

Métodos de Scattering Inverso Electromagnético para pruebas y evaluaciones no destructivas

Julio Barzola¹, *Student Member, IEEE*, Pedro Vargas,¹ Matteo Pastorino,² *Senior Member, IEEE*

¹Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación (FIEC), Campus Gustavo Galindo, Km 30.5 via Perimetral, Apartado 09-01-5863. Guayaquil, Ecuador

²Universidad de Génova (UNIGE), Departamento de Ingeniería en Biofísica y Electrónica (DIBE), Via Opera Pia 1 1A Apartado 16145, Génova, Italia.

jbarzola@fiec.espol.edu.ec, pvargas@espol.edu.ec, pastorino@dibe.unige.it

Resumen

Cuando obtenemos valores los de parámetros de un modelo a través de la manipulación de datos observados, es llamado Problema Inverso. Los Problemas Inversos están presentes en geofísica, imágenes médicas (tal como la tomografía computarizada axial), tomografía acústica oceánica, evaluaciones no destructivas, y astronomía.

Este artículo trata con la reconstrucción de imágenes a partir de la medición del campo dispersado por objetos, usando dos algoritmos en el rango corto de microondas para la aplicación de imágenes. La primera propuesta involucra la aplicación del método Inexact-Newton con la Aproximación de Born de segundo orden. Por otra parte, la segunda propuesta involucra el método Inexact-Newton aplicado en forma directa para evaluar la ecuación integral bidimensional de Lippmann-Schwinger que describe el problema de dispersión inversa. Ambos algoritmos emplean el método de los momentos en el dominio espacial y el procedimiento multi-iluminación a multivista. La formulación matemática de ambas propuestas son descritas. Este artículo muestra comparaciones entre ambos métodos a través de reconstrucciones de débiles y fuertes dispersadores tales como la madera y el concreto de cemento Portland. Finalmente, resultados numéricos son reportados mostrando las reconstrucciones de cilindros con diferentes formas ya sea en ambientes con o sin ruido.

Palabras claves— *problemas inversos, mal puesto, imágenes a microondas, dispersión inversa electromagnética.*

Abstract

When we obtain the values of some model parameters through manipulation of observed data is called Inverse problem. Inverse problems are presents in geophysics, medical imaging (such as computed axial tomography), ocean acoustic tomography, nondestructive testing, and astronomy.

This paper deals with image reconstruction from measured scattered-field data for targets using two algorithms in short-range microwave imaging applications. The first approach concerns the application of an Inexact-Newton method within the second-order Born Approximation. On the other hand, the second approach the Inexact-Newton method applied in direct form to evaluate the two-dimensional Lippmann-Schwinger integral equation for the inverse-scattering problem. Both algorithms employed the moment method in the spatial domain and multi-illumination multiview processing. The mathematical formulation of both approach are described. This paper shows comparisons among both methods through reconstructions of weak and strong scatterers such as the wood and Portland cement concrete. Finally, numerical results are reported showing the reconstructions of cylinders with different shapes in noiseless and noisy environments.

Key words — *inverse problems, ill-posed, microwave imaging, electromagnetic scattering inverse.*

1. Introducción

Actualmente existe un creciente interés dirigido hacia las técnicas de la diagnóstica electromagnética no invasiva, con aplicaciones en lo industrial, ingeniería civil, y diagnóstica médica [3] [2] [10].

En lo industrial, la diagnóstica a microondas consiste en efectuar pruebas no destructivas para el control de productos y estructuras; en la ingeniería civil, ésta es utilizada para obtener información sobre la integridad de estructuras de cemento y madera no de otras maneras disponibles. En lo médico [5], instrumentos basados en inverse scattering a microondas nos brindan técnicas de diagnóstica no invasivas como una alternativa a aquellas de los rayos X, potencialmente dañinos en dosis elevadas para el paciente y para los operadores.

Los problemas inversos, aquellos que a partir de un ‘efecto’ se quiere llegar a la ‘causa’ que lo ha producido, presentan una característica intrínseca que se denomina mal puesto (ill-posed) que es independiente de los métodos de solución.

Para introducir el concepto de problema mal puesto, damos la siguiente definición [6].

Definición 1. Sea $A:U \subset X \rightarrow V \subset Y$ un operador del subconjunto U de un espacio normado X en un subconjunto V de un espacio normado Y . La ecuación

$$A\varphi = f$$

Con incógnita φ , se dice bien puesta si A es biyectivo y el operador inverso $A^{-1}:V \subset Y \rightarrow U \subset X$ es continuo; en caso contrario la ecuación se dice mal puesta.

Basándonos en esta definición, un problema puede ser mal puesto por tres diferentes motivos.

- A no es sobreyectivo: la solución entonces puede no existir, puesto que $\exists f \in V: \neg \exists \varphi: A\varphi = f$ (no existencia).
- A no es inyectivo: pueden existir más soluciones (no unicidad).
- A^{-1} no es continuo: la solución φ no depende en modo continuo de los datos f (inestabilidad).

En las aplicaciones reales es frecuente la última condición, la misma que crea grandes dificultades. Por el hecho de que el operador inverso A^{-1} sea no continuo, significa, que ‘pequeñas’ variaciones de los datos f pueden repercutir en ‘grandes’ variaciones de la solución φ . Por lo cual se están desarrollando *métodos de regularización* para construir aproximaciones bien puestas a partir de aquellas que son mal puestas.

Estos dos algoritmos utilizados tienen como objetivo principal hallar la solución de las ecuaciones integrales bidimensional de Lippmann-Schwinger que describen el problema de dispersión inversa de un objeto que ocupa una región Ω .

$$E^{(ext)}(\beta) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\beta) E^{(int)}(\beta) \cdot \mathbf{G}(\beta|\beta) d\beta + E^{(inc)}(\beta) \quad \beta \notin \Omega \quad (1.a)$$

$$E^{(int)}(\beta) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(\beta) E^{(int)}(\beta) \cdot \mathbf{G}(\beta|\beta) d\beta + E^{(inc)}(\beta) \quad \beta \in \Omega \quad (1.b)$$

Donde $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ es el número de ondas en el vacío, $E^{(inc)}(\beta)$ es el campo eléctrico incidente irradiado desde la fuente y $E^{(ext)}(\beta)$ y $E^{(int)}(\beta)$ denotan, respectivamente, el campo eléctrico externo e interno de la región Ω ; \mathbf{G} es el tensor de Green para el espacio libre.

Es importante observar que para resolver el problema es necesario determinar no solamente la función contraste $\chi(\beta) = (\tilde{\epsilon}(\beta)/\epsilon_0) - 1$, sino que también el campo eléctrico $E^{(int)}(\beta)$ interno a Ω . Para obviar este problema es posible adoptar la aproximación de Born [9], que expresa el campo eléctrico bajo el signo de la integral en términos de la función contraste y del campo eléctrico incidente.

Sin embargo, resolver el problema resulta después complicado porque es *no lineal*, pues aparece un producto de la única incógnita, y es mal puesto. Esta última característica nos impone la adopción de estrategias de regularización con el fin de obtener soluciones estables en presencia de datos con ruido. Para este fin utilizaremos el algoritmo determinístico formulado en el dominio espacial Inexact-Newton, el mismo será aplicado tanto en el método con aproximación de Born como en el método exacto o directo.

Ambos métodos han sido validados mediante la ejecución de numerosas simulaciones numéricas, cuyos resultados son mostrados en este trabajo. El mismo requiere también el uso de los códigos de cálculos referentes a la simulación del problema ‘directo’, que consiste en la generación de los datos sintéticos, siendo éstos usados como ‘entrada’ en los programas de cálculo utilizados para la solución del problema ‘inverso’ que, a su vez, a través de un procedimiento iterativo, reconstruye las características geométricas y dieléctricas del objeto incógnito.

Este trabajo fue desarrollado en el laboratorio de Electromagnetismo Aplicado del Departamento de Ingeniería en Biofísica y Electrónica (DIBE) de la Universidad de Génova, Italia.

2. El problema del Scattering Electromagnético Inverso

Consiste en determinar las características electromagnéticas de un obstáculo u objeto basándose en el conocimiento del campo electromagnético externo al mismo, que una fuente $J^{(inc)}(\beta)$ conocida produce al iluminar al obstáculo. Ver Figura 1.

Las (1) son las ecuaciones que describe este problema para objetos *no magnéticos*, la misma que fue deducida en [1]

Observamos entonces que son dos las incógnitas en ambas ecuaciones, el campo eléctrico al interior del objeto y la función contraste. Además, las mismas resultan ser *no lineales*, puesto que aparece el producto de las dos incógnitas. Aunque podría aparecer una *tercera* incógnita que es la región ocupada por el objeto que es el dominio de integración. Sin embargo, para nuestro caso asumiremos objetos cilíndricos de dimensiones conocidas.

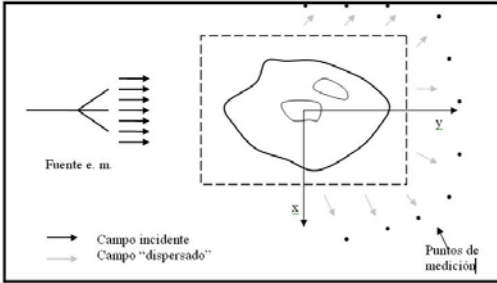


Figura 1: Esquema del problema de "scattering" electro magnético inverso

3. Aproximación de Born

La aproximación de Born permite expresar el campo eléctrico que aparece bajo el signo de la integral de las ecuaciones (1) en términos de la función contraste, o sea, en términos formales:

$$E^{(int)}(P) \approx B(\chi)(P) = E^{inc}(P) \quad (2)$$

Donde B es el operador que expresa la aproximación de Born. Entonces las ecuaciones (1) tendrían como única incógnita la función contraste. Ahora, podemos explicitar la forma del operador B . Existen aproximaciones de Born de diferentes órdenes; por este motivo se le pone al operador B un superíndice el cual especifica el orden.

La aproximación de Born de *primer orden* consiste en expresar el campo eléctrico interno que aparece bajo el signo integral en las (1) de la siguiente forma:

$$E^{(int)}(P) \approx B(\chi)(P) = E^{inc}(P) \quad (3)$$

Así que, las ecuaciones (1) se convierten

$$E^{(ext)}(P) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(P') E^{inc}(P') \cdot G(P|P') dP' + E^{inc}(P) \quad P \notin \Omega \quad (4.a)$$

$$E^{(int)}(P) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(P') E^{inc}(P') \cdot G(P|P') dP' + E^{inc}(P) \quad P \in \Omega \quad (4.b)$$

Desde el punto de vista físico, la aproximación de Born de primer orden permite hacer despreciable la 'dispersión múltiple' al interior del objeto. Es intuitivo observar que esta aproximación es válida sólo para débiles dispersadores los cuales su permitividad dieléctrica no se aleja mucho de aquella del vacío y sus

dimensiones no son grandes respecto a la longitud de onda del campo incidente.

Podemos introducir el operador

$$B^{(1)}(\chi) = -k_0^2 \int_{\Omega} \chi(P') E^{inc}(P') \cdot G(P|P') dP'$$

Reemplazando en las ecuaciones (4)

$$E^{(ext)}(P) = B^{(1)}(\chi) + E^{inc}(P) \quad P \notin \Omega \quad (5.a)$$

$$E^{(int)}(P) = B^{(1)}(\chi) + E^{inc}(P) \quad P \in \Omega \quad (5.b)$$

Realizando de manera análoga podemos obtener las ecuaciones para el segundo grado [1]

$$B^{(2)}(\chi) = B^{(1)}(\chi + B^{(1)}(\chi)) \quad (6)$$

$$E^{(ext)}(P) = B^{(2)}(\chi) + E^{inc}(P) \quad P \notin \Omega \quad (7.a)$$

$$E^{(int)}(P) = B^{(2)}(\chi) + E^{inc}(P) \quad P \in \Omega \quad (7.b)$$

Es importante notar que adoptando el segundo grado de la aproximación de Born, el problema todavía se vuelve *no lineal* por el producto de la única incógnita.

4. Método Inexact-Newton

4.1 Método Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un clásico algoritmo *iterativo* para la búsqueda de *ceros* en funciones. Dada una función $f(x)$, el objetivo del algoritmo es por lo tanto determinar x^* tal que

$$f(x^*) = 0 \quad (8)$$

En cada iteración se lineariza la función $f(x)$ mediante un desarrollo en serie de Taylor centrado en x_n el cual es truncado en su primer orden y se encuentra el cero de la ecuación linearizada

Bajo las hipótesis especificadas en el teorema en [11] la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge a la solución x^* .

Este método puede ser ampliado también a ecuaciones no lineales, es decir podemos resolver

$$A(\varphi) = 0 \quad (9)$$

donde $A: X \rightarrow Y$ es un operador (en general no lineal) entre los dos espacios normados X e Y , $\varphi \in X$ y 0 es el elemento nulo de Y .

Podemos linearizar el operador A a través del cálculo del operador que mejor aproxima al operador A , denominado derivada de Fréchet.

Definición. Dados los dos espacios vectoriales normados X y Y , se considera un abierto $D \subset X$. Un operador $A: X \rightarrow Y$ se denomina Fréchet - diferenciable en $\varphi \in D$ si existe un operador lineal y limitado

$$A'_{\varphi_0}: X \rightarrow Y$$

tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|A(\varphi+h) - A(\varphi) - A'_{\varphi_0}h\|}{\|h\|} = 0 \quad (10)$$

El operador A'_{φ_0} se denomina derivada de Fréchet de A en φ_0 .

Luego, para cada iteración se resuelve la ecuación lineal

$$A\varphi_n + A'_{\varphi_n}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = 0 \quad (11)$$

Determinando así $\varphi_{n+1} = \varphi_n - A'^{-1}_{\varphi_n} A\varphi_n$. Bajo oportunas condiciones, especificadas en el teorema Newton-Kantorovich, la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ converge a la solución exacta del problema (9).

Un resultado clásico sobre la convergencia del método de Newton se muestra en [7].

4.2 Método del tipo 'Inexact-Newton'

Como ya expuesto anteriormente, la linearización de una ecuación mal puesta es aún mal puesta. Por lo cual, no es posible resolver un problema mal puesto con el método de Newton el cual *no* es un método de regularización.

Sin embargo, podemos obviar este problema empleando un método denominado Inexact-Newton, el cual es en grado de encontrar soluciones *regularizadas*. El Inexact-Newton difiere del Newton expuesto anteriormente en que a cada iteración la ecuación linearizada *no* es resuelta de manera exacta, como lo sugiere el término 'Inexact', por lo cual es solo *aproximada*.

Para resolver la ecuación que ya ha sido linearizada en modo 'inexacto' es posible emplear diferentes *algoritmos de regularización*, entre los cuales los más conocidos son el Tikhonov y los métodos basados en la descomposición en valores singulares (SVD).

No obstante, en este artículo utilizaremos el método de *Landweber para operadores no lineales*, en el cual

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - A'^*_{\varphi_n} A\varphi_n \quad (12)$$

Para esta finalidad, se hará uso de una *generalización* del método de *Landweber* que permite resolver la ecuación linearizada $A\varphi_n + A'_{\varphi_n}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = 0$ utilizando *Landweber para operadores lineales* con un número *finito* de pasos.

Landweber es un método iterativo que converge, cuando el número de iteraciones tiende al infinito, a la solución exacta de una ecuación lineal. Si el número de iteración es *finito*, el método encuentra una solución aproximada y *regularizada* de la ecuación.

El método de Landweber es particularmente apropiado para sistemas lineales con un elevado número de ecuaciones y nos brinda también óptimos resultados en términos de filtraje del ruido.

El algoritmo de tipo Inexact-Newton para la solución de la ecuación no lineal (9) se puede resumir en la siguiente secuencia de pasos

1. $n \leftarrow 0$;
2. Se escoge un valor inicial φ_n ;

3. Se calcula la derivada de Fréchet A'_{φ_n} del operador A en φ_n ;

4. Se aproxima la solución de la ecuación lineal $A\varphi_n + A'_{\varphi_n}(h) = 0$, por medio de un número finito de pasos del método de Landweber en la incógnita h ;

5. $\varphi_{n+1} \leftarrow \varphi_n + h$;

6. $n \leftarrow n+1$;

7. Si la *condición de parada* es verdadera se termina el algoritmo, de otro modo se retorna al paso 3.

4.3 El método de Landweber

El método de Landweber fue introducido en 1951 [8] para resolver ecuaciones con integrales. El mismo resuelve *iterativamente* una ecuación lineal del tipo

$$Lx = y \quad (13)$$

donde $L : X \rightarrow Y$ es un operador lineal compacto entre dos espacios de Hilbert X y Y , individuándoles la *pseudo-solución* x^μ , que, como es conocido, si $y \in R(L) \oplus R(L)^\perp$, satisface la así llamada *forma normal* de la (12)

$$L^*Lx = L^*y \quad (14)$$

Al método de Landweber se le puede sacar provecho transformando la (14) en un problema de búsqueda de *punto fijo* de un oportuno operador. Es inmediato entonces reconocer que el problema

$$x = T(x) = x + \beta L^*(y - Lx) \quad (15)$$

con $\beta \in R$, es equivalente a lo expresado en (14).

Aplicando la clásica iteración para la búsqueda del punto fijo de la (15), escogiendo $x_0 \in X$ arbitrariamente, se construye la sucesión

$$x_{k+1} = T(x_k) = x_k + \beta L^*(y - Lx_k) \quad k \in N \quad (16)$$

Realizando las respectivas demostraciones con los sistemas singulares, combinaciones lineales de autovalores y truncamiento, que por razones de espacios no se incluyen en este trabajo, pero que se encuentran en [1], se puede interpretar el algoritmo de Landweber truncado (al igual que otros algoritmos de regulación) como un *filtro* en el espacio de los autovectores $\{\varphi_n\}$, que atenúa las componentes a lo largo de los autovectores correspondientes a valores singulares 'pequeños'.

Observando que la solución a la iteración $(k+1)$ del método se puede escribir como un polinomio en el modo siguiente

$$x_k = \beta \sum_{n=1}^{\infty} (I - \beta L^*L)^n L^*y + (I - \beta L^*L)^{k+1} x_0 \quad (17)$$

se deduce que el algoritmo de Landweber pertenece a la clase de los *métodos de Krylov*. En realidad, si escogemos por simplicidad $x_0 = 0$, x_k es expresable mediante un polinomio de grado k respecto a L^*L , o bien

$$x_k = L_k y \quad (18)$$

con $L_k = \beta \sum_{n=1}^{\infty} (I - \beta L^* L)^n L^*$. La (18) permite además de concluir que el método de Landweber es un *método lineal de regularización*.

Es interesante hacer notar que, en base a la (17), la sucesión que define al método Inexact-Newton con $(k+1)$ iteraciones internas, puede escribirse en la forma

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \beta \sum_{i=1}^k (I - \beta A_{\varphi_n}^* A_{\varphi_n}) A_{\varphi_n}^* A(\varphi_n) \quad (19)$$

Teniendo seleccionado el elemento nulo como primer término de la sucesión de Landweber.

La sucesión (19) define el método de Landweber generalizado que es estudiado en este trabajo. El mismo goza de algunas propiedades [4].

La ventaja de Landweber para operadores no lineales consiste en que converge más rápidamente. Esta propiedad es importante en la práctica, pues frecuentemente el cálculo de la derivada de Fréchet (iteración externa) de un operador es una operación tediosa, sin embargo método de Landweber (iteración interna) puede ser aplicado en modo eficiente.

El número de iteraciones internas depende del nivel del ruido y del grado de no linealidad del operador A .

Para utilizar el método de Landweber, se necesita conocer el máximo valor singular de L , que nos servirá para determinar el intervalo de valores del parámetro β el cual garantiza la convergencia. Por lo cual, utilizaremos el método de la potencias para el cálculo del autovalor máximo de una matriz.

5. Método Inexact-Newton con la aproximación de Born de segundo grado

Esta es la primera propuesta planteada para hallar la solución de las (1) y por ende realizar las diferentes reconstrucciones de objetos de forma cilíndrica por lo cual el dominio de integración ya no será Ω sino \mathcal{D} .

$$B^{(2)}(\chi, E_z^{inc})(F_i) = B^{(1)}(\chi, E_z^{inc})(F_i) - k_0^2 \int_{\mathcal{D}} \chi(F_i) B^{(1)}(\chi, E_z^{inc})(F_i) G(F_i | F_i) dF_i \quad (20)$$

Aplicando la aproximación de Born de segundo grado simplificamos el problema de tener dos incógnitas a solo una (función contraste). Sin embargo *no es lineal* por el producto de la misma.

Para volverlo lineal necesitamos aplicar el método Inexact-Newton que ya ha sido expuesto, por lo cual aplicaremos primeramente la derivada de Fréchet al operador $B^{(2)}$ respecto a la función χ

$$B^{(2)}(\chi+h, E_z^{inc})(F_i) = B^{(1)}(\chi+h, E_z^{inc})(F_i) - k_0^2 \int_{\mathcal{D}} (\chi+h)(F_i) B^{(1)}(\chi+h, E_z^{inc})(F_i) G(F_i | F_i) dF_i \quad (21)$$

Luego de realizar las respectivas deducciones [1], en la iteración j -ésima del método, se requiere por lo tanto

resolver la ecuación *mal puesta* mediante el método de Landweber, donde la incógnita es la función h .

$$B_{\chi_j}^{(2)}(h, E_z^{inc}) = E_z^{scatt} - B^{(2)}(\chi_j, E_z^{inc}) \quad (22)$$

E_z^{scatt} es el campo dispersado el cual es igual a la diferencia entre el campo total y el campo incidente.

En la práctica, con el fin de disponer de una mayor información, se ilumina al objeto con más fuentes y se calcula después la solución teniendo en cuenta todos los datos obtenidos contemporáneamente.

Suponga ahora de iluminar la región \mathcal{D} con S diferentes fuentes y sea $E_z^{(s)}$ el campo eléctrico al exterior del objeto producido por la fuente s -ésima. Denominado $E_z^{i,(s)}$ el campo eléctrico incidente debido a la fuente s -ésima, empleando una aproximación de Born de orden 2, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} B^{(2),1}(\chi) &= E_z^{(1)} - E_z^{i,1} \\ B^{(2),2}(\chi) &= E_z^{(2)} - E_z^{i,2} \\ &\dots \\ B^{(2),S}(\chi) &= E_z^{(S)} - E_z^{i,S} \end{aligned} \quad (23)$$

Entonces el método de Inexact-Newton es aplicado al sistema de ecuaciones (23), previamente aplicándole una discretización del método de los momentos [1].

6. Método Inexact-Newton forma directa

En esta sección presentaremos la segunda propuesta, la cual utiliza el método Inexact-Newton de manera directa a la ecuaciones (1), sin utilizar la aproximación de Born. Otra forma de representarlas sería:

$$\begin{aligned} E_z^{(ext)}(F_i) &= -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(F_i) H_0^{(2)}(k_0 \|F_i - F_i\|) E_z^{(int)}(F_i) dF_i + E_z^{inc}(F_i) \quad F_i \notin \mathcal{D} \\ E_z^{(int)}(F_i) &= -\frac{jk_0^2}{4} \int_{\mathcal{D}} \chi(F_i) H_0^{(2)}(k_0 \|F_i - F_i\|) E_z^{(int)}(F_i) dF_i + E_z^{inc}(F_i) \quad F_i \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Donde $H_0^{(2)}$ la función de Hankel de segunda especie de orden cero y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana.

No adoptando la aproximación de Born, el campo eléctrico total en el interior de \mathcal{D} es una *incógnita* del problema. Teniendo presente esta observación, el sistema de ecuaciones anterior puede ser puesto en forma compacta en el siguiente modo

$$\begin{pmatrix} E_z^{(ext)} - E_z^{inc} \\ E_z^{inc} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} \quad (24)$$

o bien, con las ‘componentes’ del operador $\mathbf{L} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$,

$$E_z^{(ext)} - E_z^{inc} = L_1 \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} \quad (25.a)$$

$$E_z^{inc} = L_2 \begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix} \quad (25.b)$$

Esta observación simplifica el cálculo de la derivada de Fréchet del operador \mathbf{L} . Indicados en realidad con \mathbf{L}_{inc}^{χ} , $\mathbf{L}_{inc}^{E_z^{(int)}}$ las derivadas de Fréchet respecto a χ y $E_z^{(int)}$ con \mathbf{L}_i , $i=1,2$, la derivada de Fréchet \mathbf{L}' del operador \mathbf{L} se puede escribir

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^{\chi} & \mathbf{L}_1^{E_z^{(int)}} \\ \mathbf{L}_2^{\chi} & \mathbf{L}_2^{E_z^{(int)}} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Luego de realizar las respectivas deducciones e inducciones [1], la derivada de Fréchet del operador

\mathbf{L} en el punto $\begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{(int)} \end{pmatrix}$, aplicada al elemento $\begin{pmatrix} h_x \\ h_E \end{pmatrix}$, puesto

que $\rho_i = k_0 \|\beta_i - \beta_i^0\|$ y $(\rho) = -\frac{jk_0^2}{4} H_0^{(2)}(\rho_i)$, se tiene que:

$$\mathbf{L}' \begin{pmatrix} h_x \\ h_E \end{pmatrix} (\beta_i) = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{D}} h_x(\beta_i) E_z^{(int)}(\beta_i) (\rho) d\beta_i & \int_{\mathcal{D}} \chi(\beta_i) h_x(\beta_i) (\rho) d\beta_i \\ -\int_{\mathcal{D}} h_x(\beta_i) E_z^{(int)}(\beta_i) (\rho) d\beta_i & h_x(\beta_i) - \int_{\mathcal{D}} \chi(\beta_i) h_x(\beta_i) (\rho) d\beta_i \end{pmatrix}$$

En el caso del acercamiento multivista, la derivada de Fréchet de \mathbf{L} dependerá también de la particular fuente.

Para la vista s -ésima, la derivada en el punto $\begin{pmatrix} \chi \\ E_z^{s(int)} \end{pmatrix}$,

aplicada al elemento $\begin{pmatrix} h_x \\ h_E \end{pmatrix}$, vale

$$\mathbf{L}'^s \begin{pmatrix} h_x \\ h_E \end{pmatrix} (\beta_i) = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{D}} h_x(\beta_i) E_z^{s(int)}(\beta_i) (\rho) d\beta_i & \int_{\mathcal{D}} \chi(\beta_i) h_x(\beta_i) (\rho) d\beta_i \\ -\int_{\mathcal{D}} h_x(\beta_i) E_z^{s(int)}(\beta_i) (\rho) d\beta_i & h_x(\beta_i) - \int_{\mathcal{D}} \chi(\beta_i) h_x(\beta_i) (\rho) d\beta_i \end{pmatrix} \mathbf{D}$$

e igual forma se hace la discretización como en la primera propuesta.

7. Resultados Numéricos

Para obtener los resultados presentados en este apartado, las fuentes serán *idénticas* entre ellas. Las antenas transmisoras son uniformemente sobre una circunferencia de radio R_s a una distancia angular de θ_s la una de la otra; se seleccionará un sistema referencial *polar* con origen en el centro de la circunferencia, las coordenadas polares (ρ_k, θ_k) de la k -ésima fuente son, como mostrado en la figura 2,

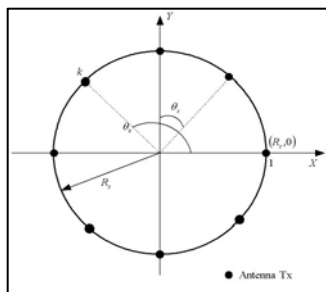


Figura 2: Disposición de las fuentes para $S=8$

Además los M puntos de medición que se distribuirán de manera simétrica alrededor del obstáculo u objeto.

Escogeremos como dominio de integración no la región ocupada por el objeto, que es *incógnita*, sino una región de forma *conocida* que contenga al objeto.

En todas las simulaciones efectuadas se ha empleado un *dominio de indagación* de forma *rectangular*, con baricentro en el origen del sistema de referencia y con los lados, de longitud L y H , ilustrado en la figura 4.

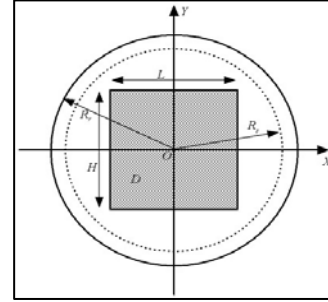


Figura 3: Dominio de indagación

El dominio ha sido particionado en $N=N_L N_H$ subdominios rectangulares, siendo N_L y N_H , respectivamente, el número de subdivisiones a lo largo de los lados paralelos al eje x y al eje y .

También vamos a considerar:

$$e_2 = \frac{\sum_{i=1}^N [\varepsilon_{re}(r_i) - \varepsilon(r_i)]^2}{\sum_{i=1}^N \varepsilon^2(r_i)} \quad (27)$$

El cual representa el *error normalizado de reconstrucción*, que será usado en las reconstrucciones.

Cabe resaltar que en todos los casos, la reconstrucción viene hecha escogiendo como solución inicial el *vacío*; en otras palabras se ha puesto $\chi_0 = 0$.

Una ventaja consiste en la capacidad de determinar una buena solución aún si χ_0 está 'lejos' de la solución exacta. Otros métodos de inversión necesitan de un punto de partida 'cercano' a tal solución.

7.1 Reconstrucciones aplicando el método Inexact-Newton con la aproximación de Born de segundo grado.

Se han efectuado 20 iteraciones externas y 5 iteraciones internas tanto para datos con ruido y sin ruido.

7.1.1 Ausencia de Ruido

Se ha reconstruido un cilindro de madera con las coordenadas $(-0.25 \text{ m}, 3.0 \text{ m})$, de radio 0.1 m , y con una permitividad dieléctrica relativa de 2.2

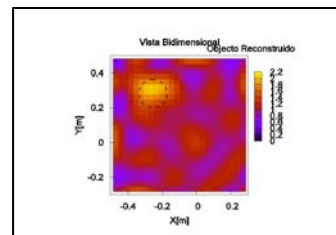


Figura 4: Simulación bidimensional del objeto reconstruido

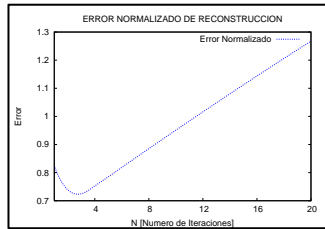


Figura 5: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

7.1.2 Presencia de Ruido

Se ha reconstruido un cilindro de madera con centro en el punto de coordenadas (0 m, 0 m), de radio 0.06 m, y con una permitividad dieléctrica relativa de 2.48 y una relación señal-ruido (SNR) de 25 dB.

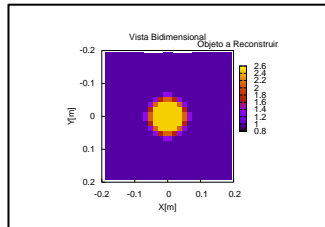


Figura 6: Simulación bidimensional del objeto a reconstruir

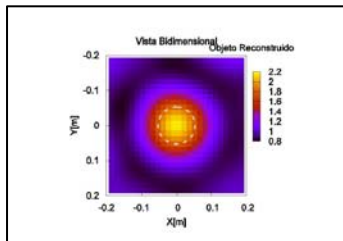


Figura 7: Simulación bidimensional del objeto reconstruido

Podemos notar que se tiene una buena reconstrucción con este método en ausencia de ruido y con ruido, el error disminuye hasta una cierta iteración y después comienza a crecer en ausencia de ruido, no así en presencia de ruido el cual comienza a decrecer hasta una cierta iteración luego a crecer hasta llegar un nivel donde nuevamente decrece, después se mantiene con un ligero

crecimiento a lo largo de las iteraciones restantes. Aquí se verifica la propiedad de semiconvergencia del algoritmo.

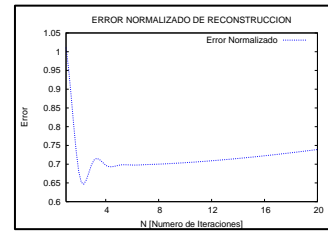


Figura 8: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones

7.2 Reconstrucciones aplicando el método Inexact-Newton en forma directa.

Se presentaran la reconstrucción de un cilindro de cemento con un defectos interno con vistas de trazados bidimensionales, del campo eléctrico total original y reconstruido, además del error normalizado de reconstrucción generados por la técnica *frequency hopping*, utilizando las frecuencias comprendidas entre 0.9GHz y 1.5 GHz con intervalos de 100 MHz. La relación Señal-Ruido es de 20 dB y permitividad eléctrica igual a 2.6 para el prisma rectangular y 1.0 para la circunferencia interior (forma del defecto).

7.2.1 Presencia de Ruido

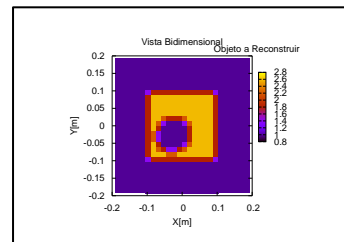


Figura 9: Simulación bidimensional del objeto con defecto a reconstruir

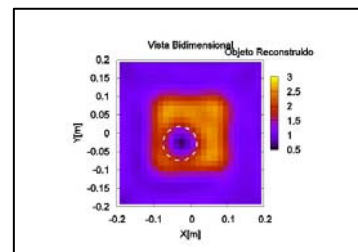


Figura 10: Simulación bidimensional del objeto con defecto reconstruido con SNR = 20dB

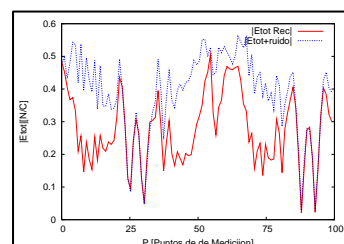


Figura 11: Reconstrucción del modulo del campo eléctrico total

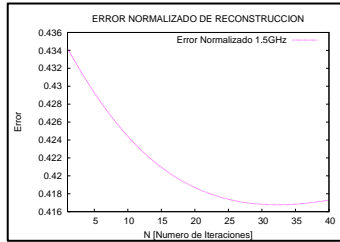


Figura 12: Error normalizado de reconstrucción al variar el número de iteraciones con $f_H = 1.5GHz$

Podemos notar que en presencia de ruido la reconstrucción es muy buena y aparece la ventaja de este algoritmo en su formulación *exacta* hace posible reconstruir con precisión también detalles de pequeñas dimensiones (el radio del cilindro utilizado como defecto es menor a $\lambda/2$). Siendo ésta una limitante en otras técnicas que trabajan en el dominio de la frecuencia. Podemos notar la eficiencia de la técnica *frequency hopping* al ver que el error progresivamente va disminuyendo en cada intervalo de frecuencia determinado, hasta llegar a 1.5 GHz.

8. Conclusiones

Se han aplicado dos algoritmos para solucionar el problema del *inverse scattering*, ambos utilizan un algoritmo de tipo Inexact-Newton.

Se ha logrado una mayor velocidad de convergencia, aplicando un enfoque multivista en ambos casos. Para el algoritmo de formulación exacta se ha aplicado la técnica *frequency hopping*.

Se han efectuado reconstrucciones a partir de datos sintéticos para validar ambos métodos y para medir las prestaciones de los mismos.

Este trabajo, sin embargo, tiene puntos que actualmente la comunidad científica está profundizando y desarrollando: como lo es determinar una *stopping rule* eficaz, para convertir más veloz al algoritmo de solución del modelo basado en la aproximación de Born en el cual, la derivada de Fréchet no sea recalculada en cada iteración. También se están desarrollando técnicas para la reconstrucción de forma tridimensional.

9. Referencias

- [1] J. Barzola, Tesis de grado: Métodos de Scattering Inverso Electromagnético para pruebas y evaluaciones no destructivas. FIEC-ESPOL, 2007
- [2] J. C. Bolomey, "Recent European Development in Active Microwave Imaging for Industrial, Scientific and Medical Application," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-37, p. 2109, 1989.
- [3] S. Caorsi, A. Massa, M. Pastorino, "A Computational Technique Based on a Real-coded Genetic Algorithm for Microwave Imaging Purposes," *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 38, N. 4, pp. 1697-1708, July 2000.
- [4] C. Estatico, Generalized Landweber Methods for Nonlinear Inverse Problems, Applied Computational Inverse Problems, Firenze, 22-25 Mar. 2004.
- [5] G. C. Giakos, M. Pastorino, F. Russo, S. Chowdhury, N. Shah, W. Davros, Noninvasive imaging for the new century, *IEEE Instrum. Meas. Mag.*, vol. 2, pp. 32-35, June 1999.
- [6] J. Hadamard, Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press, New York, 1923.
- [7] R. H. W. Hoppe, Numerical Methods for Large-Scale Nonlinear Systems, disponibili all'indirizzo http://www.math.uh.edu/~rohop/fall_04/downloads/scrip.pdf.
- [8] L. Landweber, An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind, *American Journal of Mathematics*, vol. 73, 1951.
- [9] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [10] M. Pastorino, Short-range microwave inverse scattering techniques for image reconstruction and applications, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 47, n. 6, pp. 1419-1427, Dec. 1998.
- [11] M. Romeo, Dispense di Matematica per l'Ingegneria 1, disponibili all'indirizzo <http://www.elettronica.ingegneria.unige.it/CdS/Home/Corsi/24011/Dispense/Dispense>