

# Escuela Superior Politécnica del Litoral

## Examen del Segundo Parcial de Procesos Estocásticos

1 de septiembre de 2010

**Profesor:** Xavier Cabezas

**Nombre:** \_\_\_\_\_

1. (Sobre el problema del examen del primer parcial) Para efectos de una investigación, en un determinado país, una familia puede clasificarse como habitante de zona urbana, rural o suburbana. Se ha estimado que durante un año cualquiera, el 15 % de todas las familias urbanas se cambian a zona suburbana y el 5 % a zona rural. El 6 % de las familias suburbanas pasan a zona urbana y el 4 % a zona rural. El 4 % de las familias rurales pasan a zona urbana y el 6 % a zona suburbana.
  - a) Escriba la matriz de transición (Esta matriz es ergódica).
  - b) Cuál es la probabilidad límite de que el sistema se encuentre en el estado  $j$ , después de muchas transiciones, y que esta probabilidad sea independiente del estado inicial?
  - c) Con la ayuda del literal anterior, qué porcentaje de la población ocupará zonas suburbanas después de muchos años?
  - d) Cuál es el número promedio de años para que, partiendo de vivir en zona urbana, una familia llegue a vivir en zona suburbana, por primera vez?

2. Con una “Ballena Franca”<sup>1</sup> hembra se puede tener 0, 1 o 2 ballenas hembras el siguiente año. Se supone que la muerte de una ballena madre dá como resultado la muerte de su cría en el primer año. Entonces, una hembra al tiempo  $n$  no produce descendencia si ella muere antes del tiempo  $n + 1$ , 1 descendiente (ella misma) si ella sobrevive sin reproducir hembras y 2 descendientes (ella y su cría) si ella sobrevive y pare una cría hembra. El largo de la generación es entonces un año. Sea  $p$  la probabilidad de supervivencia y  $u$  la probabilidad de engendrar una cría hembra, encuentre:
- a) Encuentre la función generadora de *reproducción* para el proceso estocástico.
  - b) Cuál es la probabilidad que una ballena franca tenga 2 descendientes (ella misma y su cría)?
  - c) Demuestre que el número de ballenas francas hembras que producirá en promedio una ballena cualquiera en un año es  $p(1 + u)$ .
  - d) En promedio, cuántas ballenas hembras habrán en la 5 generación, si  $p = 0,94$  y  $u = 0,051$ ?
  - e) Cuál es la probabilidad de extinción de las ballenas francas hembras cuando  $p = 0,94$  y  $u = 0,051$ ?
  - f) Cuál es la probabilidad de extinción de las ballenas francas hembras cuando  $p = 0,94$  y  $u = 0,7$ ?

---

<sup>1</sup>La ballena franca glacial (*Eubalaena glacialis*) es una especie de cetáceo que toma su nombre por su tranquilo carácter y su mansedumbre.

3. Una firma de asesoría emplea tres tipos de consultores: junior, senior y socios. Durante un año dado, hay una probabilidad 0,15 que un consultor junior sea promovido a senior y una probabilidad 0,05 de que él o ella dejará la empresa. Además, hay una probabilidad 0,20 que un consultor senior sea promovido a socio y una probabilidad de 0,10 de que él o ella dejará la empresa. Hay una probabilidad de 0,05 que un socio dejará la empresa. La firma nunca degrada a un consultor.
- a) Escriba la matriz de transición.
  - b)Cuál es la probabilidad de que un consultor junior recién contratado deje la firma al finalizar su primer año?
  - c)Cuál es la probabilidad de que un consultor junior recién contratado deje la firma antes de convertirse en socio?
  - d) Cuánto tiempo en promedio permanece un consultor junior en la firma?

4. Suponga que los propietarios de vehículos llenan sus tanques de gasolina cuanto este se encuentra medio lleno (o medio vacío), a la fecha, un promedio de 7,5 clientes/hora llegan a una estación de gasolina con un solo servidor. A la bomba de gasolina le toma atender un carro 4 minutos en promedio. Suponga que los tiempos entre llegadas y arribo son exponenciales y que para efectos prácticos se considera una capacidad infinita de la estación de servicio (porque los autos suelen esperar incluso fuera de la estación).
- a) Cuántos autos en promedio se encontrará en todo el sistema en cualquier momento?
  - b) Cuánto tiempo en promedio pasa un auto desde que llega a la estación de servicio hasta que sale luego de ser atendido?
  - c) Suponga que ocurre una escasez de gasolina, y por esta razón los dueños de los autos caen en pánico y ahora quieren ir a la estación de gasolina cuando su tanque está  $3/4$  lleno (o  $1/4$  vacío). Como cada propietario ahora pone menos gasolina, el tiempo de atención se ha reducido a  $3\frac{1}{3}$  minutos. Cómo el pánico afecta al número promedio de clientes en el sistema y al tiempo promedio de permanencia de un auto desde que llega hasta que sale atendido?