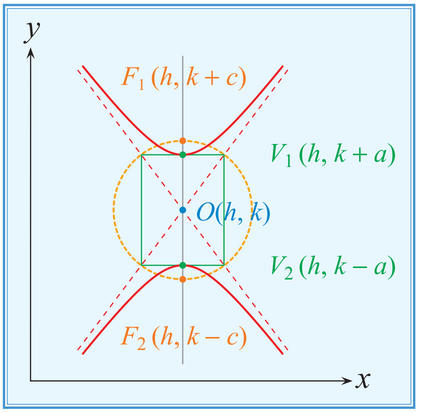
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h \pm a, k)$, y los focos son de la forma $(h \pm c, k)$.

- Eje transverso vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Los vértices son los puntos de la forma $(h, k \pm a)$, y los focos son de la forma $(h, k \pm c)$.

En ambos casos, los focos están en la intersección del círculo centrado en $O(h, k)$, y de longitud de radio c, con el eje transverso.

Asíntotas oblicuas de una hipérbola

Para el caso de una hipérbola con eje transverso horizontal, cuyo centro es el origen de coordenadas, la ecuación sería:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Despejando y en la ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$ o cuando $x \rightarrow +\infty$, el término $\frac{a^2}{x^2}$ se aproxima a cero, de modo que la expresión radical se aproxima a uno. La gráfica de la hipérbola se aproxima a las asíntotas oblicuas, cuyas ecuaciones son:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Para el caso de una hipérbola con eje transverso vertical, cuyo centro es el origen de coordenadas, la ecuación sería:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Realizando un procedimiento algebraico similar, esta hipérbola tiene dos asíntotas oblicuas, cuyas ecuaciones son:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

Si el centro de la hipérbola es $O(h, k)$, considere:

Eje transverso horizontal
Las asíntotas oblicuas tienen las ecuaciones:

$$(y - k) = \frac{b}{a}(x - h) \quad \text{y} \quad (y - k) = -\frac{b}{a}(x - h)$$

Eje transverso vertical
Las asíntotas oblicuas tienen las ecuaciones:

$$(y - k) = \frac{a}{b}(x - h) \quad \text{y} \quad (y - k) = -\frac{a}{b}(x - h)$$

Dos hipérbolas que tienen el mismo conjunto de asíntotas son denominadas **conjugadas**, como es el caso de las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$ y $y^2 - x^2 = 1$.

Rectángulo auxiliar

Las dimensiones de este rectángulo son $2a$ y $2b$; geométricamente, las diagonales de esta figura plana forman parte de las asíntotas oblicuas a las cuales se ha hecho referencia. El área de la superficie de este rectángulo es $4ab$ unidades cuadradas.

Si el rectángulo auxiliar es un cuadrado, esto es $a = b$, a este tipo de hipérbolas que tienen iguales las longitudes de sus semiejes se denominan **hipérbolas equiláteras.**

Forma general de la ecuación de una hipérbola

Dada una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0,\ A, B, D, E, F \in \mathbb{R}$; $A \neq 0$, $B \neq 0$, ésta puede transformarse en otra del tipo $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ó $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, la cual representa la ecuación de una hipérbola con eje transverso horizontal o vertical, respectivamente.

Así, la condición necesaria para que la ecuación cuadrática represente a una hipérbola, es que los coeficientes A y B tengan signos diferentes.

Ejemplo 10.38 Ecuación de una hipérbola.

Encuentre la forma canónica de la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$.

Determine su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas.

Solución:

$$(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) - 12 = 0$$
$$(x+1)^2 - 1 - (y-2)^2 + 4 - 12 = 0$$
$$(x+1)^2 - (y-2)^2 = 1 - 4 + 12 = 9$$
$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Se trata de una hipérbola con el eje transverso horizontal, con centro en $O(-1, 2)$ y sus semiejes $a = 3$, $b = 3$.

Los vértices son los puntos $V_1(-4, 2)$ y $V_2(2, 2)$.

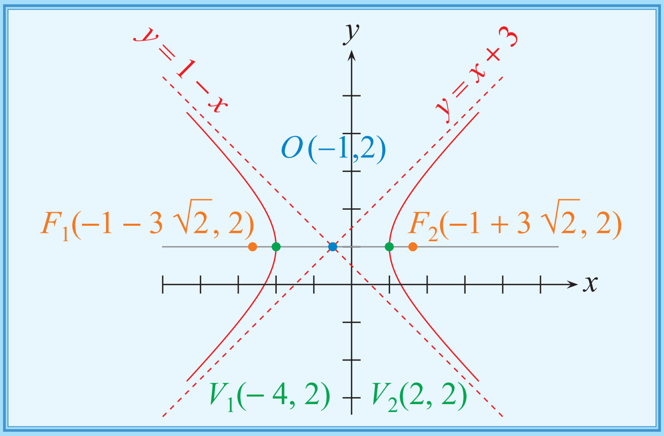
La semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Los focos son $F_1(-1 - 3\sqrt{2}, 2)$ y $F_2(-1 + 3\sqrt{2}, 2)$.

Para hallar las asíntotas se iguala a cero el primer miembro de la ecuación reducida:

$$x + 1 = y - 2 \quad \Rightarrow \quad y = x + 3$$
$$x + 1 = -y + 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$$

Su gráfica sería:



Ejemplo 10.39 Ecuación de una hipérbola.

Encuentre la forma canónica de la ecuación de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$.

Determine su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas.

Solución:

Se asocian los términos que tengan la misma incógnita y se sacan como factores comúnes, el coeficiente del término cuadrático:

$$(4x^2 - 8x) - (9y^2 - 36y) + 4 = 0$$
$$4(x^2 - 2x) - 9(y^2 - 4y) + 4 = 0$$

Se completa trinomio cuadrado perfecto en x y y:

$$4(x-1)^2 - 4 - 9(y-2)^2 + 36 + 4 = 0$$

Se divide entre -36:

$$\frac{4(x-1)^2}{-36} - \frac{9(y-2)^2}{-36} = 1$$

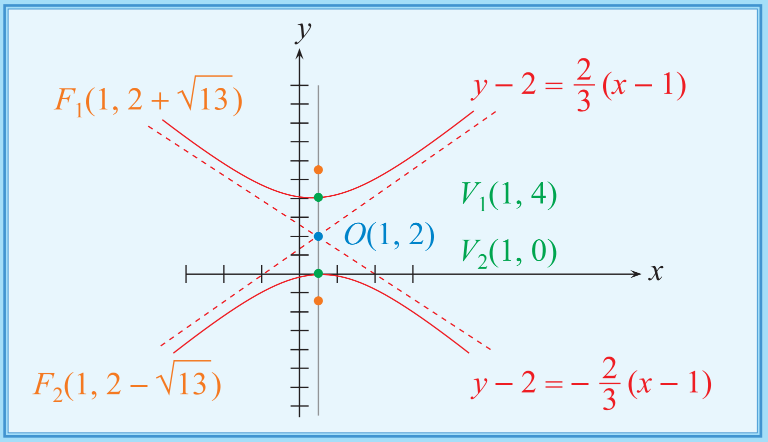
$$\frac{(x-1)^2}{-36/4} - \frac{(y-2)^2}{-36/9} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{-9} - \frac{(y-2)^2}{-4} = 1 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$

- Se trata de una hipérbola con el eje transverso vertical, con centro en $O(1, 2)$ y sus semiejes son $a = \sqrt{4} = 2$ y $b = \sqrt{9} = 3$.

- Los vértices son los puntos $(1, 2 \pm 2)$, es decir, $V_1(1, 4)$ y $V_2(1, 0)$.
- La semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.
- Los focos son los puntos $F_1(1, 2 + \sqrt{13})$ y $F_2(1, 2 - \sqrt{13})$.
- Asíntotas:

$$\Rightarrow y - 2 = \pm \frac{2}{3}(x - 1): \begin{cases} y - 2 = \dfrac{2}{3}(x - 1) \\ y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 1) \end{cases}$$

Su gráfica sería:



Ejemplo 10.40 Circunferencia e hipérbola.

Si los vértices de la hipérbola $9x^2 - 6y^2 - 72x + 24y + 66 = 0$ son los extremos de uno de los diámetros de una circunferencia, determine la ecuación de la circunferencia.

Solución:

Analizamos la ecuación de la hipérbola, a fin de obtener la información necesaria:

$$9x^2 - 6y^2 - 72x + 24y + 66 = 0$$
$$9(x^2 - 8x + 16) - 6(y^2 - 4y + 4) = -66 + 144 - 24$$
$$9(x - 4)^2 - 6(y - 2)^2 = 54$$
$$\frac{(x - 4)^2}{6} - \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

De donde se obtiene que:

$$a^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{6}$$
$$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

$c^2 = b^2 + a^2$
$c^2 = 6 + 9$
$c^2 = 15$
$c = \sqrt{15}$

Las coordenadas de los vértices de la hipérbola cuyo eje transverso es paralelo al eje X son:

$V_1(4 - \sqrt{6}, 2)$ $\qquad$ $V_2(4 + \sqrt{6}, 2)$

A partir de V_1 y V_2 podemos obtener la longitud del diámetro de la circunferencia solicitada determinando la distancia entre V_1 y V_2:

$$d(V_1, V_2) = \sqrt{(4 - \sqrt{6} - 4 - \sqrt{6})^2 + (2 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{24}$$
$$d(V_1, V_2) = 2\sqrt{6}$$

Luego, la longitud del radio es $r = \sqrt{6}$.

Ahora sólo necesitamos las coordenadas del centro de la circunferencia, las mismas que podemos determinar encontrando las del punto medio entre V_1 y V_2, y así:

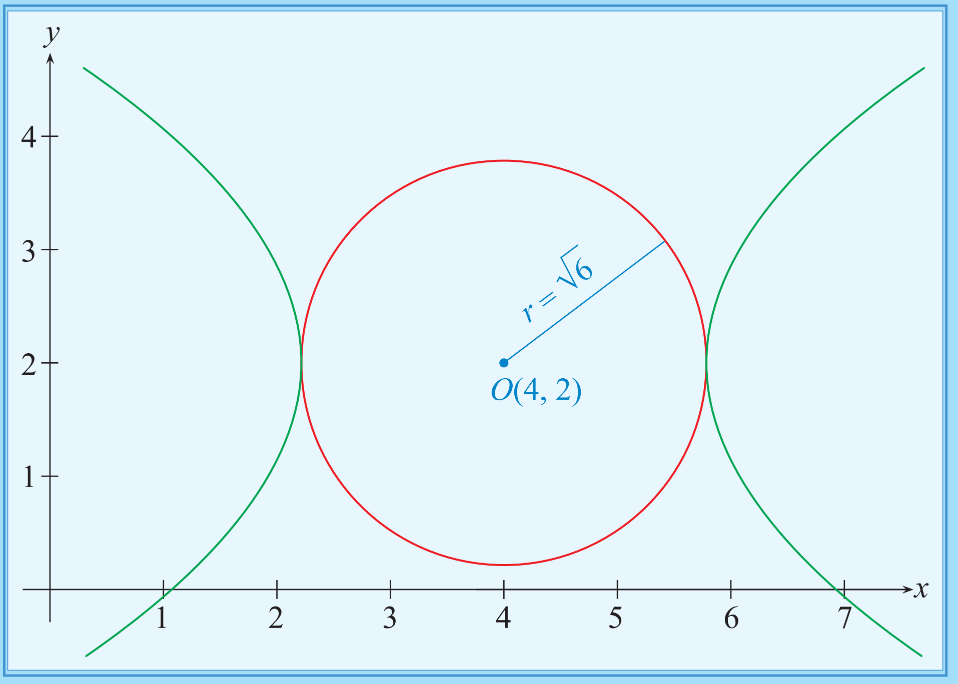
$$h = \frac{4 - \sqrt{6} + 4 + \sqrt{6}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$k = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Luego, el centro de la circunferencia es $O(4, 2)$, con lo cual su ecuación sería:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{6})^2$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 6$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 14 = 0$$

Su gráfica sería:



Ejemplo 10.41 Elipse e hipérbola.

Si se tiene la hipérbola $3x^2 - y^2 - 12x - 2y + 8 = 0$, determine la ecuación de una elipse, tal que sus focos son los vértices de la hipérbola y tal que sus vértices son los focos de la hipérbola.

Solución:

De la ecuación de la hipérbola y completando trinomios cuadrado perfecto, se tiene:

$$3(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) + 8 - 12 + 1 = 0$$

$$3(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = -8 + 12 - 1$$

$$3(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = 3$$

$$\frac{(x - 2)^2}{1} - \frac{(y + 1)^2}{3} = 1$$

Luego:

$a = 1$

$b = \sqrt{3}$

$c = 2$

Por hipótesis:

$c_{\text{HIPÉRBOLA}} = a_{\text{ELIPSE}} = 2$

$a_{\text{HIPÉRBOLA}} = c_{\text{ELIPSE}} = 1$

Luego, en la elipse:

$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$ y su ecuación sería:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

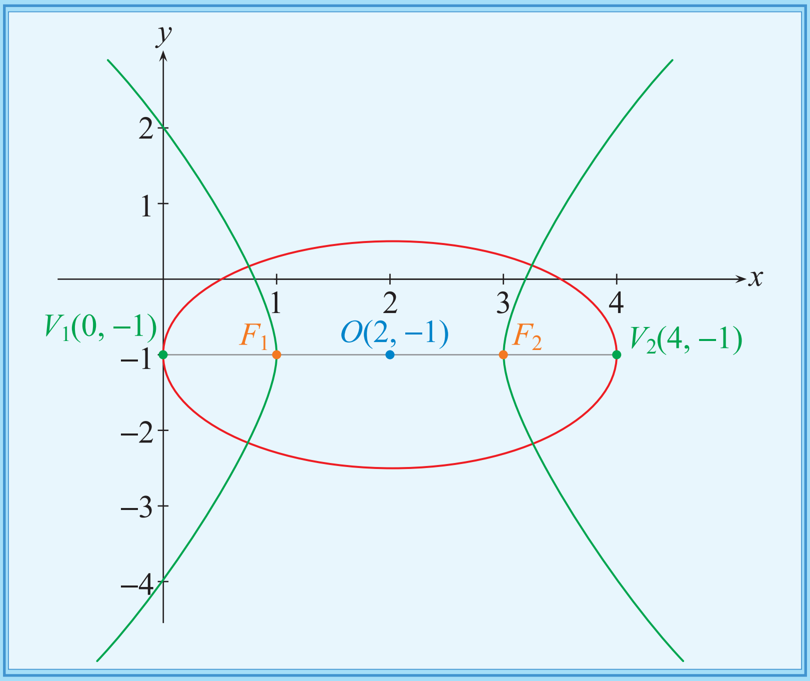
Llevando a la forma general esta ecuación, tenemos:

$3\,(x^2 - 4x + 4) + 4\,(y^2 + 2y + 1) = 12$

$3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$

$a = 2$	$b = \sqrt{3}$	$c = 1$
$O(2, -1)$	$V_1(0, -1)$	$V_2(4, -1)$
$F_1(1, -1)$	$F_2(3, -1)$	

La gráfica de la elipse sería:



10.2.5 Lugares geométricos

Las definiciones de las cónicas han sido estructuradas a partir de propiedades geométricas relacionadas con las distancias entre puntos, lo cual significa que las cónicas son "lugares geométricos", cuyas ecuaciones pueden ser deducidas tomando como referencia ciertas condiciones, tal como se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.42 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que su distancia al punto $P_1(1, 2)$ es tres veces su distancia al punto $P_2(2, -3)$.

Solución:

Aplicando el teorema de la distancia entre puntos, se debe cumplir que:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 3\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 9(x-2)^2+9(y+3)^2$$

Desarrollando los binomios y agrupando términos semejantes:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4 = 9x^2-36x+36+9y^2+54y+81$$

$$8x^2+8y^2-34x+58y+112=0$$

Reduciendo a una forma canónica que sea conocida:

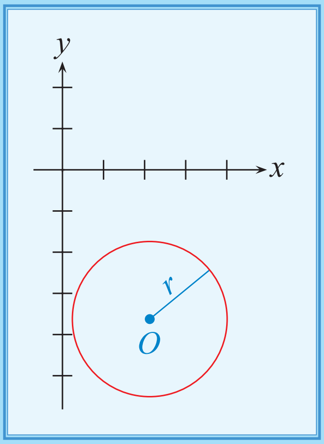
$$8\left(x^2-\frac{34}{8}x\right)+8\left(y^2+\frac{58}{8}y\right)=-112$$

$$8\left(x^2-\frac{34}{8}x+\frac{289}{64}\right)+8\left(y^2+\frac{58}{8}y+\frac{841}{64}\right)=-112+\frac{289}{8}+\frac{841}{8}$$

$$8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2+8\left(y+\frac{29}{8}\right)^2=\frac{117}{4}$$

$$\left(x-\frac{17}{8}\right)^2+\left(y+\frac{29}{8}\right)^2=\frac{117}{32}$$

Se trata de una circunferencia con centro en $O\left(\frac{17}{8}, -\frac{29}{8}\right)$ y longitud de radio $r = \sqrt{\frac{117}{32}}$.



Ejemplo 10.43 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico dado por el conjunto de puntos $P(x, y)$ que cumplen con la condición de que su distancia al eje Y es el doble de su distancia al punto $P_1(2, -3)$.

Solución:

Tomamos un punto $P(x, y)$, determinamos su distancia al punto $P_1(2, -3)$ y al eje Y para cumplir con la condición del problema, obteniendo:

$$2\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = |x|$$

Resolviendo la expresión y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$4(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = x^2$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 6y + 9) = x^2$$

$4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 + 24y + 36 = x^2$

$3x^2 - 16x + 4y^2 + 24y + 52 = 0$

Completando trinomios cuadrados perfectos tenemos:

$$3\left(x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9}\right) + 4(y^2 + 6y + 9) = -52 + \frac{64}{3} + 36$$

$$3\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + 4(y + 3)^2 = \frac{16}{3}$$

Dividiendo toda la expresión por $\frac{16}{3}$, se obtiene:

$$\frac{\left(x - \frac{8}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{(y + 3)^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Con lo que se puede observar que se trata de una elipse cuyo eje mayor es horizontal con las siguientes características:

$a^2 = \frac{16}{9}$	$b^2 = \frac{4}{3}$	$c^2 = a^2 - b^2$
$a = \frac{4}{3}$	$b = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$c^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{3}$
		$c^2 = \frac{4}{9}$
		$c = \frac{2}{3}$

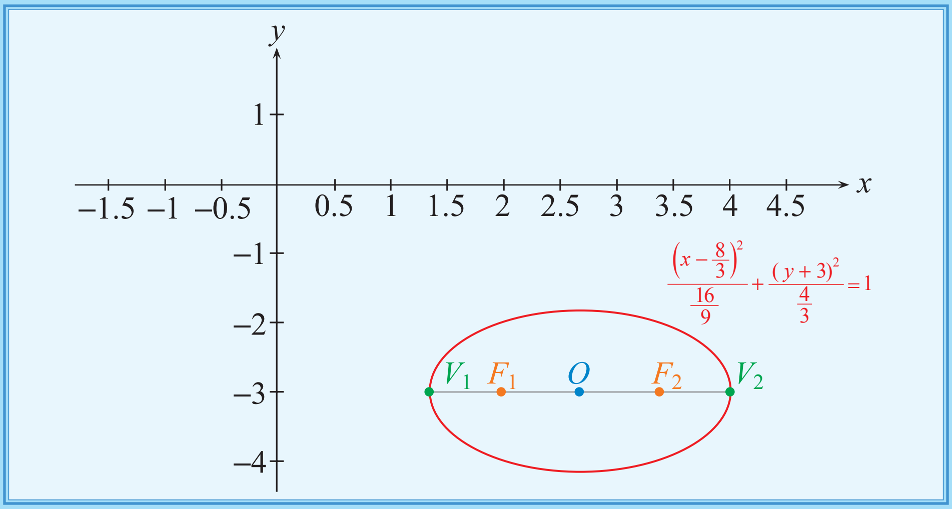
Además:

$O\left(\frac{8}{3}, -3\right)$

$V_1\left(\frac{4}{3}, -3\right)$ $\quad$ $V_2\,(4, -3)$

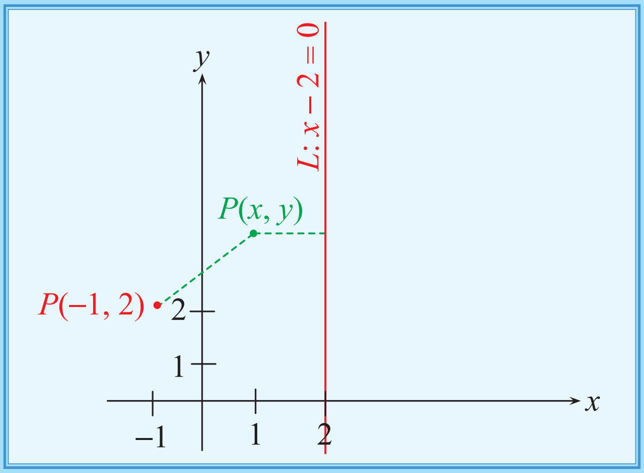
$F_1\,(2, -3)$ $\quad$ $F_2\left(\frac{10}{3}, -3\right)$

Cuya gráfica sería:



Ejemplo 10.44 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico del conjunto de puntos en el plano, tales que su distancia al punto $(-1, 2)$ sea el doble de la distancia a la recta $L: x-2=0$.



Solución:

Determinamos la distancia de los puntos del plano $P(x, y)$ al punto $P(-1, 2)$ y a la recta $x = 2$, para luego igualarlas con la condición dada:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 2\,|x-2|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4(x-2)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$3x^2 - 18x - y^2 + 4y + 11 = 0$$

Completando trinomios cuadrados perfectos y analizando esta ecuación, tenemos:

$$3(x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 4y + 4) + 11 - 27 + 4 = 0$$

$$3(x-3)^2 - (y-2)^2 = 12$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

Con lo que se puede concluir que esta ecuación representa una hipérbola cuyo eje transverso es horizontal y que tiene las siguientes características:

$O(3, 2)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

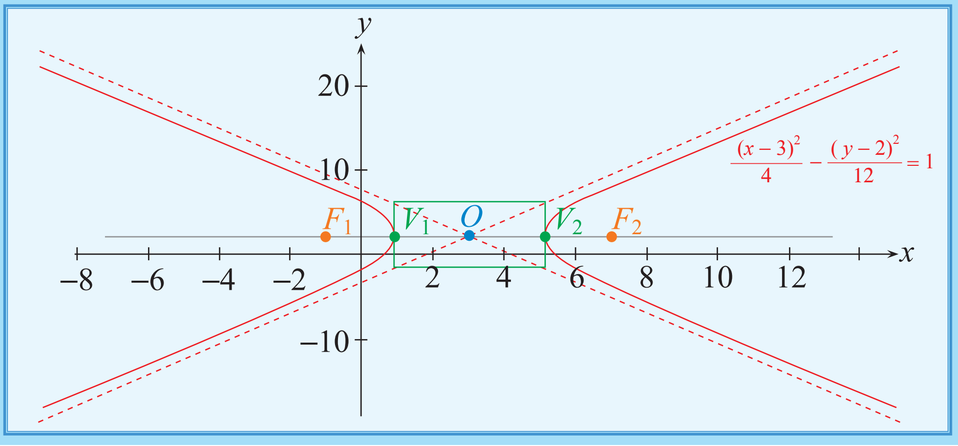
$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c = 4$

$V_1(1, 2)$ $\quad$ $V_2(5, 2)$

$F_1(-1, 2)$ $\quad$ $F_2(7, 2)$

La siguiente gráfica resume las características anotadas:



Ejemplo 10.45 Lugares geométricos.

Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los puntos $P_1(2, 2)$ y $P_2(10, 2)$ es 6.

Solución:

De la información proporcionada, se puede deducir que este lugar geométrico corresponde a una hipérbola.

Los puntos P_1 y P_2 serían sus focos, por lo tanto su centro es $O(6, 2)$ y su eje transverso es horizontal.

$$|\overline{PP_1} - \overline{PP_2}| = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$c = \overline{OP_1} = \overline{OP_2} = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

La ecuación de la hipérbola sería:

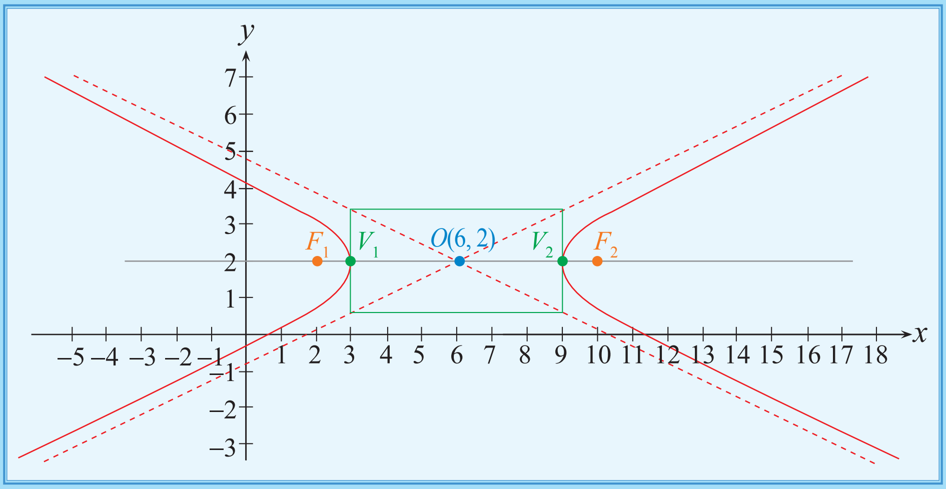
$$\frac{(x-6)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

Cuyos elementos son:

$V_1(3, 2)$ $\quad$ $V_2(9, 2)$

$F_1(2, 2)$ $\quad$ $F_2(10, 2)$

Su gráfica sería:



10.2.6 Excentricidad

El conjunto de los puntos $P(x, y)$, tales que la distancia entre P y el foco F, dividida para la distancia entre P y la recta directriz L, es una constante positiva e denominada excentricidad, satisfacen la siguiente ecuación:

$$|d(P, F)| = e\,|d(P, L)|$$

La cual representa un lugar geométrico en el plano denominado cónica, de acuerdo a los siguientes casos:

Si $e = 0$, se trata de una circunferencia.
Si $e = 1$, se trata de una parábola.
Si $0 < e < 1$, se trata de una elipse.
Si $e > 1$, se trata de una hipérbola.