CAPÍTULO III

3. TÉCNICAS DE IMPUTACIÓN APLICABLES

3.1 Introducción

El propósito del presente capítulo es el de ilustrar las técnicas de imputación para el manejo de datos incompletos en una matriz de datos, para lo cual, en la sección 3.2 se define lo que es “Imputación de datos”, la siguiente sección muestra los métodos de “imputación”, entre los cuales están, imputación por la media muestral e imputación por regresión.

3.2 Imputación de Datos

Se entiende por “imputación de datos” a la acción de reemplazar, con algún criterio, los datos faltantes esto es, aquellos que por una u otra razón no se encuentren presentes en una matriz de datos; para de esta forma obtener un conjunto de “datos completos” con los que se pretende mantener, en lo posible, las características de la población objetivo investigada.

En las últimas décadas, se han desarrollado gran variedad de métodos de imputación para enfrentar el problema de datos faltantes y obtener una “matriz de datos completa”.

3.3 Métodos de Imputación

Entre los métodos de imputación más difundidos y que son los que formarán parte de esta investigación están: asignar la *media aritmética* de los datos incompletos al o los valores faltantes y predecir el valor ausente mediante un *modelo de regresión*.

3.3.1 Imputación por la media muestral

El método de imputación por la media muestral, denominado también método de Wilks (1932), es muy sencillo de aplicar y útil para variables

continuas aún cuando presentan inconvenientes estadísticos; consiste en la asignación en la matriz de datos del valor promedio de los datos existentes en la correspondiente columna, a todos los valores que “le faltan” a la matriz de datos $\mathbf{X} = (X_{ij})$, variable por variable. Supongamos que para una variable X_j tenemos registrados r de los n valores investigados y ($n - r$) “datos faltantes”, por lo que para los ($n - r$) datos, los valores a ser imputados en la variable X_j se determinan así:

$$X_{(imp)j} = \frac{\sum_{i=1}^{r} X_{i,(obs)j}}{r} \qquad (3.1)$$

Siendo $X_{(imp)j}$ el valor que se coloca, “o imputa”, en la variable con datos faltantes.

Sin embargo, este método tiene como desventaja que modifica la distribución de la variable, disminuyendo la variabilidad de los datos; de igual manera en el caso de realizar análisis multivariados se distorsiona la matriz de varianzas y covarianzas entre las variables observadas. Es decir, este método no conserva la relación entre las variables ni la distribución de frecuencias original. [6]

A continuación se ilustra este método:

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de cuatro poblaciones todas ellas Poisson, y que son estocàsticamente independientes entre sí, la primera variable tiene parámetro $\lambda = 2$, la segunda variable $\lambda = 4$, la tercera variable $\lambda = 5$ y la cuarta variable $\lambda = 7$, esto es:

$$f(X_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{2^{x_1} e^{-2}}{x_1!}, \quad x_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$f(X_2) = P(X_2 = x_2) = \frac{4^{x_2} e^{-4}}{x_2!}, \quad x_2 = 0,1,2,..$$

$$f(X_3) = P(X_3 = x_3) = \frac{5^{x_3} e^{-5}}{x_3!}, \quad x_3 = 0,1,2,..$$

$$f(X_4) = P(X_4 = x_4) = \frac{7^{x_4} e^{-7}}{x_4!}, \quad x_4 = 0,1,2,..$$

,

Primer Caso: Falta *un dato* en solo una variable

Se supone que la variable aleatoria X_4 que proviene de una distribución Poisson con $\lambda = 7$, tiene un valor faltante, el X_{74}, que realmente es igual a 14 (Ver Tabla 3.1). Nótese que, un dato faltante representa, en este caso, el 3% de datos faltantes en la matriz de datos.

Tabla 3.1

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Tamaño de muestra n=10, 3% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4
5	4	3	6
1	7	1	6
2	6	8	10
2	5	3	2
4	6	4	9
3	5	6	12
2	3	4	**14**
0	3	5	9
3	3	2	6
2	4	11	7

Elaborado por: G. Cuenca

El valor de la media aritmética de X_4, con el dato faltante es $\overline{X}_4 = \frac{6+6+10+2+9+12+9+6+7}{9} = 7.444$, entonces reemplazamos en $X_{74} = 7.444$, así calculamos nuevamente la media aritmética y la varianza con el dato imputado (Ver Cuadro 3.1). El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.400 \\ 4.600 \\ 4.700 \\ 8.100 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector de medias con un dato completado es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.400 \\ 4.600 \\ 4.700 \\ 7.444 \end{pmatrix}$$

Podemos apreciar en el Cuadro 3.1 que la mediana de los datos imputados para X_4 difiere de la mediana de los datos originales o reales, así como de los incompletos, debido a que al incluir la media en los datos incompletos para realizar la estimación, ésta se ubicó en el centro de los datos al ordenarlos junto con el valor de la mediana de los datos incompletos, y como la cantidad de datos es par se procedió a calcular el promedio de los valores antes mencionados donde se obtuvo que el valor de la mediana de X_4 es 7.222.

CUADRO 3.1

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson

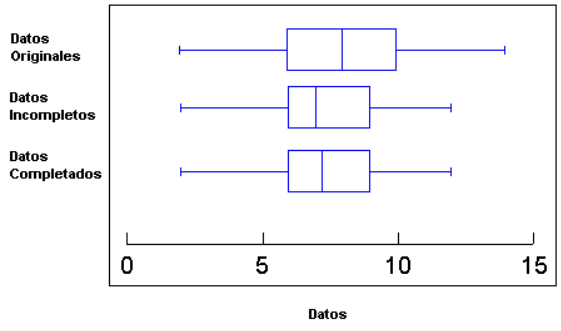
Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=10 y 3% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_4"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media
n		10	9	10
Media		8,100	7,444	7,444
Mediana		8,000	7,000	7,222
Moda		6.000	6,000	6,000
Varianza		11,878	8,528	7,580
Desviación Estándar		3,446	2,920	2,753
Error Estándar		1,090	0,973	0,871
Coeficiente de Asimetría		0,057	-0,334	-0,344
Curtosis		0,150	0,500	0,890
Rango		12,000	10,000	10,000
Mínimo		2,000	2,000	2,000
Máximo		14,000	12,000	12,000
Percentiles	25	6,000	6,000	6,000
	50	8,000	7,000	7,222
	75	10,500	9,500	9,250



Elaborado por: G. Cuenca

En el Diagrama de cajas se observa que la distribución de los “datos incompletos”, así como de los “datos completados” están sesgadas a la derecha. Para los “datos originales”, “incompletos” y “completados”, el coeficiente de curtosis es menor a tres, entonces los datos tienen una distribución platicùrtica.

Se puede apreciar también que el valor de la media aritmética de la variable $X_{4,}$ ($\overline{X}_4 = 7.444$) de los “datos incompletos” y “completados” es igual debido a que si obtenemos el promedio del grupo de datos incompletos y lo agregamos en ese grupo se va obtener el mismo valor del promedio anterior al momento de calcularlo nuevamente. Solo que antes se tenía (n-1) datos y luego n. Pasamos a demostrar esta afirmación:

La media de X_4 con un valor completado es igual a:

$$\overline{X}_{imp} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}}{n-1}}{n}$$

$$= \frac{\dfrac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} X_i + \sum_{i=1}^{n-1} X_i}{(n-1)}}{n} = \frac{\dfrac{(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} X_i + 1\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{(n-1)}}{n}$$

$$= \frac{\dfrac{(n-1)+1\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{(n-1)}}{n} = \frac{\dfrac{n\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{(n-1)}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n-1} = \overline{X}_{n-1}$$

La media para los “datos incompletos” también es igual: $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n-1} = \overline{X}_{n-1}$

Queda demostrado que la media para los datos incompletos y de los que tienen como valor imputado la media aritmética de los datos completados, siempre van a ser iguales.

Analicemos ahora el efecto de esta imputación en la matriz de varianzas y covarianzas, comparando la matriz original con la matriz con 3% de datos completados mediante imputación por la media (Ver Cuadro 3.2).

CUADRO 3.2

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Método de Imputación por Media
Tamaño de muestra n=10 y 3% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos Originales)

Variables	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	2.044			
X_2	0.067	2.044		
X_3	-0.533	-0.356	8.900	
X_4	-0.267	-0.844	3.033	**11.878**

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Un Dato Completado con Imputación en X_4)

Variables	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	2.044			
X_2	0.067	2.044		
X_3	-0.533	-0.356	8.900	
X_4	0.025	0.321	3.543	**7.580**

Elaborado por: G. Cuenca

Por medio del Cuadro 3.2 podemos apreciar las varianzas y covarianzas entre las variables, utilizando la matriz de datos originales, las variables X_3 y X_4, muestran la mayor covarianza (3.033), seguida por la covarianza entre X_2 y X_4 (-0.844). También se aprecia un valor "grande" en la varianza de la variable X_4 (11.878), por ende valores de esta variable tienden a distribuirse lejos de la media, mientras que las variables X_1 y X_3 tienen la misma varianza (2.044).

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos con imputaciòn por la media se nota una disminución en la varianza de la variable X_4, comparándola con la matriz de datos original; esto ocurre debido a que se inserta el valor de la media en los datos faltantes de esa variable y por ende los datos están menos dispersos. Por otro lado, el valor de las covarianzas disminuyó, con excepción de la covarianza entre X_3 y X_4 donde su valor aumentó de 3.033 a 3.543.

Segundo Caso: Faltan *dos datos* en una misma variable

Como segunda ilustración, utilizamos la misma matriz de datos del primer caso, pero ahora faltan dos datos en la variable X_1, datos que provienen de una distribución Poisson con $\lambda = 2$; faltan: $X_{51} = 4$ y $X_{71} = 2$. Nótese que, dos datos faltantes representan, en este caso, el 5% de datos faltantes en la matriz de datos. (Ver Tabla 3.2)

Tabla 3.2

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Tamaño de muestra n=10, 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4
5	4	3	6
1	7	1	6
2	6	8	10
2	5	3	2
4	6	4	9
3	5	6	12
2	3	4	14
0	3	5	9
3	3	2	6
2	4	11	7

Elaborado por: G. Cuenca

El valor de la media aritmética de X_1, con los dos datos faltantes es $\overline{X}_1 = \frac{5+1+2+2+3+0+3+2}{8} = 2.250$, entonces reemplazamos en $X_{51} = X_{71} = 2.250$.

El vector de medias con dos datos completados en X_1 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.250 \\ 4.600 \\ 4.700 \\ 8.100 \end{pmatrix}$$

CUADRO 3.3

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson

Método de Imputación por la Media

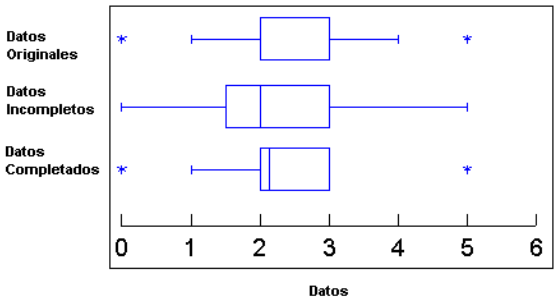
Tamaño de muestra n=10 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_1"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos completados por la Media
n		10	8	10
Media		2,400	2,250	2,250
Mediana		2,000	2,000	2,125
Moda		2,000	2,000	2,000
Varianza		2,044	2,214	1,728
Desviación Estándar		1,430	1,488	1,312
Error Estándar		0,452	0,526	0,415
Coeficiente de Asimetría		0,251	0,477	0,507
Curtosis		0,341	1,107	1,982
Rango		5,000	5,000	5,000
Mínimo		0,000	0,000	0,000
Máximo		5,000	5,000	5,000
Percentiles	25	1,750	1,250	1,750
	50	2,000	2,000	2,125
	75	3,250	3,000	3,000

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

Podemos apreciar en Cuadro 3.3 que la mediana de los datos con imputación en la variable X_1 es mayor que la de los datos completos e incompletos. Por medio del Diagrama de Cajas se aprecia que las distribuciones de los datos incompletos y con imputación están sesgadas a la derecha, ya que su coeficiente de asimetría es mayor a cero, así como también tienen una distribución leptocùrtica.

La columna con datos originales y con datos imputados tiene valores atípicos estos son 0 y 5.

Analicemos ahora el efecto de esta imputación en la matriz de varianzas y covarianzas, comparando la matriz original con la matriz con 5% de datos completados mediante imputación por la media (Ver Cuadro 3.4)

CUADRO 3.4

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Método de Imputación por Media
Tamaño de muestra n=10 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

Variables	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	**2.044**			
X_2	0.067	2.044		
X_3	-0.533	-0.356	8.900	
X_4	-0.267	-0.844	3.033	11.878

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Dos datos completados con Imputación en X_1)

Variables	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	**1.728**			
X_2	-0.211	2.044		
X_3	-0.436	-0.356	8.900	
X_4	-0.253	-0.844	3.033	11.878

Elaborado por: G. Cuenca

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados “con imputación” *por la media* el valor de las covarianzas de la variable X_1

con las demás variables disminuyó, por ejemplo la covarianza entre X_1 y X_2, disminuyó de 0.067 a -0.211.

Tercer Caso: Faltan *cinco datos*, tres en X_1 y dos en X_3

Continuando con la matriz de datos del primer y segundo caso, pero ahora con cinco datos faltantes en total: tres en la variable X_1, datos que provienen de una distribución Poisson con $\lambda = 2$; faltan: $X_{11} = 5$, $X_{51} = 4$ y $X_{71} = 2$ y dos en la variable X_3, datos que provienen de una distribución Poisson con $\lambda = 5$; faltan: $X_{43} = 3$ y $X_{83} = 5$. Nótese que, cinco datos faltantes representan, en este caso, el 13% de datos faltantes en la matriz de datos. (Ver Tabla 3.3)

Tabla 3.3

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Tamaño de muestra n=10, 13% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4
5	4	3	6
1	7	1	6
2	6	8	10
2	5	**3**	2
4	6	4	9
3	5	6	12
2	3	4	14
0	3	**5**	9
3	3	2	6
2	4	11	7

Elaborado por: G. Cuenca

Los valores de las medias aritméticas $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_3$ con los datos faltantes, en este caso siete y ocho respectivamente son: 1.857 y 4.875 entonces reemplazamos en los datos faltantes en su respectiva columna de la matriz de datos.

La matriz de datos resultante con cinco valores completados por imputación por media en las variables X_1 y X_3, se muestra en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Método de Imputación por la Media
Tamaño de muestra n=10, 13% de datos completados en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4
1.857	4	3	6
1	7	1	6
2	6	8	10
2	5	**4.875**	2
1.857	6	4	9
3	5	6	12
1.857	3	4	14
0	3	**4.875**	9
3	3	2	6
2	4	11	7

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias con tres datos con imputación en X_1 y dos en X_3 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.857 \\ 4.600 \\ 4.875 \\ 8.100 \end{pmatrix}$$

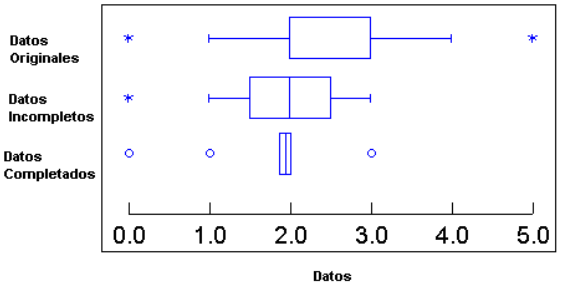
CUADRO 3.5

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Método de Imputación por la Media
Tamaño de muestra n=10 y 13% de datos faltantes en la matriz
Tablas y Diagramas de las "*Variables* X_1 y X_3"

Estimadores "*Variable* X_1"

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media
n		10	7	10
Media		2,400	1,857	1,857
Mediana		2,000	2,000	1,928
Moda		2,000	2,000	1,857
Varianza		2,044	1,143	0,762
Desviación Estándar		1,430	1,069	0,873
Error Estándar		0,452	0,404	0,276
Coeficiente de Asimetría		0,251	-0,772	-0,844
Curtosis		0,341	0,262	1,619
Rango		5,000	3,000	3,000
Mínimo		0,000	0,000	0,000
Máximo		5,000	3,000	3,000
Percentiles	25	1,750	1,000	1,643
	50	2,000	2,000	1,929
	75	3,250	3,000	2,250

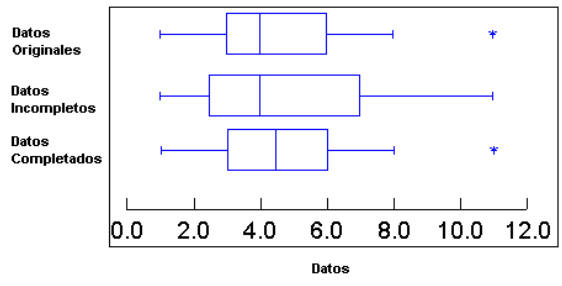
Diagrama de Cajas "*Variable* X_1"



Estimadores "*Variable* X_3"

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media
n		10	8	10
Media		4,700	4,875	4,875
Mediana		4,000	4,000	4,438
Moda		3,000	4,000	4,000
Varianza		8,900	10,982	8,542
Desviación Estándar		2,983	3,314	2,923
Error Estándar		0,943	1,172	0,924
Coeficiente de Asimetría		1,085	0,899	0,956
Curtosis		1,046	0,250	1,080
Rango		10,000	10,000	10,000
Mínimo		1,000	1,000	1,000
Máximo		11,000	11,000	11,000
Percentiles	25	2,750	2,250	2,750
	50	4,000	4,000	4,438
	75	6,500	7,500	6,500

Diagrama de Cajas "*Variable* X_3"



Elaborado por: G. Cuenca

Podemos apreciar en el Cuadro 3.5 que la mediana de los datos con imputación en la primera variable disminuyó ya que existe mayor cantidad de datos con imputación y uno de estos se colocó en el centro al momento de calcular nuevamente la mediana.

En el Diagrama de cajas de la variable X_1 se puede apreciar que tanto los datos originales, incompletos y con imputación tienen un valores atípicos en este caso un valor relativamente pequeño y uno relativamente grande, así como también su distribución es platicùrtica ya que el coeficiente de curtosis de cada una es menor a tres.

El Cuadro 3.5 también nos muestra los estimadores para la variable $X_{3,}$ donde la mediana de los datos con imputaciòn aumenta con respecto a la mediana de los datos originales e incompletos. El Diagrama de Cajas para los datos originales, incompletos y con imputación muestran que sus distribuciones están sesgadas a la derecha es decir contienen algunos valores relativamente grandes y la curtosis es menor a tres por lo tanto su distribución es platicùrtica.

Analicemos ahora el efecto de esta imputación en la matriz de varianzas y covarianzas, comparando la matriz original con la matriz con 13% de datos completados mediante imputación por la media (Ver Cuadro 3.6)

CUADRO 3.6

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias independientes con distribución Poisson
Método de Imputación por Media
Tamaño de muestra n=10 y 13% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

Variables	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	**2.044**			
X_2	0.067	2.044		
X_3	-0.533	-0.356	**8.900**	
X_4	-0.267	-0.844	3.033	11.878

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos completados con Imputación en X_1 y X_3)

Variables	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	**0.762**			
X_2	-0.032	2.044		
X_3	0.294	-0.250	**8.542**	
X_4	0.159	-0.844	1.750	11.878

Elaborado por: G. Cuenca

La covarianza entre X_1 y X_4, se incrementa de -0.267 en los datos originales a 0.159 en los datos completados con imputación.

El valor de la covarianza entre X_3 y X_4 disminuye de 3.033 en los datos originales a 1.750 en los datos con imputación.

3.3.2 Modelo de Regresión Lineal Múltiple

Un modelo de Regresión Lineal Múltiple entre una variable dependiente Y y p-1 variables independientes $(X_1, X_2, ..., X_{p-1})$ es un modelo del tipo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_{p-1} X_{i,p-1} + \varepsilon_i ; \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad (3.2)$$

Donde $(X_1, X_2, ..., X_{p-1})$ son las variables explicativas de la regresión, Y es la variable explicada y ε es el ruido o error aleatorio.

Los valores de los parámetros β_i son desconocidos y deben ser estimados utilizando una muestra aleatoria que consiste en p-uplas del tipo:

$$\begin{cases} (X_{11}, X_{12}, ..., X_{1p}, Y_1) \\ (X_{21}, X_{22}, ..., X_{2p}, Y_2) \\ . \\ . \\ . \\ (X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ip}, Y_i) \\ . \\ . \\ . \\ (X_{n1}, X_{n2}, ..., X_{np}, Y_n) \end{cases}$$

Donde X_{ij} es el valor de la *j*-ésima variable independiente, para la *i*-èsima observación $i = 1,2,..n$

Los resultados se facilitan con el uso de notación matricial con $X_0 = 1$, de la siguiente manera:

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_{\mathrm{i}} \\ . \\ . \\ . \\ Y_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12}....X_{1\mathrm{P}} \\ 1 & X_{21} & X_{22}....X_{2\mathrm{P}} \\ 1 & X_{31} & X_{32}....X_{3\mathrm{P}} \\ . & & \\ . & & \\ 1 & X_{\mathrm{i}1} & X_{\mathrm{i}2}....X_{\mathrm{iP}} \\ . & & \\ . & & \\ 1 & X_{\mathrm{n}1} & X_{\mathrm{n}2}....X_{\mathrm{nP}} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_{\mathrm{i}} \\ . \\ . \\ \beta_{\mathrm{P}} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las n ecuaciones que representan las Y_{i} como función de las X, los estimadores β y los ε se pueden escribir como:

$$\mathrm{Y}=\mathrm{X}\beta+\varepsilon \tag{3.3}$$

Para n observaciones de un modelo de regresión lineal simple, esto es:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \varepsilon_{\mathrm{i}}$$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ . & \\ . & \\ . & \\ 1 & X_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

Dado que

$$\mathbf{X^T X} = \begin{pmatrix} 1 & 1.... & 1 \\ X_1 & X_2 ... & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

y

$$\mathbf{X^T Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1.... & 1 \\ X_1 & X_2 ... & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Vemos que las ecuaciones de Mínimos Cuadrados están dadas por

$$\mathbf{X^T X \hat{\beta}} = \mathbf{X^T Y} \tag{3.6}$$

En consecuencia,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X^T X})^{-1} \mathbf{X^T Y} \tag{3.7}$$

Son también las soluciones de Mínimos Cuadrados.

Coeficiente de Correlación Lineal

Una medida para saber que tan adecuado es el modelo lineal general planteado para $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, es el coeficiente de correlación lineal entre X y Y, pero en el cual ya se considera a X como una variable aleatoria.

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{3.8}$$

En el modelo de regresión lineal estudiado $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, X es un valor fijado por el investigador, es decir no es variable aleatoria.

$$\text{E(Y)} = \beta_0 + \beta_1 X \tag{3.9}$$

Podemos considerar a x como un valor tomado por cierta variable aleatoria X

$$\text{E}\langle Y \,|\, X = x \rangle = \beta_0 + \beta_1 x \quad \text{donde} \quad \beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho$$

Para el caso en que (X, Y) tiene una distribución bivariada, es posible que el investigador no esté interesado en la relación lineal que defina $\text{E}\langle Y \,|\, X \rangle$, éste quizás sólo desee saber si las variables aleatorias X y Y son independientes. Si (X, Y) tiene una distribución normal, entonces la prueba de independencia equivale a probar que el coeficiente de correlación ρ es igual a cero. Se debe recordar que ρ es positivo si X y Y tienden a aumentar juntas y es negativo si ρ disminuye a medida que aumenta X.

3.3.3 Imputación por Regresión

El método de Imputación por Regresión se realiza particionando la matriz $\mathbf{X}$ en dos conjuntos, uno que contiene todas las filas con "valores faltantes" y otro las filas con "valores completos".

Supongamos que X_{ij} es el único valor faltante en la entrada de la *i*-ésima fila $\mathbf{X} \in M_{n\,x\,p}$**,** luego usamos los datos en la sub-matriz con las (*p*-1) filas completas, X_j se retrocede en las otras variables para obtener la ecuación de predicción

$$\hat{Y}_j = b_0 + b_1 X_1 + \ldots + b_{j-1} X_{j-1} + b_{j+1} X_{j+1} + \ldots + b_p X_p \qquad (3.10)$$

El cálculo de los coeficientes de la regresión como explicamos en la sección anterior es de la forma:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Luego las entradas no faltantes en la *i*-ésima fila son como las variables de explicación en la ecuación de regresión para predecir el valor X_{ij}. El método de regresión utilizado para imputar datos fue propuesto primero por Buck (1960).

El método de regresión puede ser mejorado por iteración, es decir, primero se estiman todas las "entradas" faltantes en la matriz de datos usando regresión, después se llena los espacios en las "entradas"

faltantes, luego se utiliza la matriz de datos así completada para obtener la nueva ecuación de predicción. [6]

Se utiliza los nuevos datos de la matriz para obtener la ecuación revisada de predicción y los nuevos valores $\hat{X}_{ij}$ y se continúa el proceso hasta que los valores de predicción se estabilicen.

Si las variables tienen demasiadas filas con datos faltantes, para utilizar el algoritmo de regresión en primera instancia, se puede usar el método de imputación por la media y luego usar regresión en las siguientes iteraciones.

A continuación se ilustra esta técnica:

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de tres poblaciones todas ellas Normal, y que son dependientes, donde cada columna tiene parámetros μ y σ^2 conocidos, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{10\mathrm{x}3}$, $i= 1,2,....10$ y $j= 1,2,3$.

Primer Caso: Faltan *dos datos*, uno en X_2 y uno en X_3

Tabla 3.5

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Tamaño de muestra n=10, 7% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3
35.011	**3.500**	2.801
35.002	4.901	**2.702**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

Nótese que, dos datos faltantes representan, en este caso, el 7% de datos faltantes en la matriz de datos. (Ver Tabla 3.5)

Se obtiene la matriz *de varianzas y covarianzas* y *de correlaciones* de la matriz de datos original

CUADRO 3.7

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10 y 7% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	140.509		
X_2	49.759	**72.207**	
X_3	1.948	3.677	**0.250**

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	1.000		
X_2	0.494	1.000	
X_3	0.328	**0.865**	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

Por medio del Cuadro 3.7 podemos apreciar las varianzas y covarianzas entre las variables, utilizando la matriz de datos originales, donde la mayor covarianza está entre las variables X_1 y X_2, esto es 49.759 seguida por la covarianza entre X_2 y X_3, 3.677.

En la matriz de correlaciones, se nota que la mayor correlación se da entre las variables X_2 y X_3 (0.865), seguida por 0.494 entre las variables X_1 y X_2.

1° Paso

Particionamos la matriz de datos en dos partes:

Tabla 3.6

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal

Tamaño de muestra n=10, 7% de datos faltantes en la matriz

Matriz particionada

X_1	X_2	X_3
35.011	**3.500**	2.801
35.002	4.901	**2.702**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

Una parte de la matriz tiene filas con valores completos y la otra parte tiene filas con valores faltantes (Ver Tabla 3.6)

2° Paso

Utilizamos los datos de la sub-matriz con las filas completas para hacer la predicción. Las unidades con filas completas serán las variables independientes.

Primero X_1 y X_3 son las variables independientes que van a explicar a X_2; para las observaciones tercera a la décima, utilizando la ecuación de regresión $\hat{X}_2 = b_0 + b_1 X_1 + b_3 X_3$;

CUADRO 3.8

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal

Método de Imputación por Regresión(Variable Dependiente X_2)

Análisis de Regresión

	Coeficientes	Error Estàndar	t	p
Constante	-39,840	11,742	-3,398	0,019
b_1	0,154	0,171	0,904	0,407
b_3	13,801	4,140	3,328	0,021

Elaborado por: G. Cuenca

Por medio del Cuadro 3.8, podemos ver que los valores de los coeficientes son: $b_0 = -39.840$, $b_1 = 0.154$, $b_3 = 13.801$

Los valores de los betas se los evalúa en las dos entradas de valores completos en la primera fila (X_1=35.011 , X_3=2.801)

$$\hat{X}_2 = b_0 + b_1(35.011) + b_3(2.801)$$

$$\hat{X}_2 = (-39.840) + (0.154)(35.011) + (13.801)(2.801)$$

$$\hat{X}_2 = 4.208$$

Similarmente hacemos la siguiente regresión pero ahora X_1 y X_2 son las variables independientes que van a explicar a X_3, donde $b_0 = 2.814, b_1 = -0.001, b_3 = 0.051$, los que se evalúan en las dos entradas de valores completos en la segunda fila (X_1=35.002, X_3=4.901)

$$\hat{X}_3 = b_0 + b_1(35.002) + b_2(4.901)$$

$$\hat{X}_3 = (2.814) - (0.001)(35.002) + (0.051)(4.901)$$

$$\hat{X}_3 = 3.029$$

3° Paso

Ahora insertamos estos estimadores, 4.208 en X_{12} y 3.099 en X_{23}, en los valores faltantes y calculamos la ecuación de regresión basada en las diez observaciones. (Ver Tabla 3.7)

Utilizando la ecuación $\hat{X}_2 = b_0 + b_1 X_1 + b_3 X_3$ obtenemos el nuevo valor:

Tabla 3.7

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=10, 7% de datos faltantes en la matriz

Primeros valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	**4.208**	2.801
35.002	4.901	**3.099**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_2 = (-40.526) + (0.138)(35.011) + (14.063)(2.801)$$

$$\hat{X}_2 = 3.696$$

De igual forma obtenemos la ecuación para X_3 que nos da el nuevo valor de predicción

$$\hat{X}_3 = (2.828) - (0.003)(35.002) + (0.052)(4.901)$$

$$\hat{X}_3 = 2.978$$

4° Paso

Nuevamente insertamos los estimadores calculados, 3.696 en X_{12} y 2.978 en X_{23} y calculamos la nueva ecuación para obtener los valores de predicción. (Ver Tabla 3.8)

Tabla 3.8

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10, 7% de datos faltantes en la matriz
Segundos valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	**3.696**	2.801
35.002	4.901	**2.978**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_2 = (-40.680) + (0.139)(35.011) + (14.114)(2.801)$$

$$\hat{X}_2 = 3.720$$

$$\hat{X}_3 = (2.831) + (-0.003)(35.002) + (0.052)(4.901)$$

$$\hat{X}_3 = 2.981$$

Aquí hay un cambio en las siguientes iteraciones. Estos valores ($\hat{X}_2 = 3.720$, $\hat{X}_3 = 2.981$) tienden a los verdaderos valores (X_2=3.500 y X_3=2.702) que inicialmente la regresión estimó así ($\hat{X}_2 = 4.208$ y $\hat{X}_3 = 3.099$). Además si se realizaba la imputación por la media los valores de X_2 y X_3 serían $\overline{X}_2 = 7.601$ y $\overline{X}_3 = 3.134$. (Ver Cuadro 3.9)

CUADRO 3.9
Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10, 7% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{1,2}$=3.500

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	4.208	0.708
2	3.696	0.196
3	3.702	0.202

Imputaciones sucesivas para $X_{2,3}$=2.702

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	3.028	0.326
2	2.978	0.276
3	2.981	0.279

Elaborado por: G. Cuenca

La matriz de varianzas y covarianzas para datos originales, datos con primera imputaciòn y datos con segunda imputación se muestra a continuación:

CUADRO 3.10
Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10, 7% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos Originales)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	140.509		

X_2	49.759	72.207	
X_3	1.948	3.677	0.250

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos con primer resultado de predicción en $X_{1,2}$ y $X_{2,3}$)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	140.509		
X_2	50.300	71.677	
X_3	2.251	3.550	0.232

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos con segundo resultado de predicción en $X_{1,2}$ y $X_{2,3}$)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	140.509		
X_2	49.909	72.050	
X_3	2.159	3.600	0.234

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos con tercer resultado de predicción en $X_{1,2}$ y $X_{2,3}$)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	140.509		
X_2	49.927	72.032	
X_3	2.161	3.598	0.234

Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 3.10 se aprecia que, con el primer resultado de predicciòn la covarianza entre X_1 y X_2 se incrementa de 49.759 a 50.300, Así como también la covarianza entre X_1 y X_3 de 1.948 a 2.251.

Mientras que las covarianzas con el segundo resultado de predicción empiezan a disminuir es decir, la covarianza entre X_1 y X_2 diminuye de 50.300 a 49.909.

La covarianza entre X_1 y X_2 con el tercer resultado de predicción, disminuye a 49.927 pero este valor tiende al de la matriz de datos originales.

Segundo Caso: Faltan *tres datos*, uno en X_1, uno en X_2 y uno X_3, pero todos pertenecen a una misma fila.

Como ya lo explicamos anteriormente, cuando se da el caso donde no se tiene información suficiente para calcular la ecuación de predicción inicial, se aplica primero el método de imputación por la media y luego se usa regresión en subsecuentes iteraciones.

Utilizando la matriz del caso 1, es decir una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de tres poblaciones todas ellas Normal, y que son dependientes, donde cada columna tiene parámetros μ y σ^2 conocidos, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{10x3}$, *i= 1,2,....10* y *j= 1,2,3*, y se supone que tiene el 10% de datos faltantes, es decir tres datos, los que recayeron en la variable X_1, X_2 y X_3 : $X_{2,1}$=35.002, $X_{2,2}$=4.901 y el $X_{2,3}$=2.702 (Ver Tabla 3.9)

Tabla 3.9

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal

Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
35.002	**4.901**	**2.702**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

Como podemos observar en la Tabla 3.9, no se tiene suficiente información para obtener la ecuación de predicción, ya que para obtener la misma se requieren que las otras variables tengan datos completos, entonces se procede primero a aplicar el método de imputación por la media.

Los valores de las medias aritméticas $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ y $\overline{X}_3$ utilizando solo los datos completos, en este caso nueve para cada una son: 27.371, 7.445 y 3.134 entonces reemplazamos en los datos faltantes de su respectiva variable. (Ver Tabla 3.10)

Tabla 3.10

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Media
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
27.371	**7.445**	**3.134**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

Ya que estimamos los valores faltantes primero por medio del método de imputación por la media, ahora procedemos a aplicar imputación por regresión en los mismos.

Primero X_2 y X_3 son las variables independientes que van a explicar a X_1; utilizando la ecuación de regresión $\hat{X}_1 = b_0 + b_2 X_2 + b_3 X_3$

CUADRO 3.11

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión (Variable dependiente X_1)

Análisis de Regresión

	Coeficientes	**Error Estàndar**	**t**	**p**
Constante	37.377	44.259	0.845	0.426
b_2	1.000	0.906	1.103	0.306
b_3	-5.569	-0.350	-0.350	0.737

Elaborado por: G. Cuenca

Entonces $b_0 = 37.377, b_1 = 1.000, b_3 = -5.569$

$$\hat{X}_1 = (37.377) + (1.000)(7.445) + (5.569)(3.134)$$
$$\hat{X}_1 = 27.371$$

De manera similar hacemos la siguiente regresión pero ahora X_1 y X_3 son las variables independientes que van a explicar a X_2, donde $b_0 = -40.292, b_1 = 0.148, b_3 = 13.940$

CUADRO 3.12

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal

Método de Imputación por Regresión (Variable dependiente X_2)

Análisis de Regresión

	Coeficientes	Error Estàndar	t	p
Constante	-40.292	9.372	-4.299	0.004
b_1	0.148	0.134	1.103	0.306
b_3	13.940	3.237	4.306	0.004

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_2 = (-40.292) + (0.148)(27.371) + (13.940)(3.134)$$
$$\hat{X}_2 = 7.443$$

Por último hacemos regresión donde, X_1 y X_2 son las variables independientes que van a explicar a X_3

$b_0 = 2.830, b_1 = -0.003, b_3 = -0.052$

$$\hat{X}_3 = (2.830) + (-0.003)(27.371) - (0.052)(7.445)$$
$$\hat{X}_3 = 2.358$$

CUADRO 3.13

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión (Variable dependiente X_3)

Análisis de Regresión

	Coeficientes	Error Estàndar	t	p
Constante	2.830	0.224	12.626	0.000
b_1	-0.003	0.009	-0.350	0.737
b_3	-0.052	0.012	4.306	0.004

Elaborado por: G. Cuenca

Ahora insertamos estos estimadores, 27.371 en X_{21}, 7.443 en X_{22} y 2.358 en X_{23}, (Ver Tabla 3.11) y calculamos nuevamente la ecuación de regresión.

Tabla 3.11

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresiòn
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz
Primeros valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
27.371	**7.443**	**2.358**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_1 = (29.060) + (0.854)(7.442) + (-2.633)(2.358)$$
$$\hat{X}_1 = 29.207$$

$$\hat{X}_2 = (-30.629) + (0.204)(27.371) + (10.630)(2.358)$$
$$\hat{X}_2 = 0.020$$

$$\hat{X}_3 = (2.753) + (-0.003)(27.371) - (0.052)(7.443)$$
$$\hat{X}_3 = 2.281$$

Insertamos los nuevos estimadores, 29.207 en X_{21}, 0.020 en X_{22} y 2.281 en X_{23}, para calcular los nuevos valores de predicción. (Ver Tabla 3.12)

Tabla 3.12

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresiòn
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz
Segundos valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
29.207	**0.020**	**2.281**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_1 = (45.307) + (1.103)(0.020) + (-8.248)(2.281)$$
$$\hat{X}_1 = 26.713$$

$$\hat{X}_2 = (-36.469) + (0.175)(29.207) + (12.578)(2.281)$$
$$\hat{X}_2 = -2.666$$

$$\hat{X}_3 = (2.824) + (-0.006)(29.207) + (0.058)(0.020)$$
$$\hat{X}_3 = 2.647$$

Los nuevos estimadores son insertados, 26.713 en X_{21}, -2.666 en X_{22} y 2.647 en X_{23}, para calcular los nuevos valores de predicción. (Ver Tabla 3.13)

Tabla 3.13

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal

Método de Imputación por Regresiòn

Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz

Terceros valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
26.713	**-2.666**	**2.647**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_1 = (38.052) + (0.907)(-2.666) + (-5.375)(2.647)$$
$$\hat{X}_1 = 21.405$$

$$\hat{X}_2 = (-42.522) + (0.138)(26.713) + (14.652)(2.647)$$
$$\hat{X}_2 = -0.047$$

$$\hat{X}_3 = (2.832) + (-0.003)(26.713) + (0.051)(-2.666)$$
$$\hat{X}_3 = 2.687$$

Los nuevos estimadores insertados son, 21.405 en X_{21}, -0.047 en X_{22} y 2.687 en X_{23}, para calcular los nuevos valores de predicción. (Ver Tabla 3.14)

Tabla 3.14

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz
Cuartos valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
21.405	**-0.047**	**2.687**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_1 = (36.889) + (1.003)(-0.047) + (-5.449)(2.687)$$
$$\hat{X}_1 = 22.199$$

$$\hat{X}_2 = (-40.538) + (0.149)(21.405) + (14.002)(2.687)$$
$$\hat{X}_2 = 0.275$$

$$\hat{X}_3 = (2.817) + (-0.003)(21.405) + (0.053)(-0.047)$$
$$\hat{X}_3 = 2.749$$

Los nuevos estimadores que se insertan son, 22.199 en X_{21}, 0.275 en X_{22} y 2.749 en X_{23}, para calcular los nuevos valores de predicción. (Ver Tabla 3.15)

Tabla 3.15

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresiòn
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz
Quintos valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
22.199	**0.275**	**2.749**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_1 = (37.336) + (1.001)(0.275) + (-5.563)(2.749)$$
$$\hat{X}_1 = 22.316$$

$$\hat{X}_2 = (-40.897) + (0.149)(22.199) + (14.091)(2.749)$$
$$\hat{X}_2 = 1.152$$

$$\hat{X}_3 = (2.826) + (-0.003)(22.199) + (0.052)(0.275)$$
$$\hat{X}_3 = 2.772$$

Entonces los estimadores que se insertarán son, 22.316 en X_{21}, 1.152 en X_{22} y 2.772 en X_{23}, para calcular los nuevos valores de predicción. (Ver Tabla 3.16)

Tabla 3.16

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresiòn
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz
Sextos valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
22.316	**1.152**	**2.772**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_1 = (37.075) + (1.003)(1.152) + (-5.504)(2.772)$$
$$\hat{X}_1 = 22.974$$

$$\hat{X}_2 = (-40.570) + (0.149)(22.316) + (14.007)(2.772)$$
$$\hat{X}_2 = 1.583$$

$$\hat{X}_3 = (2.822) + (-0.003)(22.316) + (0.052)(1.152)$$
$$\hat{X}_3 = 2.814$$

Continuamos insertando los estimadores que ahora, 22.974 en X_{21}, 1.583 en X_{22} y 2.814 en X_{23}. (Ver Tabla 3.17)

Tabla 3.17

Efectos de la imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresiòn
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz
Séptimos valores estimados

X_1	X_2	X_3
35.011	3.500	2.801
22.974	**1.583**	**2.814**
40.021	30.000	4.382
10.101	2.802	3.211
6.003	2.701	2.732
20.000	2.821	2.810
35.000	4.640	2.881
35.100	10.921	2.902
35.100	8.010	3.283
30.002	1.611	3.201

Elaborado por: G. Cuenca

$$\hat{X}_1 = (37.287) + (1.002)(1.583) + (-5.504)(2.814)$$
$$\hat{X}_1 = 23.243$$

$$\hat{X}_2 = (-40.675) + (0.149)(22.974) + (14.032)(2.814)$$
$$\hat{X}_2 = 2.237$$

$$\hat{X}_3 = (2.826) + (-0.003)(22.974) + (0.052)(1.583)$$
$$\hat{X}_3 = 2.838$$

Se continúa con las regresiones sucesivas, la cual se estabilizó en la iteración treinta y uno (Ver Cuadro 3.14, 3.15 y 3.16), es decir se tuvo

que realizar treinta y un regresiones sucesivas hasta que al final quedaron los siguientes valores estimados para cada variable; 29.547 en $\hat{X}_{21}$, 6.382 en $\hat{X}_{22}$ y 2.347 en $\hat{X}_{23}$.

CUADRO 3.14

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{2,1}$=35.002

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	27.371	7,631
2	29.207	5,795
3	26.713	8,289
4	21.405	13,597
5	22.199	12,803
6	22.136	12,866
7	22.974	12,028
8	23.731	11,271
9	24.008	10,994
10	24.630	10,372
11	24.931	10,071
12	25.366	9,636
13	25.731	9,271
14	26.145	8,857
15	26.351	8,651
16	27.105	7,897
17	27.542	7,460
18	28.372	6,630
19	28.758	6,244
20	29.216	5,786
21	29.843	5,159
22	30.280	4,722
23	30.874	4,128
24	31.520	3,482
25	32.341	2,661
26	32.782	2,220
27	33.451	1,551
28	33.894	1,108
29	34.247	0,755
30	34.784	0,218
31	34.985	0,017

Elaborado por: G. Cuenca

La diferencia en valor absoluto entre el dato observado y el último resultado de predicción tiende al dato observado.

CUADRO 3.15

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{2,2}$=4.901

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	6.382	1,481
2	6.352	1,451
3	6.327	1,426
4	6.305	1,404
5	6.237	1,336
6	6.256	1,355
7	6.220	1,319
8	6.201	1,300
9	6.168	1,267
10	6.120	1,219
11	6.005	1,104
12	5.903	1,002
13	5.856	0,955
14	5.824	0,923
15	5.792	0,891
16	5.741	0,840
17	5.703	0,802
18	5.693	0,792
19	5.637	0,736
20	5.502	0,601
21	5.426	0,525
22	5.315	0,414
23	5.226	0,325
24	5.101	0,200
25	5.003	0,102
26	4.982	0,081
27	4.972	0,071
28	4.958	0,057
29	4.935	0,034
30	4.924	0,023
31	4.910	0,009

Elaborado por: G. Cuenca

CUADRO 3.16

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{2,3}$=2.702

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	2.358	0,344
2	2.281	0,421
3	2.647	0,055
4	2.687	0,015
5	2.749	0,047
6	2.772	0,070
7	2.814	0,112
8	2.838	0,136
9	2.870	0,168
10	2.892	0,190
11	2.917	0,215
12	2.936	0,234
13	2.957	0,255
14	2.972	0,270
15	2.989	0,287
16	3.001	0,299
17	3.014	0,312
18	3.026	0,324
19	3.036	0,334
20	3.045	0,343
21	3.054	0,352
22	3.003	0,301
23	3.891	1,189
24	2.805	0,103
25	2.792	0,090
26	2.772	0,070
27	2.754	0,052
28	2.742	0,040
29	2.731	0,029
30	2.711	0,009
31	2.705	0,003

Elaborado por: G. Cuenca

La diferencia en valor absoluto entre el dato observado de cada variable (X_{21} = 35.002, X_{22} = 4.901 *y* X_{23} = 2.702), y el último

resultado de predicción por medio del método de imputación por regresión ($\hat{X}_{21}$ = 29.547, $\hat{X}_{22}$ = 6.382 *y* $\hat{X}_{23}$ = 2.347), es el siguiente:

$$\left|X_{21} - \hat{X}_{21}\right| = \left|35.002 - 34.985\right| = 0.017$$

$$\left|X_{22} - \hat{X}_{22}\right| = \left|4.901 - 4.910\right| = 0.009$$

$$\left|X_{23} - \hat{X}_{23}\right| = \left|2.702 - 2.705\right| = 0.003$$

Mientras que el error entre el dato observado de cada variable (X_{21} = 35.002, X_{22} = 4.901 *y* X_{23} = 2.702), y el dato estimado por medio del método de imputación por la media ($\hat{X}_{21}$ = 27.371, $\hat{X}_{22}$ = 7.445 *y* $\hat{X}_{23}$ = 3.134), es el siguiente:

$$\left|X_{21} - \hat{X}_{21}\right| = \left|35.002 - 27.371\right| = 7.631$$

$$\left|X_{22} - \hat{X}_{22}\right| = \left|4.901 - 7.445\right| = 2.544$$

$$\left|X_{23} - \hat{X}_{23}\right| = \left|2.702 - 3.134\right| = 0.432$$

Como podemos apreciar, que la diferencia en valor absoluto entre el dato observado y el estimado por medio del método de imputación por regresión es menor al del estimado por el método de imputación por la media, es decir estos valores tienden a los datos observados.

Analicemos el efecto que causa en la matriz de varianzas y covarianzas,

CUADRO 3.17

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=10, 10% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos Originales)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	140.509		
X_2	49.759	72.207	
X_3	1.948	3.677	0.250

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos Completados por la Media en X_1, X_2 y X_3)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	134.685		
X_2	51.700	71.560	
X_3	2.277	3.567	0.232

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos Completados por Regresión en X_1, X_2 y X_3)

Variables	X_1	X_2	X_3
X_1	135.159		
X_2	51.469	71.673	
X_3	2.063	3.672	0.329

Elaborado por: G. Cuenca

Las varianzas y covarianzas entre las variables (Ver Cuadro 3.17), utilizando la matriz de datos originales, son las siguientes:

Se aprecia un valor grande en la varianza de la variable X_1 (140.509), en la matriz de varianzas y covarianzas de datos originales, entonces los valores de esta variable tienden a distribuirse lejos de la media, mientras que en la variable X_3 se aprecia una varianza pequeña (0.250), es decir los valores de esta variable tienden a distribuirse cerca de la media.

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por la media se nota una disminución en el valor de las varianzas de las variables, comparándola con la matriz de datos original; esto ocurre debido a que se inserta el valor de la media en los datos faltantes y por ende los datos están menos dispersos. Mientras que el valor de las covarianzas aumentó, con excepción de la covarianza entre las variables X_2 y X_3 donde su valor disminuyó de 3.677 a 3.567.

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por la regresión el valor de las varianzas de las variables aumentó, comparándolo con los datos imputados por la media; mientras que el valor de las covarianzas disminuyó, con excepción de la covarianza entre las variables X_2 y X_3 donde su valor aumentó de 3.567 a 3.672.