4 TEMAS ADICIONALES DE LA DERIVADA

OBJETIVOS:

- Determinar intervalos de Crecimiento y de Decrecimiento
- Determinar extremos
- Determinar intervalos de Concavidad.
- Graficar funciones sofisticadas.
- Utilizar el teorema del valor medio para derivadas.
- Calcular indeterminaciones empleando derivadas.

4.1 MONOTONÍA

La derivada nos permite determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.

4.1.2 Teorema de Monotonía

> Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y diferenciable en todo punto interior de $[a,b]$. Entonces:
>
> 1. Si $f'(x) > 0, \quad \forall x \in [a,b]$ entonces f es ***creciente*** en $[a,b]$
> 2. Si $f'(x) < 0, \quad \forall x \in [a,b]$ entonces f es ***decreciente*** en $[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN.

Se demostrará el primer inciso del teorema.

Suponga que $f'(x) > 0$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$; es decir $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.

Suponga ahora que $x_0 < x$, entonces $f(x_0) < f(x)$, lo cual indica que f es creciente.

Si $x < x_0$ entonces $f(x) < f(x_0)$ lo cual también indica que f es creciente

Para el caso $f'(x) < 0$, la demostración es análoga.

Ejemplo 1

Analice la monotonía de $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

SOLUCIÓN:

De acuerdo al teorema anterior para determinar los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento analizamos la primera derivada de f. Es decir, a $f'(x) = 4x - 4$

El asunto es determinar en que intervalo para x esta derivada tiene valores positivos y en qué intervalo tiene valores negativos, para lo cual factorizamos $f'(x) = 4(x-1)$; se observa que:

x	$f'(x)$	f
$x < 1$	Negativa (-)	decrece
$x > 1$	Positiva(+)	crece

Ejemplo 2

Analice la monotonía de $f(x)=x^3-3x^2+3$

SOLUCIÓN:

Analizando la primera derivada $f'(x)=3x^2-6x$

En la forma factorizada $\boxed{f'(x)=3x(x-2)}$ se observa que:

x	$f'(x)$	f
$x<0$	Positiva (+)	crece
$0<x<2$	Negativa (-)	decrece
$x>2$	Positiva (+)	crece

Ejercicios Propuestos 4.1

1. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

1. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+17$	4. $f(x)=3x^3-3x^2+12x-5$
2. $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3$	5. $f(x)=(x^2-1)^4$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+2$	6. $f(x)=(x^3-1)^4$

4.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Este es uno de los problemas más interesante que resuelve la derivada

4.2.1 DEFINICIÓN

Sea $f: I\subseteq R \mapsto R$. Suponga "$x_0$" pertenece al intervalo I. Entonces:

1. $f(x_0)$ es el valor ***máximo de*** f en I , si $f(x_0)\geq f(x), \forall x\in I$. (El mayor de todos)
2. $f(x_0)$ es el valor ***mínimo de*** f en I, si $f(x_0)\leq f(x), \forall x\in I$. (El menor de todos)

Al valor máximo y al valor mínimo de f se le llama **VALOR EXTREMO**.

Ahora debemos dar las condiciones para garantizar la existencia de los valores extremos.

4.2.2 TEOREMA. Condición suficiente para la existencia de Máximos y Mínimos

> Si f es una función continua definida en un intervalo $[a,b]$ entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en $[a,b]$.

Lo anterior quiere decir que siempre encontraremos extremos cada vez que trabajemos con funciones continuas en un intervalo cerrado. Pero sigue habiendo una interrogante ¿cómo obtenerlos?

Podemos suponer que deben existir puntos candidatos a ser extremos. Es decir, dedicarnos a analizar sólo cierta clase de puntos. Estos serán los denominados Puntos críticos.

4.2.3 DEFINICIÓN. Puntos Críticos.

> Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$ que contiene a "x_0".
> Entonces "x_0" es llamado **Punto Crítico** si es:
> - Un punto extremo del intervalo, es decir $x_0 = a$, $x_0 = b$. Estos serán denominados Puntos Críticos de **Frontera**.
>
> O bien,
> - Un punto donde la derivada es igual a cero; es decir $f'(x_0) = 0$. Estos serán denominados Puntos Críticos

Estacionarios. (En estos puntos la recta tangente es horizontal).

O bien,

- Un punto donde la derivada no existe; es decir $f´(x_0)$ no está definida. Estos serán denominados Puntos Críticos **Singulares**. (En estos puntos la gráfica de f tiene unos picos. Por ejemplo $f(x)=|x|$, tiene un punto crítico singular (pico) en $x=0$)

4.2.4 TEOREMA

Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$ que contiene a "x_0". Si $f(x_0)$ es un **valor extremo** entonces "x_0" es un **Punto Crítico**.

Para el caso de puntos **críticos de frontera**, no se requiere demostración, debido a que obviamente estos serán candidatos a que allí se produzcan los extremos de la función. La demostración se la realizará para los casos de puntos críticos estacionarios y puntos críticos singulares.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f(x_0)$ un valor máximo; es decir $f(x_0)\geq f(x)$, entonces: $f(x)-f(x_0)\leq 0$

Si $x>x_0$, dividiendo por $x-x_0$ tenemos $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$

Ahora obteniendo límite $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq \lim\limits_{x\to x_0^+} 0$ resulta $f´(x_0^+)\leq 0$.

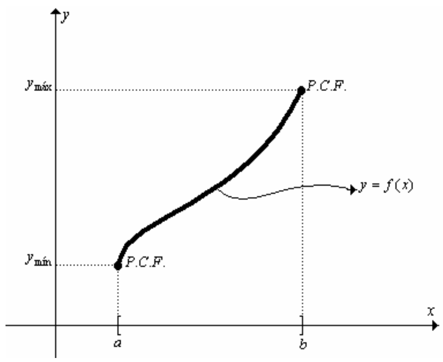
Para $x<x_0$, tenemos, obteniendo límite $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq \lim\limits_{x\to x_0^-} 0$ resulta $f´(x_0^-)\geq 0$

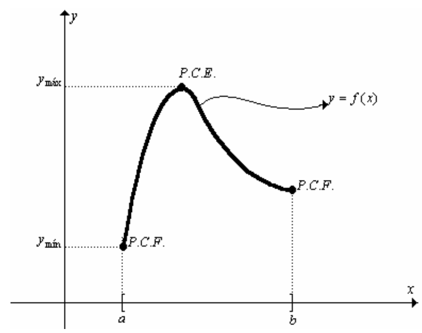
Suponga que f es derivable en x_0, entonces $f´(x_0)=0$; es decir x_0 es un punto crítico estacionario.

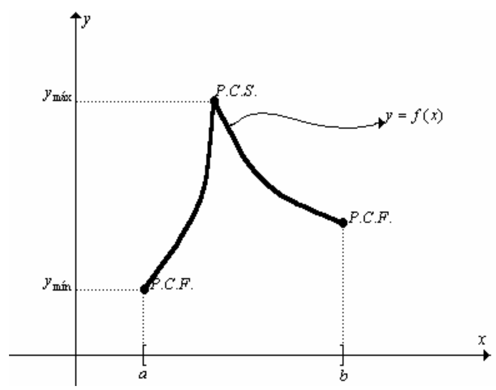
Suponga que f no es derivable en x_0, entonces $f´(x_0)$ no existe; es decir x_0 es un punto crítico singular.

La demostración sería análoga para el caso de que $f(x_0)$ sea un valor mínimo.

Por lo tanto, **los valores extremos de una función se producirán siempre en los puntos críticos**. Bastará con analizar los puntos críticos.







Además, el teorema anterior nos hace concluir que:

- Si "x_0" no es un punto crítico entonces no será extremo.
- Necesariamente los extremos se producen en los puntos críticos.
- Es suficiente que $f(x_0)$ sea un extremo para que "x_0" sea un punto crítico.
- Que "x_0" sea un punto crítico es una condición necesaria pero no es suficiente. Es decir, no todo punto crítico es extremo. En las gráficas anteriores, también se presentaban puntos críticos que no eran extremos. Esto nos hace pensar que deben existir criterios para clasificar los puntos críticos, sin embargos en problemas sencillos no son necesarios, un simple análisis basta.

Ejemplo 1

Determinar los extremos para $f(x)=2x^2-4x+5$ en $[0,3]$

SOLUCIÓN:

De acuerdo a lo enunciado, debemos analizar solamente los puntos críticos.

1. Puntos críticos de Frontera: $x_0=0$ y $x_0=3$
2. Puntos críticos Estacionarios: valores de x para los cuales la derivada es igual a cero. Para obtenerlos analizamos la derivada $f´(x)=4x-4$

   Ahora $\boxed{\begin{array}{l} f´(x)=0 \\ 4(x-1)=0 \end{array}}$, entonces sería: $x_0=1$.

3. Puntos críticos Singulares: valores de x para los cuales la derivada no existe. Al observar la derivada notamos que se define para toda x; por tanto, no existe puntos críticos singulares. Es lo que se espera debido a que las funciones polinomiales son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

Bien, ahora nos corresponde clasificar a los puntos críticos, para lo cual, evaluamos la función en los puntos críticos (Esto es suficiente debido a que se trata de una función polinómica, más adelante aprenderemos criterios más fuertes, para otros casos):

$$f(0)=2(0)^2-4(0)+5=5$$
$$f(3)=2(3)^2-4(3)+5=11$$
$$f(1)=3$$

Por inspección, se determina que:

En $\boxed{x_0=3}$ se encuentra el Valor Máximo f.

Y en $\boxed{x_0=1}$ se encuentra el Valor Mínimo de f.

Ejemplo 2

Determinar los extremos para $f(x)=x^3-3x^2+3$ en $[-2,3]$

SOLUCIÓN:

Primero determinamos los puntos críticos.

1. Puntos críticos de Frontera: $x_0=-2$ y $x_0=3$
2. Puntos críticos Estacionarios: Analizando la derivada $f´(x)=3x^2-6x$, tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} f´(x)=0 \\ 3x^2-6x=0 \\ 3x(x-2)=0 \end{array}}$$

   Entonces serían: $x_0=0$ y $x_0=2$.

3. Puntos críticos Singulares: No hay.

   Bien, ahora evaluando en la función:

$$f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2+3=-8-12+3=-17$$
$$f(3)=(3)^3-3(3)^2+3=27-27+3=3$$
$$f(0)=3$$
$$f(2)=(2)^3-3(2)^2+3=-1$$

De acuerdo a estos resultados se puede concluir que el **valor máximo** de la función es 3, que se produce tanto en $x_0 = 3$ como en $x_0 = 0$; y, el **valor mínimo** de la función es -17 que se produce en $x_0 = -2$.

Ejercicios Propuestos 4.2

1. Determine el valor máximo y el valor mínimo :

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$ en $[-2,3]$	4. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 12x - 5$ en $[-1,1]$
2. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3$ en $[-3,3]$	5. $f(x) = (x^2 - 1)^4$ en $[-2,2]$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ en $[-5,3]$	6. $f(x) = (x^3 - 1)^4$ en $[-1,2]$

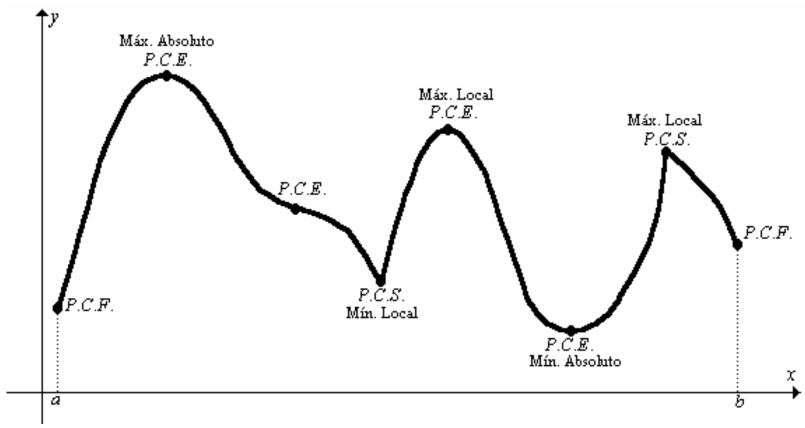
Hasta el momento nos habíamos preocupado de determinar el mayor de todos los valores de la función y el menor de todos en todo su dominio o en un intervalo de su dominio, pero esto nos deja insatisfechos con respecto a puntos críticos que bien pudieron ser extremos, u otros puntos que los pudiéramos considerar máximos o mínimos cuando no lo son.

4.2.5 Máximos y Mínimos Locales O Relativos

Sea f una función de variable real. Sea "x_0" un punto del dominio de f. Entonces:

1. $f(x_0)$ es un ***valor máximo local*** de f, si existe un intervalo (a,b) en el dominio de f que contiene a "x_0" tal que $f(x_0)$ es el valor máximo de f en (a,b).
2. $f(x_0)$ es un ***valor mínimo local*** de f, si existe un intervalo (a,b) en el dominio de f que contiene a "x_0" tal que $f(x_0)$ es el valor mínimo de f en (a,b).
3. $f(x_0)$ es un valor ***extremo local*** de f, si es un máximo o un mínimo local.

Al mayor valor y al menor valor de todos, se les llamará **extremos absolutos**. Observe el siguiente gráfico:



Un criterio para clasificar a los extremos locales es el que sigue.

4.2.6 Teorema: Criterio de la primera derivada.

Sea f continua en (a,b) que contiene al punto crítico "x_0". Entonces:

1. Si $f'(x) > 0, \forall x \in (a, x_0)$ y $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, b)$ entonces $f(x_0)$ es un ***valor máximo local*** de f.
2. Si $f'(x) < 0, \forall x \in (a, x_0)$ y $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, b)$ entonces $f(x_0)$ es un ***valor mínimo local*** de f.
3. Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de "x_0" entonces $f(x_0)$ **NO** es un valor extremo de f.

Ejemplo

Para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Analizando la primera derivada $\boxed{f'(x) = 3x(x-2)}$ se observó que:

x	$f'(x)$	f
$x < 0$	Positiva (+)	crece
$0 < x < 2$	Negativa (-)	decrece
$x > 2$	Positiva (+)	crece

Entonces:

1. Como **antes** de $x = 0$ la derivada es **positiva** y **después** es **negativa** se concluye que $f(0) = 3$ es un **máximo** local.
2. Como **antes** de $x = 2$ la derivada es **negativa** y **después** es **positiva** se concluye que $f(2) = -1$ es un **mínimo** local.

Ejercicios Propuestos 4.3

Emplee el criterio de la primera derivada para clasificar los extremos locales:

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$	4. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 12x - 5$
2. $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{4}{3}x^3$	5. $f(x) = (x^2 - 1)^4$
3. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 2$	6. $f(x) = (x^3 - 1)^4$

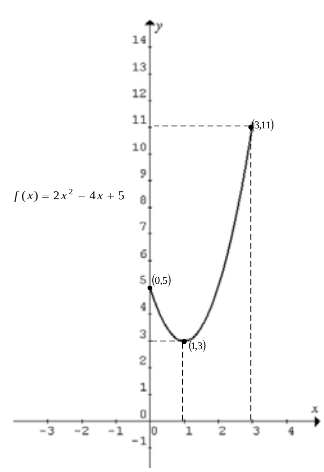
Si nuestro objetivo ahora fuese trazar la gráfica de las funciones analizadas, no tendríamos inconveniente, debido a que la información que hemos obtenido nos permite hacerlo.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ en $[0,3]$.

SOLUCIÓN:

Se ha obtenido $x_0 = 1$ como **Punto Critico Estacionario** y también se ha determinado que antes de este punto la gráfica de la función es decreciente y después es creciente, por tanto su gráfica sería:



Note que para obtener la gráfica de la función anterior no es necesario el análisis que se realizó, hubiera bastado con los criterios conocidos acerca de funciones cuadráticas. Sin embargo se decidió realizarlo para que el lector compruebe la concordancia de los resultados, aplicando uno u otro criterio, y además para que se vaya familiarizando con los criterios nuevos, expuestos en esta sección.

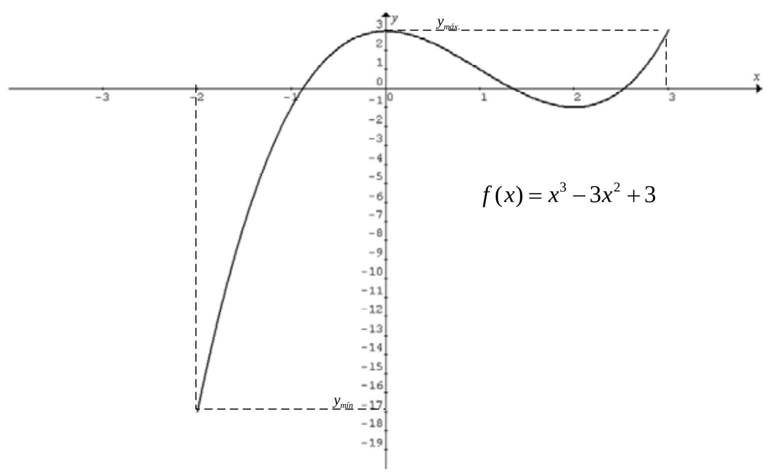
Para otros casos se hace imprescindible los nuevos criterios.

Ejemplo 2

Graficar $f(x)=x^3-3x^2+3$ en $[-2,3]$

<u>SOLUCIÓN</u>:

Ya se obtuvieron los Puntos Críticos Estacionarios $x_0=0$ y $x_0=2$, también se determinó que antes de $x_0=0$ la gráfica de la función es creciente y después es decreciente hasta el otro punto $x_0=2$; y después de este punto crítico es otra vez creciente; por tanto, su gráfica es:



Ejercicios Propuestos 4.4

Elabore la gráfica de:

1. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+17$	4. $f(x)=3x^3-3x^2+12x-5$
2. $y=3x^5-20x^3$	5. $f(x)=(x^2-1)^4$
3. $y=\frac{1}{3}x^3-9x+2$	6. $f(x)=(x^3-1)^4$

Para los casos de funciones polinomiales, los criterios estudiados podrían ser suficientes para obtener una buena aproximación de su gráfica, debido a que son funciones continuas y derivables en todo su dominio y se puede concluir sobre su comportamiento sin cometer error alguno; sin embargo, para otros casos se hace necesario otros criterios.

Ejemplo.

Graficar $f(x) = x^{4/5}$

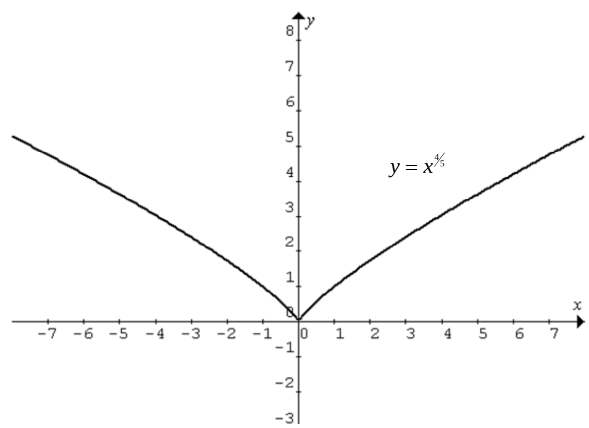
SOLUCIÓN:

Analizando la derivada $f'(x) = \frac{4}{5}x^{-1/5} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$, tenemos:

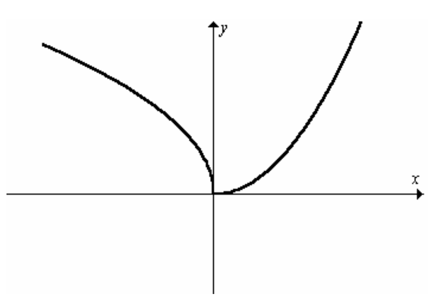
Punto Crítico Singular: $x_0 = 0$

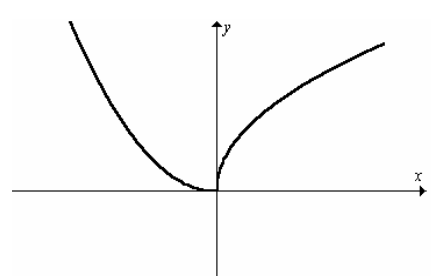
x	$f'(x)$	f
$x<0$	Negativa (-)	decrece
$x>0$	Positiva (+)	crece

Por tanto, se puede decir que su gráfica es:



Para la gráfica del último ejemplo se hace necesario determinar la forma de la curva, porque con la información de monotonía obtenida queda la duda de que la gráfica presente el comportamiento anterior, sino más bien tengo uno de los siguientes comportamientos:





4.3 CONCAVIDAD

4.3.1 Teorema de concavidad

> Sea f una función dos veces derivable sobre un intervalo abierto I. Entonces:
> 1. Si $f''(x) > 0, \quad \forall x \in I$ entonces f es ***cóncava hacia arriba*** en I.
> 2. Si $f''(x) < 0, \quad \forall x \in I$ entonces f es ***cóncava hacia abajo*** en I.

Ejemplo 1

Analizar la concavidad de $f(x) = x^{4/3}$

SOLUCIÓN:

Como la primera derivada de f es $f'(x) = \frac{4}{5}x^{-1/5}$

entonces la segunda derivada es $f''(x) = -\frac{4}{25}x^{-6/5} = -\frac{4}{25\sqrt[5]{x^6}}$

Determinando el signo de la segunda derivada, se concluye que:

x	$f''(x)$	f
$x < 0$	Negativa (-)	Cóncava hacia abajo
$x > 0$	Negativa (-)	Cóncava hacia abajo

Certificando con esto que la gráfica de f es la que se proporcionó.

Otra definición importante es la que presentamos a continuación.

4.3.2 Puntos de Inflexión

> Sea f continua en "x_0", llamamos a $(x_0, f(x_0))$ un ***punto de inflexión*** de la gráfica de f, si es cóncava hacia arriba a un lado de "x_0" y cóncava hacia abajo al otro lado.

Es decir, en un punto de inflexión la segunda derivada cambiará de signo, o de positiva a negativa o de negativa a positiva.

Ejemplo 2

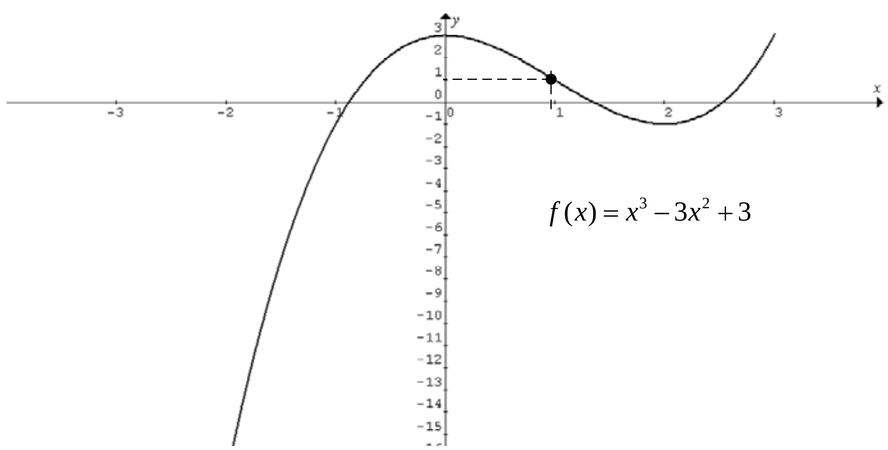
Analizar la concavidad de $f(x)=x^3-3x^2+3$

SOLUCIÓN:

Como la primera derivada de f es $f'(x)=3x^2-6x$ entonces la segunda derivada es $f''(x)=6x-6=6(x-1)$

x	$f''(x)$	f
$x<1$	Negativa (-)	Cóncava hacia abajo
$x>1$	Positiva (+)	Cóncava hacia arriba

Esto confirma la gráfica de f proporcionada anteriormente y además completa la información del comportamiento de la función.



Note que en la función del ejemplo anterior hay un punto donde su gráfica cambia de concavidad, éste es el punto de inflexión.

Ejercicios Propuestos 4.5

Determine los intervalos de concavidad:

1. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+17$	4. $f(x)=3x^3-3x^2+12x-5$
2. $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3$	5. $f(x)=\left(x^2-1\right)^4$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+2$	6. $f(x)=\left(x^3-1\right)^4$

Para clasificar los puntos críticos estacionarios en máximos y mínimos, también se podría aplicar este otro criterio.

4.3.3 Teorema: Criterio de la segunda derivada

> Supóngase que f' y f'' existen en (a,b) que contiene a "x_0" y que $f'(x_0)=0$.
>
> 1. Si $f''(x_0)<0$ entonces $f(x_0)$ es un valor ***máximo local*** de f.
> 2. Si $f''(x_0)>0$ entonces $f(x_0)$ es un valor ***mínimo local*** de f.

Ejemplo

Determinar los extremos aplicando el criterio de la segunda derivada para $f(x)=x^3-3x^2+3$

SOLUCIÓN:

De acuerdo a lo enunciado, debemos analizar solamente los puntos críticos estacionarios.

Puntos críticos Estacionarios: $\boxed{x=0}$ y $\boxed{x=2}$.

Bien, ahora nos corresponde clasificar a los puntos críticos, para lo cual:

$$f''(x)=6x-6$$

a) $f''(0)=6(0)-6=-6<0$ (negativo) por tanto aquí hay un MÁXIMO.

b) $f''(2)=6(2)-6=6>0$ (positivo) por tanto aquí hay un MÍNIMO.

4.4 ELABORACIÓN DE GRÁFICAS SOFISTICADAS

Para elaborar gráficas de funciones con reglas de correspondencias sofisticadas se sugiere seguir los ochos pasos siguientes:

1. Establecer el ***dominio*** de la función.
2. Establecer la ***simetría*** de las gráficas. Es decir, determinar si es par, impar o ninguna.
3. Establecer las ***asíntotas*** horizontales, verticales u oblicuas.
4. Establecer los ***puntos críticos*** de frontera, estacionarios y singulares.
5. Analizar la ***monotonía***. Es decir, determinar los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento.
6. Establecer los ***extremos*** relativos.
7. Analizar la ***concavidad***. Es decir, determine los intervalos donde es cóncava hacia arriba y los intervalos donde es cóncava hacia abajo.
8. Establecer los ***Puntos de Inflexión***.

Ejemplo 1

Graficar $f(x)=\dfrac{243x}{x^4+243}$

SOLUCIÓN:

Siguiendo los pasos indicados tenemos:

Paso 1. DOMINIO: $\boxed{Dom\ f=R}$

Paso 2. SIMETRÍA: $f(-x)=\dfrac{243(-x)}{(-x)^4+243}=-\dfrac{243x}{x^4+243}=-f(x)$ por tanto f es IMPAR.

Paso 3. ASÍNTOTAS:

VERTICALES: No hay (¿por qué?)

HORIZONTALES: Calculamos límite al infinito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{243x}{x^4+243}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{243x}{x^4}}{\frac{243x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{243}{x^3}}{243+\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{243+0}=0$$

Note que idéntico resultado se obtendría tomando límite a menos infinito, es decir:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{243x}{x^4+243}=0$$

Por tanto el eje x ($\boxed{y=0}$) es asíntota horizontal tanto para el infinito positivo como para el infinito negativo.

Paso 4. PUNTOS CRÍTICOS:

- P.C.F : no hay. ¿Por qué?
- P.C.E:

$$f'(x)=243\frac{\left(x^4+243\right)-x(4x^3)}{\left(x^4+243\right)^2}=243\frac{243-3x^4}{\left(x^4+243\right)^2}=243\frac{3\left(81-x^4\right)}{\left(x^4+243\right)^2}=$$

$$=243\frac{3\left(9-x^2\right)\left(9+x^2\right)}{\left(x^4+243\right)^2}=243\frac{3\left(3-x\right)\left(3+x\right)\left(9+x^2\right)}{\left(x^4+243\right)^2}$$

por lo tanto tenemos P.C.E: $\boxed{x_0=3}$ y $\boxed{x_0=-3}$

- P.C.S: no hay. ¿Por qué?

Paso 5. MONOTONÍA: Analizando el signo de la primera derivada, se concluye que:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
f'	$------$	$++++++$	$------$
f	*decrece*	*crece*	*decrece*

Paso 6: EXTREMOS: por el criterio de la primera derivada observamos que:

1. En $x_0=-3$ la primera derivada cambia de signo, de negativo a positivo, por tanto aquí existe un Mínimo local.
2. En $x_0=3$ la primera derivada cambia de signo, de positivo a negativo, por tanto aquí existe un Máximo local.

Paso 7: CONCAVIDAD: Debemos analizar la segunda derivada

$$f''(x)=D_x\left[729\frac{\left(81-x^4\right)}{\left(x^4+243\right)^2}\right]=729\frac{-4x^3\left(x^4+243\right)^2-\left(81-x^4\right)2\left(x^4+243\right)\left(4x^3\right)}{\left(x^4+243\right)^4}$$

$$=729\frac{4\left(x^4+243\right)\left[-x^3\left(x^4+243\right)-\left(81-x^4\right)2\left(x^3\right)\right]}{\left(x^4+243\right)^4}$$

$$=729\frac{4\left[-x^7-243x^3-162x^3+2x^7\right]}{\left(x^4+243\right)^3}$$

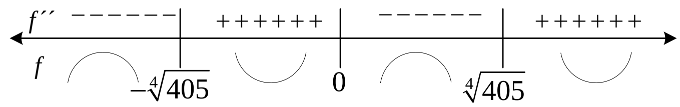
$$=729\frac{4\left[x^7-405x^3\right]}{\left(x^4+243\right)^3}$$

$$=729\frac{4x^3\left[x^4-405\right]}{\left(x^4+243\right)^3}$$

$$=729\frac{4x^3\left(x^2-\sqrt{405}\right)\left(x^2+\sqrt{405}\right)}{\left(x^4+243\right)^3}$$

$$=729\frac{4x^3\left(x-\sqrt[4]{405}\right)\left(x+\sqrt[4]{405}\right)\left(x^2+\sqrt{405}\right)}{\left(x^4+243\right)^3}$$

Entonces:

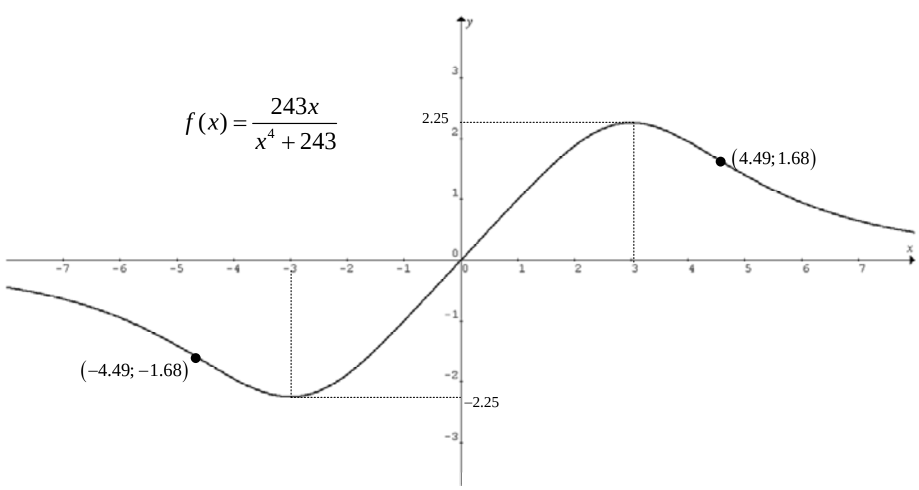


<u>Paso 8</u>: PUNTOS DE INFLEXIÓN

Como la segunda derivada cambia de signo tanto en $x=0$, $x=\sqrt[4]{405}$ y $x=-\sqrt[4]{405}$ entonces existen tres puntos de inflexión: $\left(-\sqrt[4]{405},\, f\left(-\sqrt[4]{405}\right)\right)$, $(0,0)$ y $\left(\sqrt[4]{405},\, f\left(\sqrt[4]{405}\right)\right)$.

En conclusión:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	f
$x<-\sqrt[4]{405}$	-	-	Decrece y cóncava hacia abajo
$x=-\sqrt[4]{405}$		0	Punto de inflexión
$-\sqrt[4]{405}<x<-3$	-	+	Decrece y cóncava hacia arriba
$x=-3$	0	+	Punto crítico estacionario, Mínimo local
$-3<x<0$	+	+	Crece y cóncava hacia arriba
$x=0$		0	Punto de inflexión
$0<x<3$	+	-	Crece y cóncava hacia abajo
$x=3$	0	-	Punto crítico estacionario, Máximo local
$1<x<\sqrt[4]{405}$	-	-	Decrece y cóncava hacia abajo
$x=\sqrt[4]{405}$		0	Punto de inflexión
$x>\sqrt[4]{405}$	-	+	Decrece y cóncava hacia arriba



Ejemplo 2

Graficar $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

SOLUCIÓN:
Siguiendo los pasos indicados tenemos:

Paso 1. DOMINIO: $Dom\ f = R-\{-1,1\}$

Paso 2. SIMETRÍA: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=f(x)$ por tanto f es PAR.

Paso 3. ASÍNTOTAS:

VERTICALES: $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=1}$ (calcule los límites laterales)

HORIZONTALES: Calculamos límites al infinito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=1$$

Por tanto, $\boxed{y=1}$ es la asíntota horizontal tanto el infinito positivo como para el infinito negativo.

Paso 4. PUNTOS CRÍTICOS:

- P.C.F : no hay. ¿Por qué?
- P.C.E:

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Por lo tanto tenemos $\boxed{x_0=0}$

- P.C.S: no hay. ¿Por qué?

Paso 5. MONOTONÍA: Analizando el signo de la primera derivada, se concluye que:

		-1		0		1	
f'	$++++++$		$++++$		$----$		$------$
f	$crece$		$crece$		$decrece$		$decrece$

Paso 6: EXTREMOS: por el criterio de la primera derivada observamos que:
En $x_0=0$ la primera derivada cambia de signo, de positivo a negativo, por tanto aquí existe un Máximo local.

Paso 7: CONCAVIDAD: Debemos analizar la segunda derivada

$$f''(x)=D_x\left[\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}\right]=\frac{(-4)\left(\left(x^2-1\right)^2\right)-(-4x)(2)\left(x^2-1\right)2x}{\left[\left(x^2-1\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{-4x^2+4+16x^2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$f''=\frac{12x^2+4}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

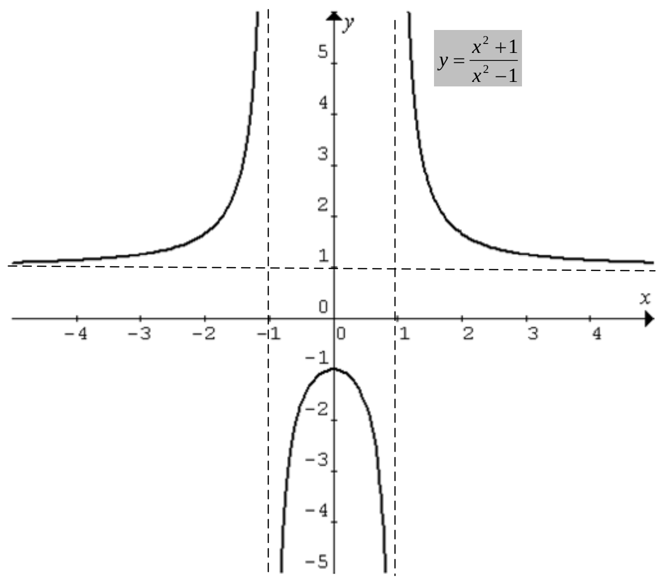
Entonces:

		-1		1	
f''	$++++++$		$-----------$		$++++++$
f					

Paso 8: PUNTOS DE INFLEXIÓN: No hay

En conclusión:

x	$f´(x)$	$f´´(x)$	f
$x<-1$	+	+	Crece y cóncava hacia arriba
$x=-1$			Asíntota vertical
$-1<x<0$	+	-	Crece y cóncava hacia abajo
$x=0$	0	-	Punto crítico estacionario, Máximo local
$0<x<1$	-	-	Decrece y cóncava hacia abajo
$x=1$			Asíntota vertical
$x>1$	-	+	Decrece y cóncava hacia arriba



Ejemplo 3

Graficar $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

SOLUCIÓN:
Siguiendo los pasos indicados tenemos:

Paso 1. DOMINIO: $Dom\ f=R-\{-1\}$

Paso 2. SIMETRÍA: $f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)+1}=\frac{x^2}{-x+1}$, por tanto f no es par ni impar.

Paso 3. ASÍNTOTAS:

VERTICALES: Por inspección de la regla de correspondencia, en $x=-1$ la función no se define (división entre cero) por tanto aquí hay una **asíntota vertical**. Además:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{x+1}=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{x+1}=+\infty$$

HORIZONTALES: Calculamos límites al infinito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}=\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Por tanto, no hay asíntota horizontal.

ASÍNTOTA OBLICUA:

En ciertas funciones se cumple que: $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\left(mx+b\right)\right]=0$

donde $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$

Si los límites existen, se dice que la gráfica de f tiene una asíntota oblicua

$$y=mx+b$$

Entonces, para esta función sería:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2-x}{x-2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x}{x-2}\right]=-1$$

Por tanto, hay una asíntota oblicua $\boxed{y=x-1}$

<u>Paso 4.</u> PUNTOS CRÍTICOS:

- P.C.F : no hay
- P.C.E:

$$f'(x)=D_x\left[\frac{x^2}{x+1}\right]=\frac{(2x)(x+1)-x^2(1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}}$$

por lo tanto, tenemos P.C.E: $x=0$ y $x=-2$

- P.C.S: no hay

<u>Paso 5.</u> MONOTONÍA: Analizando el signo de f'

		-2		0	
f'	$++++++$		$------$		$++++++$
f	*crece*		*decrece*		*crece*

<u>Paso 6</u>: EXTREMOS: por el criterio de la primera derivada observamos que:

1. En $\boxed{x=-2}$ la primera derivada cambia de signo, de positivo a negativo, por tanto aquí existe un Máximo local.
2. En $\boxed{x=0}$ la primera derivada cambia de signo, de negativo a positivo, por tanto aquí existe un Mínimo local.

<u>Paso 7.</u> CONCAVIDAD: Debemos analizar la segunda derivada

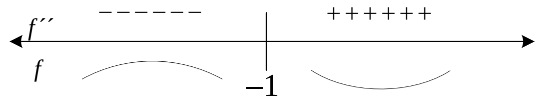
$$f''(x) = D_x\left[\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right] = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x)(2)(x+1)}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

$$= \frac{(x+1)\left[(2x+2)(x+1)-(x^2+2x)(2)\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2x^2+4x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}}$$

Entonces:

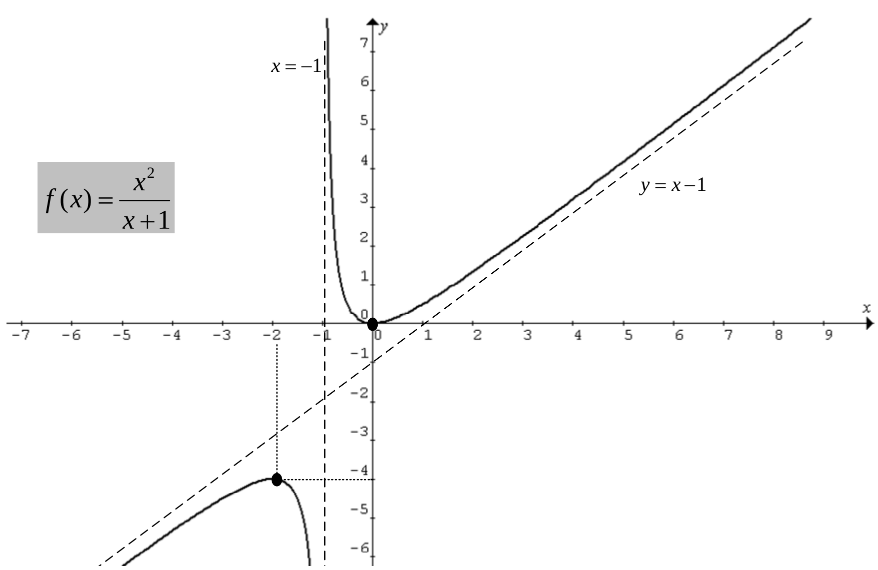


Paso 8. PUNTOS DE INFLEXIÓN

NO HAY. Aunque la segunda derivada tiene signo diferente en $x=-1$, pero como no es punto del dominio, tiene asíntota, entonces no es un punto de inflexión.

En conclusión:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	f
$x<-2$	+	-	Crece y cóncava hacia abajo
$x=-2$	0	-	Punto Crítico Estacionario, Máximo local
$-2<x<-1$	-	-	Decrece y cóncava hacia abajo
$-1<x<0$	-	+	Decrece y cóncava hacia arriba
$x=0$	0	+	Punto Crítico Estacionario, Mínimo local
$x>0$	+	+	Crece y cóncava hacia arriba



Cuando no se dispone de la regla de correspondencia, se deberá tener condiciones que nos permitan concluir sobre la gráfica de una función.

Ejemplo

Bosqueje una función f de variable real que cumpla las siguientes condiciones:

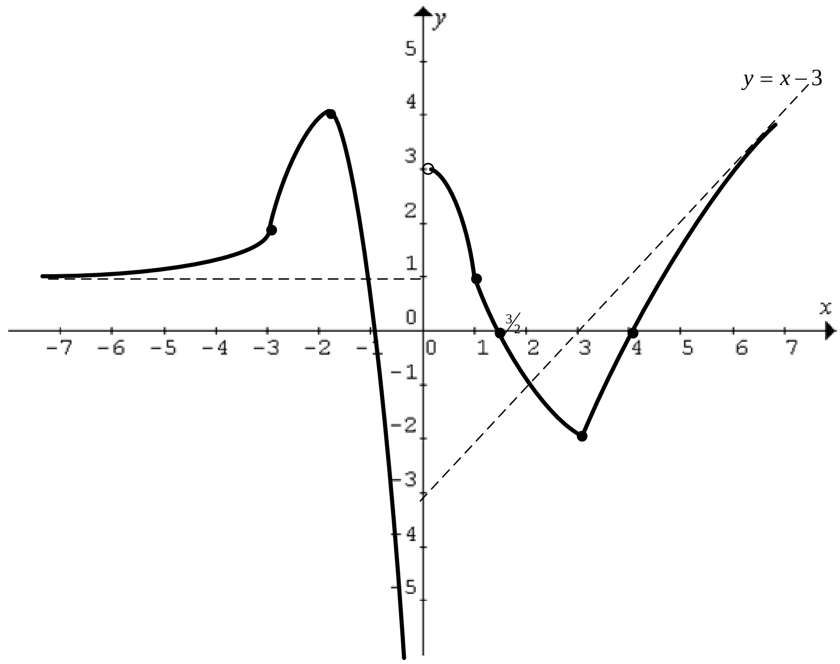
1. $Dom\ f = \mathbb{R}$
2. f continua en $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
3. $f(-1)=0$, $f(\frac{3}{2})=f(4)=0$, $f(-3)=f(0)=2$, $f(-2)=4$, $f(3)=-2$, $f(1)=1$
4. $\forall\varepsilon>0,\exists N>0;\forall x: x<-N \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$
5. $\forall\varepsilon>0,\exists\partial>0;\forall x: 0<x<\partial \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$
6. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$
8. $f'(-2)=0$,
9. $f'(x)>0$ para $x<-2 \quad\vee\quad x>3$,
10. $f'(x)<0$,para $-2<x<0 \quad\vee\quad 0<x<3$
11. $f''(1)=0$
12. $f''(x)>0$ para $x<-3 \quad\vee\quad 1<x<3$
13. $f''(x)<0$ para $-3<x<0 \quad\vee\quad 0<x<1 \quad\vee\quad x>3$

SOLUCIÓN:

Interpretemos las condiciones, tenemos:

1. Dominio de la función.
2. Intervalos de continuidad. Como es abierto tanto a la izquierda como a la derecha de cero, entonces se puede esperar que exista una asíntota vertical o un punto de no definición.
3. Puntos de la gráfica de la función. Hay que ubicarlos en el plano cartesiano.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. Asíntota horizontal $y=1$, para x negativos.
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$. La función se aproxima a 3, por la derecha de 0.
6. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$. Asíntota vertical, el eje y por la izquierda de 0
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]=x-3$ Asíntota oblicua $y=x-3$ para x posoitivos.
8. Punto crítico estacionario en $x=-2$
9. f crece en los intervalos $(-\infty,-2)$ o en $(3,\infty)$
10. f decrece en los intervalos $(-2,0)$ o en $(0,3)$
11. Punto de inflexión: $(1,1)$
12. f es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-3)$ o en $(1,3)$
13. f es cóncava hacia abajo en $(-3,0)$ o en $(0,1)$ o en $(3,\infty)$

Entonces la grafica sería:



P.I.

Ejercicios Propuestos 4.6

1. Graficar las siguientes funciones, mostrando: dominio, simetría, asíntotas, puntos críticos, monotonía, extremos, concavidad, puntos de inflexión:

1. $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$	9. $f(x) = \dfrac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{2}\left(5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}\right)$	10. $f(x) = \dfrac{2+x-x^2}{x-1}$
3. $f(x) = e^{-x^2}$	11. $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2}$	12. $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$	13. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$
6. $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$	14. $f(x) = xe^{1/x}$
7. $f(x) = e^{1/x}$	
8. $f(x) = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$	

2. Bosqueje una función f de variable real que cumpla las siguientes condiciones:

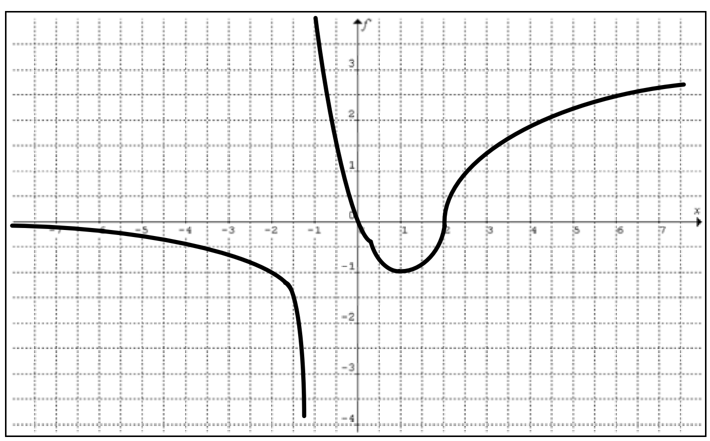
- $f(x) = f(-x)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$
- $f'(-3) = f'(0) = f'(3/2) = 0$
- $f(-3) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -1$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(0) = 0$
- $f'(x) > 0$ en $(0,1)$ y $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$
- $f''(2) = 0$

3. Bosqueje el gráfico de una función f tal que:

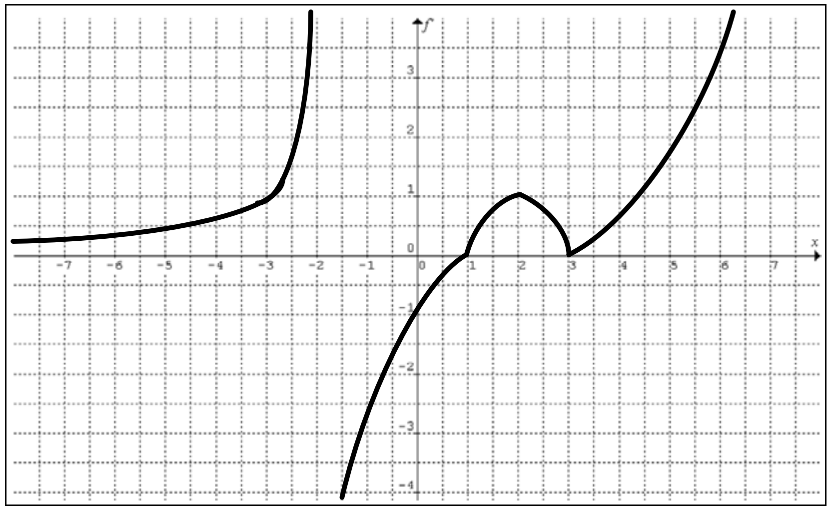
- Dominio f =IR
- Contínua en $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$
- f(-1)=4, f(0)=6, f(2)=-3, f(3)=0
- $\forall\varepsilon > 0, \exists\partial > 0; \forall x: 0 < x-2 < \partial \Rightarrow \left|f(x)+1\right| < \varepsilon$
- $\forall M > 0, \exists\partial > 0; \forall x: 0 < 2-x < \partial \Rightarrow f(x) < -M$
- $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0; \forall x: x < -N \Rightarrow \left|f(x)-2\right| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = 0$
- $f'(x) > 0,\ para\ x \in (-\infty,0)\cup(2,\infty);\ f'(x) < 0,\ para\ x \in (0,2)$
- $f''(x) > 0,\ para\ x \in (-\infty,-1);\ f''(x) < 0,\ para\ x \in (-1,2)\cup(2,\infty)$

4. Suponga que $f'(x) = (x-3)(x-1)^2(x+2)$ y $f(1) = 0$, $f(-2) = 5$, $f(3) = -5$, esboce una gráfica para f.

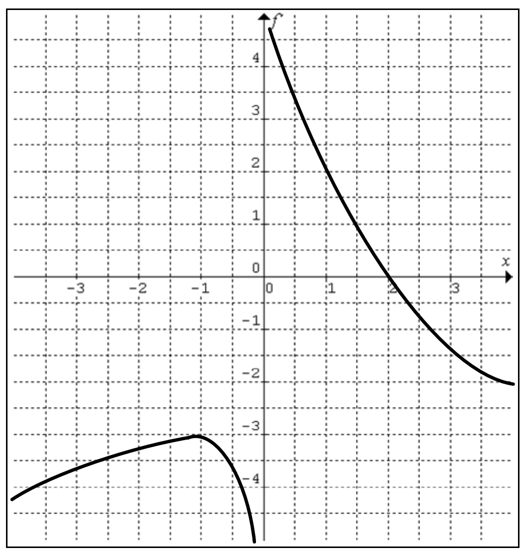
5. Bosqueje el gráfico de una función f continua en IR tal que $f(-4) = f(5) = 0$, $f(0) = 8$, $f(1) = 6$, $f(-1) = -7$, $f(2) = -3$ y además la gráfica de su derivada es:



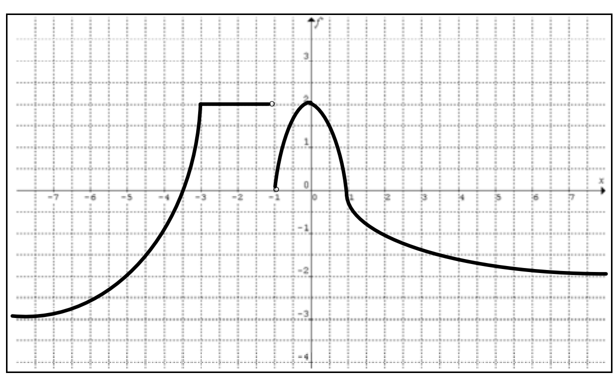
6. Bosqueje el gráfico de una función f continua en IR tal que $f(-2) = 4$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$ y además la gráfica de su derivada es:



7. Bosqueje el gráfico de una función f continua en IR tal que $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(2)=1$, $f(4)=0$ y además la gráfica de su derivada es:



8. Bosqueje el gráfico de una función f continua en IR tal que $f(-1)=1$, $f(0)=3$, $f(1)=5$, $f(2)=-1$, $f\left(-\frac{7}{2}\right)=-4$ y además la gráfica de su derivada es:

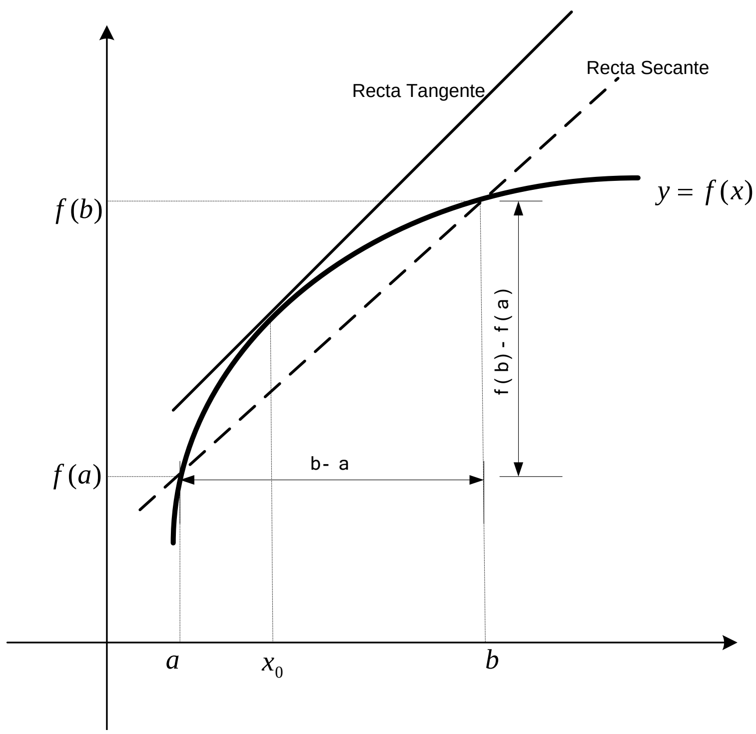


4.5 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS (TEOREMA DE LAGRANGE)

Si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces, existe al menos un número "x_0" en (a,b) tal que

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Lo que nos indica este teorema es que si la función es continua en un intervalo cerrado y suave en su interior entonces existirá un punto en ese intervalo para el cual la recta tangente y la recta secante en los extremos del intervalo tienen igual pendiente.



Demostración:

Sea $S(x)=f(x)-g(x)$ donde g es la recta entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$,

entonces podemos obtener su ecuación: $y-y_0=m(x-x_0)$

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$, es decir

$$y=g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Reemplazando, resulta: $S(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$

Obtengamos $S(a)=f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right]=0$ y

$S(b)=f(b)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right]=0$

Por tanto, $\exists x_0\in(a,b)$ tal que $S'(x_0)=0$

Para lo cual $S'(x)=f'(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$ y $S'(x_0)=f'(x_0)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=0$

Por lo último $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ L.Q.Q.D.

Ejemplo 1

Encuentre el número "x_0" garantizado por el teorema del valor medio para derivadas si $f(x)=x^2$ en $[-1,2]$.

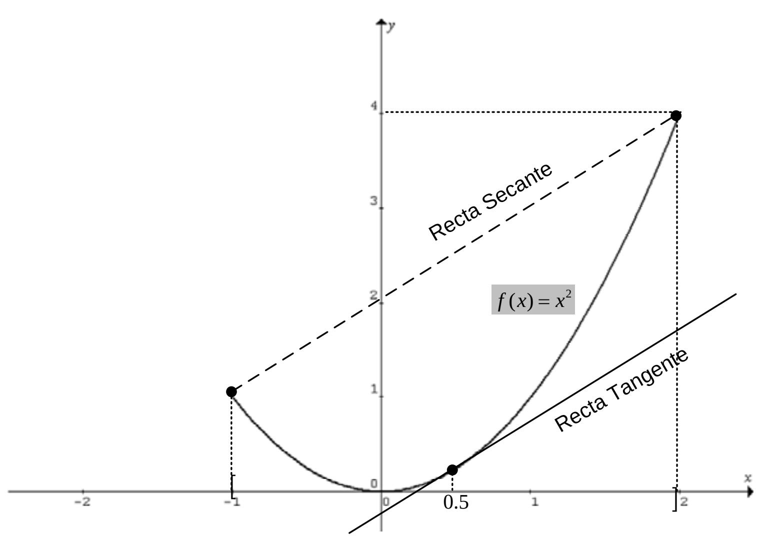
SOLUCIÓN:

Observe que f es continua en $[-1,2]$ y como $f'(x)=2x$ por tanto es diferenciable en $(-1,2)$ se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio, por tanto la existencia de x_0 en $(-1,2)$ tal que $f'(x_0)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$ está garantizada y lo podemos encontrar.

Para lo cual $f'(x_0)=2x_0$ y $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{4-1}{3}=\frac{3}{3}=1$

Igualando y despejando, resulta: $\boxed{\begin{array}{l}2x_0=1\\ x_0=\frac{1}{2}\end{array}}$.

Geométricamente.



Ejemplo 2

Use el teorema del valor medio para demostrar que: $|sen\, b - sen\, a| \leq |a-b|$

SOLUCIÓN:

Usemos $f(x) = senx$. Note que es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por tanto de acuerdo al teorema de Lagrange , existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Reemplazando y simplificando

$$\cos x_0 = \frac{senb - sena}{b-a}$$

Por otro lado

$$0 \leq |\cos x_0| \leq 1$$

Entonces $0 \leq \left|\frac{senb - sena}{b-a}\right| \leq 1$

Aplicando propiedades del valor absoluto y despejando.

$$\frac{|senb - sena|}{|b-a|} \leq 1$$

$$|senb - sena| \leq |b-a|$$

Que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 3

Dos carros de la policía de transito equipadas con radar están situadas a 7 kilómetros de distancia en una autopista, cuando un camión pasa junto al primero de ellos, se le mide una velocidad de 90 km por hora; 4 minutos después al pasar junto al otro coche, éste le mide 70 km por hora. Aunque el camión bajó la velocidad, pruebe que en algún momento en esos 4 minutos ha superado el límite de velocidad permitida que es de 100 km por hora.

SOLUCIÓN:

Sea $e = f(t)$, el espacio recorrido por el camión, una función del tiempo, continua y diferenciable en el cualquier intervalo de tiempo mientras dure el movimiento.

Primeramente calculemos la velocidad media del camión en esos 4 minutos:

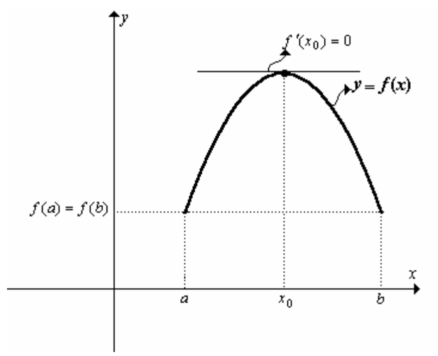
$$v_m = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{7\ km}{\frac{4}{60} horas} = 105 \, {}^{km}\!/\!{}_{h}$$

Sea t_1 el momento en que se le mide al camión una velocidad de $v_1 = 90\, {}^{km}\!/\!{}_{h}$ y sea t_2 el momento en que se mide una velocidad de $v_2 = 70\, {}^{km}\!/\!{}_{h}$. De acuerdo al teorema de Lagrange existe un $t_0 \in (t_1, t_2)$ en el cual $\frac{de}{dt} = f'(t_0)$, la velocidad instantánea del camión, fue igual a la velocidad media ($105\, {}^{km}\!/\!{}_{h}$), lo cual demuestra que ha superado el límite de velocidad ($100\, {}^{km}\!/\!{}_{h}$).

Como particularidad del teorema de Lagrange tenemos el teorema de Rolle.

4.6 TEOREMA DE ROLLE

> Si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y si $f(a)=f(b)$ entonces, existe al menos un número "x_0" en (a,b) tal que $f'(x_0)=0$



El teorema del valor medio para dos funciones sería:

Ejercicios Propuestos 4.7

1. La función $f(x)=\sqrt{x}$ satisface la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0,2]. Diga si esto es verdadero o falso, justificando apropiadamente su respuesta.
2. Sea $f(x)=x^4-2x^2$. Hallar todos los valores de "x_0" en el intervalo [-2,2] que satisfacen el teorema de Rolle.
3. La altura que alcanza una bola "t" segundos después de ser lanzada, está dada por la siguiente función: $f(t)=-16t^2+48t+32$.
   a) Comprobar que f (1) = f (2).
   b) Según el teorema de Rolle, ¿qué velocidad ha llevado en algún momento del intervalo [1,2]?
4. Sea $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\partial \quad ;\alpha,\beta,\delta\in IR.$ Encontrar el valor de "x_0" que satisfaga el teorema del valor medio para derivadas en [a,b].
5. Dos carros patrullas equipadas con radar están situadas a 5 millas de distancia en una autopista, cuando un camión pasa junto al primero de ellos, se le mide una velocidad de 55 millas por hora; 4 minutos después al pasar junto a otro coche, éste le mide 50 millas por hora. Probar que en algún momento en esos 4 minutos ha superado el límite de velocidad de 70 millas por hora.
6. Use el teorema del valor medio para demostrar que: $|\cos b-\cos a|\leq|b-a|$

7. Considere $f(x)=x^{4/5}$ en el intervalo $[-1,2]$. Demuestre que no se cumple la conclusión del Teorema de Lagrange. Justifique.

8. Considere $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en el intervalo $[-1,8]$. Verifique que no se cumple una de las hipótesis del Teorema de Lagrange, sin embargo la conclusión sí se cumple. Justifique.

4.7 TEOREMA DE CAUCHY

Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b) entonces, existe al menos un número "x_0" en (a,b) tal que $\dfrac{f´(x_0)}{g´(x_0)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

No olvide demostrarlo.

Con los resultados del teorema anterior, se pueden calcular indeterminaciones.

4.8 TEOREMA DE L'HOPITAL

Suponga que $\lim\limits_{x\to u} f(x)=\lim\limits_{x\to u} g(x)=0$ o también $\lim\limits_{x\to u}|f(x)|=\lim\limits_{x\to u}|g(x)|=\infty$. Si $\lim\limits_{x\to u}\dfrac{f´(x)}{g´(x)}$ existe en sentido finito o infinito; entonces: $\lim\limits_{x\to u}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to u}\dfrac{f´(x)}{g´(x)}$

Donde $u=a,a^+,a^-,+\infty,-\infty$

No olvide demostrarlo.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de L´hopital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

SOLUCIÓN:

Transformando la expresión primero, resulta:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

Aplicando el teorema de L´hopital al exponente, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^1 = e$

Ejemplo 3

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el teorema de L´hopital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

Como se mantiene la indeterminación, volvemos a aplicar la regla de L´Hopital, y así tantas veces como sea necesario: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{sen} x}{6x} = -\dfrac{1}{6}$

Ejemplo 4

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{4x^2+2x-3}$

SOLUCIÓN:

Note que aquí tenemos: $\dfrac{\infty}{\infty}$

Aplicando el teorema de L´hopital, tenemos: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-5}{8x+2}$

Volviendo a aplicar L´Hopital resulta: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

Ejemplo 5

Calcular $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$

SOLUCIÓN:

Observe que aquí tenemos 1^∞ . Entonces la regla de L´hopital no es aplicable directamente.

Transformando la expresión primero, resulta:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x} = \lim_{x\to 1} e^{\ln(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}} = \lim_{x\to 1} e^{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right)\left[\ln(2-x)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot g\frac{\pi}{2}x}}$$

Aplicando el teorema de L´hopital al exponente, tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot g\,\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{\left(-\csc^2\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}=e^{\frac{2}{\pi}}$

Ejemplo 6

Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right]$

SOLUCIÓN:
Observe que aquí tenemos $\infty-\infty$ ..
Transformando la expresión primero, resulta:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)}$$

Aplicando el teorema de L´hopital, tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x(1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+\ln x}$$

Volviendo a aplicar L´hopital: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$

Ejercicios Propuestos 4.8

Calcular:

1. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$	9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x}$	10. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x+\operatorname{tg}x}{e^x-e^{-x}}$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}c\operatorname{tg}x-\frac{1}{x}$	12. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\left(\frac{3}{4+\ln x}\right)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\,c\operatorname{tg}x$	13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{1-\cos x}$	14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$	15. $\lim\limits_{x\to 0}(c\operatorname{tg}x)^{\operatorname{sen}x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\operatorname{sen}x}$	

Misceláneos

1. Bosqueje el grafico de f analizando dominio, simetría , asíntotas, intervalos de monotonía y concavidad, extremos locales y puntos de inflexión

   a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

   b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$

   c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

   d) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

   e) $f(x)=\sqrt[3]{x}\,(8-x)$

   f) $f(x)=xe^{\frac{2}{3}x}+1$

   g) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

   h) $f(x)=x^3+x^2-5x-5$

   i) $f(x)=x^5-x^3$

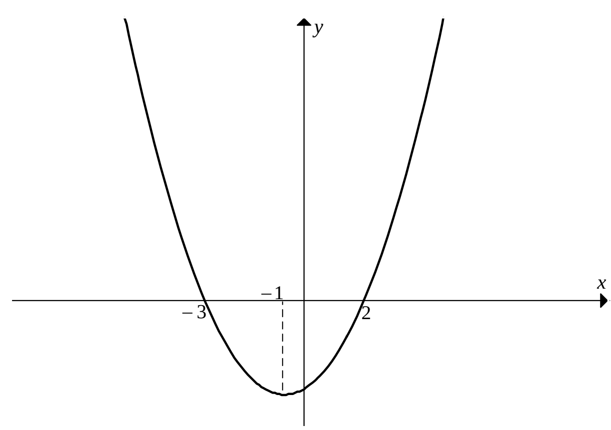
   j) $f(x)=x^{2/3}\left(x^2-8\right)$

   k) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

2. Bosqueje una gráfica posible de una función f que tenga todas las siguientes características:
   - f es continua en toda su extensión
   - $f(-4)=-3$, $f(0)=0$, $f(3)=2$
   - $f'(-4)=0$, $f'(3)=0$, $f'(x)>0$ para $x<-4$, $f'(x)>0$ para $-4<x<3$, $f'(x)<0$ para $x>3$.
   - $f''(-4)=0$, $f''(0)=0$, $f''(x)<0$ para $x<-4$
   - $f''(x)>0$ para $-4<x<0$, $f''(x)<0$ para $x>0$

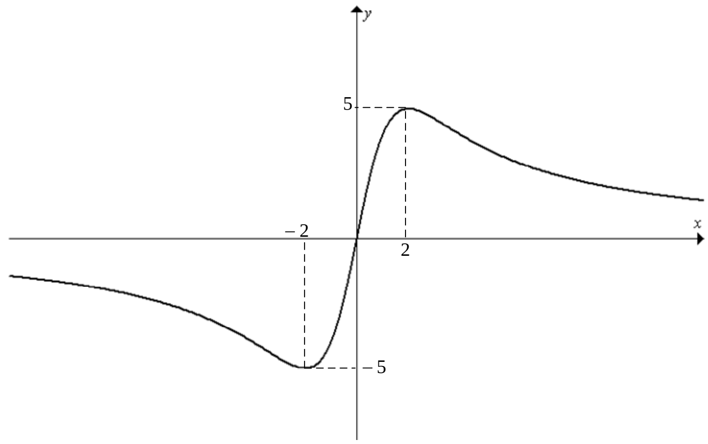
3. Bosqueje una gráfica posible de una función f que tenga todas las siguientes características:
   - $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ $a<b<0<d<e$
   - $f(c)=f(e)=0$, $f(b)=5$, $f(0)=3$, $f(a)=f(d)=1$
   - $f''(b)=0$, $f''(c)$ no existe, $f'(d)=0$, $f''(d)<0$,
   - $\forall x\in(-\infty,a)\cup(c,d)\left[f'(x)>0\right]$, $\forall x\in(a,c)\cup(d,+\infty)\left[f'(x)<0\right]$
   - $\forall x\in(-\infty,a)\cup(a,b)\left[f''(x)>0\right]$, $\forall x\in(b,c)\cup(c,+\infty)\left[f''(x)<0\right]$

4. Grafique f tal que la gráfica de su derivada f' es:



Suponga que $f(-1)=-1$

5. Grafique f tal que la gráfica de su derivada $f´$ es:



Suponga que $f(0)=0$

6. Calcular :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(senx)^{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sec^2 x-2tgx}{1+\cos 4x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{arc\ senx-x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2x\tan x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$