CAPÍTULO IV

4. SIMULACIÓN BAJO DISTINTAS CONDICIONES UNIVARIADAS Y MULTIVARIADAS

4.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos al comparar los métodos de imputación utilizando diferentes tamaños de muestras: 30, 50 y 100 así como distintas distribuciones continuas y discretas tales como: normal, poisson y exponencial. El análisis se lo realiza para variables aleatorias conjuntas dependientes e independientes. Para la generación de las variables aleatorias se utiliza el programa Matlab 6.5 el cual provee de los comandos adecuados para la realización de esta tarea.

Se escogieron tamaños de muestra de 30, 50 y 100, puesto que en primera instancia se realizó simulaciones con tamaños de muestra *n*=10, de los cuales no se pudo obtener resultados dignos de comentario.

En la sección 4.2 se presentan simulaciones para distribuciones normal, poisson y exponencial, idénticamente distribuìdas e independientes, mientras que en la sección 4.3 se presentan distribuciones con variables aleatorias dependientes. Para la utilización del Método de Imputación por Regresión se desarrolló un algoritmo en Matlab 6.5 (Ver Anexo 2).

4.2 Matrices de Datos con variables aleatorias independientes

4.2.1 Distribución Normal: *Tres datos faltantes* en una sola variable (2% de la matriz), tamaño de muestra n=30

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de cinco poblaciones todas ellas Normal, independientes e idénticamente distribuidas, con parámetros μ=5 y σ^2=1, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{30\mathrm{x}5}$, *i= 1,2,....30* y *j= 1,2,3,4,5* y se supone que tiene el 2% de datos faltantes, es decir tres datos, los que recayeron en la variable X_1 y son: el $X_{10,1}$=4.168, $X_{14,1}$=6.624 y el $X_{25,1}$=6.290. Nótese que el 2% de datos faltantes en la matriz, constituye 10% de datos faltantes en la columna que corresponde a X_1 (Ver Tabla 4.1).

Tabla 4.1

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5, 1)

Tamaño de muestra n=30

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	5.118	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
4.168	4.941	4.649	4.626	4.927
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
6.624	6.692	4.008	5.056	6.489
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.406	3.991	4.258	3.651	5.663
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
5.712	3.126	4.440	4.539	4.405
6.290	5.428	5.444	4.738	4.850
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.205 \\ 4.970 \\ 4.984 \\ 4.608 \\ 4.955 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminación por Filas

Como detallamos en el Capítulo 1, el Método de Eliminación por Filas no toma en cuenta las filas donde se encuentren datos faltantes y como los datos faltantes recayeron en la variable X_1 y son: el $X_{10,1}$=4.168, $X_{14,1}$=6.624 y el $X_{25,1}$=6.290, se procede a prescindir de las filas diez, catorce y veinte y cinco. La matriz resultante con filas eliminadas se muestra en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Matriz de datos con tres filas eliminadas

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	5.118	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.406	3.991	4.258	3.651	5.663
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
5.712	3.126	4.440	4.539	4.405
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

Nótese que la eliminación por filas, equivale a prescindir de todos los datos de los informantes porque no respondieron, por ejemplo, una pregunta.

El vector de medias para las veintisiete filas restantes es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.114 \\ 5.040 \\ 5.088 \\ 4.481 \\ 4.754 \end{pmatrix}$$

Como era de esperarse el vector de medias de los datos originales y de los datos con filas eliminadas no coinciden.

Ahora analicemos en el Cuadro 4.1 el efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas*, y *matriz de correlaciones*, la eliminación de tres filas, es decir la diez, la catorce y la veinticinco, con un tamaño de muestra *n*=30.

Se puede notar que la mayoría de las covarianzas entre las variables tanto en la matriz de datos originales como en la matriz con tres filas eliminadas son cercanas a cero, lo cual era de esperarse dado que las columnas son muestras tomadas de poblaciones independientes.

CUADRO 4.1

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.891				
X_2	0.299	0.891			
X_3	-0.152	-0.138	0.502		
X_4	-0.010	0.034	0.014	0.756	
X_5	0.197	0.315	-0.123	0.090	0.740

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.335	1.000			
X_3	-0.227	-0.206	1.000		
X_4	-0.012	0.042	0.023	1.000	
X_5	0.242	**0.388**	-0.202	0.120	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas (3 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.827				
X_2	0.214	0.866			
X_3	-0.147	-0.095	0.510		
X_4	-0.041	0.004	0.031	0.835	
X_5	0.136	**0.247**	-0.077	0.073	0.732

Matriz de Correlaciones (3 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.253	1.000			
X_3	-0.226	-0.143	1.000		
X_4	-0.050	0.005	0.048	1.000	
X_5	0.175	**0.311**	-0.125	0.094	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

La mayor covarianza en la matriz de datos originales se da entre las variables X_2 y X_5 y es 0.315; mientras que en la matriz con tres filas eliminadas este valor disminuye a 0.247.

En la matriz de correlaciones de datos originales, la mayor correlación se da entre las variables X_2 y X_5, y es 0.388, la que disminuye a 0.311 en la matriz de correlaciones con tres filas eliminadas.

En el Cuadro 4.2, podemos apreciar que con el 10% de datos eliminadas en la primera columna (Variable X_1**)**, el valor de la varianza disminuyó de 0.891 a 0.827.

CUADRO 4.2

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Método de Eliminación por Filas

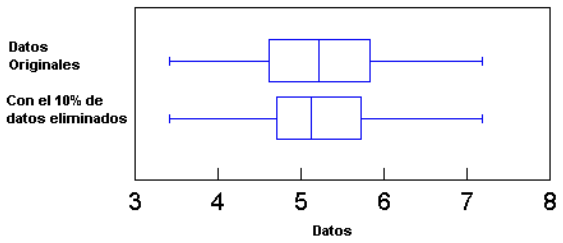
Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_1"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Con el 10% de datos eliminadas en X_1
n		30	27
Media		5,205	5,151
Mediana		5,205	5,114
Moda		3,410	3,410
Varianza		0,891	0,827
Desviación Estándar		0,944	0,909
Error Estándar		0,172	0,175
Coeficiente de Asimetría		-0,161	-0,176
Curtosis		-0,460	-0,105
Rango		3,780	3,780
Mínimo		3,410	3,410
Máximo		7,180	7,180
Percentiles	25	4,553	4,600
	50	5,204	5,114
	75	5,827	5,726

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

Método de Imputación por la Media y Regresión

A continuación se aplica el método de imputación por media y regresión a la misma matriz de datos originales, con los mismos datos faltantes, utilizada en el método de eliminación por filas.

Por medio del Método de *Imputación por la Media*, se procede a calcular la media aritmética de la variable X_1 con los tres datos faltantes, cuyo valor es 5.151, entonces reemplazamos en $X_{10,1}$, $X_{14,1}$ y en $X_{25,1.}$ La matriz de datos resultante con tres valores completados por imputación por la media en la variable X_1 se muestra en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5, 1)

Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	5.118	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
5.151	4.941	4.649	4.626	4.927
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
5.151	6.692	4.008	5.056	6.489
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.406	3.991	4.258	3.651	5.663
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
5.712	3.126	4.440	4.539	4.405
5.151	5.428	5.444	4.738	4.850
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

Por medio del Método de *Imputación por Regresión*, el cálculo de los valores faltantes se realiza por medio de la ecuación de predicción $\hat{Y}_j = b_0 + b_1 X_1 + \ldots + b_{j-1} X_{j-1} + b_{j+1} X_{j+1} + \ldots + b_p X_p$ y el cálculo de los coeficientes de la misma es de la forma $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$. La matriz de datos resultante, con tres valores completados por imputación utilizando regresión en la variable X_1 se puede ver en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5, 1)

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	5.118	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
5.294	4.941	4.649	4.626	4.927
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
5.714	6.692	4.008	5.056	6.489
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.406	3.991	4.258	3.651	5.663
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
5.712	3.126	4.440	4.539	4.405
5.726	5.428	5.444	4.738	4.850
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

En la Tabla 4.5 se realiza una comparación entre el valor real y el valor con imputación por la media y regresión.

Tabla 4.5

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

10% de datos completados en X_1 por la Media

Dato Observado	Imputación por la Media	Error | Dato Observado – Dato con Imputación |
4.168	5.151	0.983
6.624	5.151	1.473
6.290	5.151	1.139

10% de datos completados en X_1 por Regresión

Dato Observado	Imputación por Regresión	Error | Dato Observado – Dato con Imputación |
4.168	5.245	1.077
6.624	5.871	0.753
6.290	5.726	0.564

Elaborado por: G. Cuenca

La diferencia en valor absoluto entre el dato observado de cada variable es menor en el "*Método de Imputación por Regresión*", con excepción del primer valor donde error por medio del Método de Imputación por Media es menor (0.983).

En los Cuadros 4.3, 4.4 y 4.5, podemos apreciar el número de imputaciones sucesivas por medio del *Método de Regresión* que se realiza a los tres datos faltantes en la variable $X_{1.}$

CUADRO 4.3

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

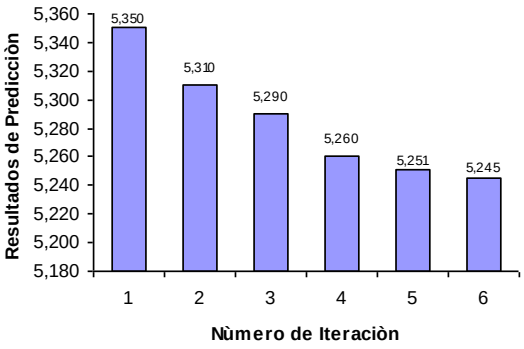
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{10,1}$=4.168

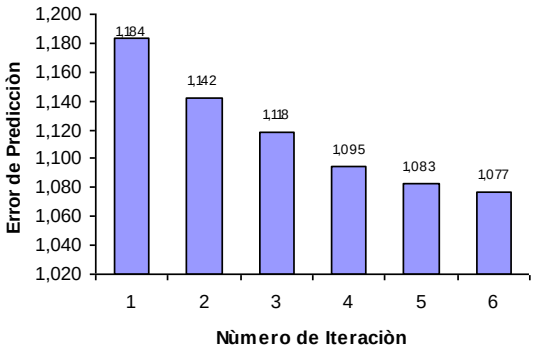
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	5.352	1.184
2	5.310	1.142
3	5.286	1.118
4	5.263	1.095
5	5.251	1.083
6	5.245	1.077

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	6
Media	5.285
Error Estándar	0.017

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	6
Media	1.117
Error Estándar	0.017

Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.3, se puede ver que el primer resultado de predicción es 5.352 ± 0.017, y el último es 5.245 ± 0.017, donde la media de los resultados de predicción es 5.285 ± 0.017.

CUADRO 4.4

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

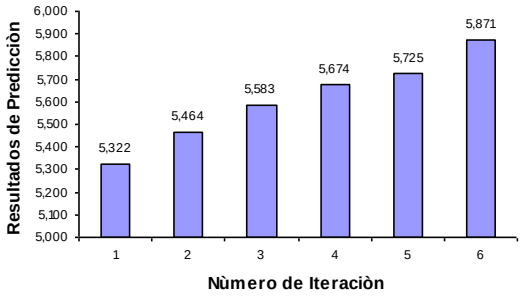
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{14,1}$=6.629

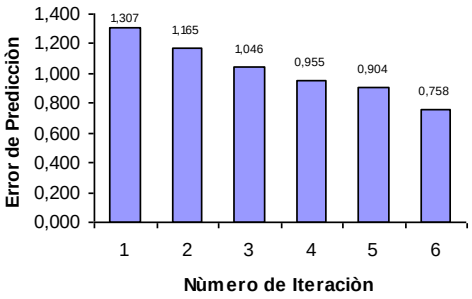
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	5.322	1.307
2	5.464	1.165
3	5.583	1.046
4	5.674	0.955
5	5.725	0.904
6	5.871	0.758

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	6
Media	5.607
Error Estándar	0.080

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	6
Media	1.023
Error Estándar	0.080

Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.4, se puede ver que el primer resultado de predicción es 5.322 ± 0.080, y el último es 5.871 ± 0.080, donde la media de los resultados de predicción es 5.607 ± 0.080. Mientras que la media del error de predicción es 1.023 ± 0.080.

CUADRO 4.5

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

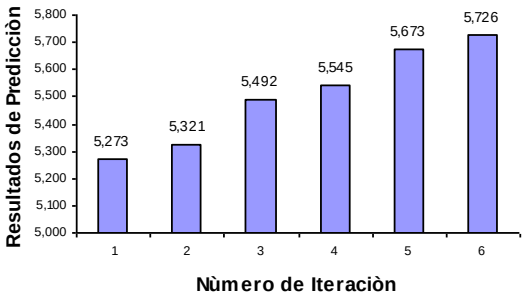
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{25,1}$=6.290

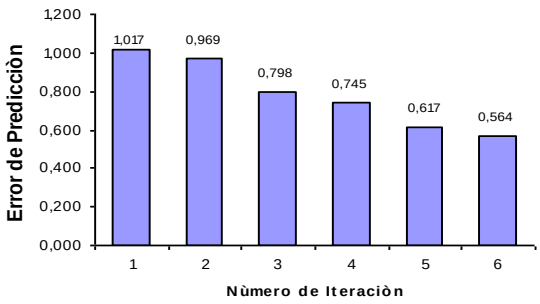
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	5.273	1.017
2	5.321	0.969
3	5.492	0.798
4	5.545	0.745
5	5.673	0.617
6	5.726	0.564

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	6
Media	5.505
Error Estándar	0.075

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	6
Media	0.785
Error Estándar	0.075

Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.5, se puede observar que el resultado de predicción tiene una media de 5.505 ± 0.075. Se nota también que, en general las imputaciones sucesivas a los tres datos faltantes no tienden al valor observado.

CUADRO 4.6

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Método de Imputación por la Media y Regresión

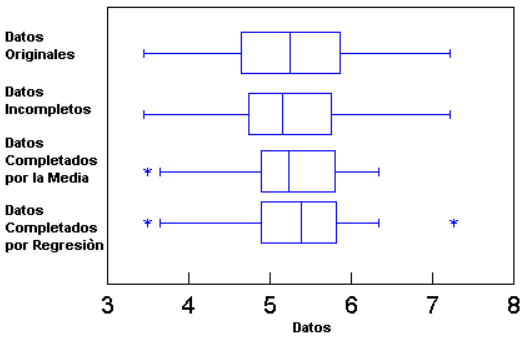
Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_1"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		30	27	30	30
Media		5,205	5,151	5,151	5,193
Mediana		5,205	5,114	5,151	5,294
Moda		3,406	3,410	5,151	5,294
Varianza		0,891	0,827	0,741	0,763
Desviación Estándar		0,944	0,909	0,861	0,873
Error Estándar		0,172	0,175	0,157	0,159
Coeficiente de Asimetría		-0,161	-0,176	-0,184	-0,314
Curtosis		-0,460	-0,105	0,229	0,102
Rango		3,777	3,780	3,777	3,777
Mínimo		3,406	3,410	3,406	3,406
Máximo		7,183	7,180	7,183	7,183
Percentiles	25	4,553	4,600	4,759	4,759
	50	5,204	5,114	5,151	5,294
	75	5,827	5,726	5,717	5,726

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

Al realizar la imputación por los métodos de "media" y "regresión" se obtuvieron los siguientes resultados (Ver Cuadro 4.6)

El valor de la media de los "datos completados" por *la media* disminuye. comparándolo con los "datos originales" y "datos completados" por *regresión.*

El valor de la varianza de los datos completados por la media disminuye de 0.891 a 0.741, mientras que en los datos completados por regresión este valor se incrementa a 0.763, comparándolo con el valor anterior.

El vector de medias con tres datos completados por la media en X_1 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.151 \\ 4.970 \\ 4.984 \\ 4.608 \\ 4.955 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector de medias con tres datos completados por la regresión en X_1 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.193 \\ 4.970 \\ 4.984 \\ 4.608 \\ 4.955 \end{pmatrix}$$

El efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas* y *matriz de correlaciones*, el completar 2% de datos faltantes en una matriz de tamaño 30, por medio de la *imputación por media y regresión*, se presenta en el Cuadro 4.7.

CUADRO 4.7

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Método de Imputación por la Media y Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.891				
X_2	0.299	0.891			
X_3	-0.152	-0.138	0.502		
X_4	-0.010	0.034	0.014	0.756	
X_5	0.197	0.315	-0.123	0.090	0.740

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.335	1.000			
X_3	-0.227	-0.206	1.000		
X_4	-0.012	0.042	0.023	1.000	
X_5	0.242	**0.388**	-0.202	0.120	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 10% Datos Completados por Media en "*Variable* X_1"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	**0.741**				
X_2	**0.192**	0.891			
X_3	**-0.132**	-0.138	0.502		
X_4	**-0.037**	0.034	0.014	0.756	
X_5	**0.122**	0.315	-0.123	0.090	0.740

Matriz de Correlaciones 10% Datos Completados por Media en "*Variable* X_1"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	**0.236**	1.000			
X_3	**-0.215**	-0.206	1.000		
X_4	**-0.049**	0.042	0.023	1.000	
X_5	**0.164**	0.388	-0.202	0.120	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 10% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_1"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	**0.763**				
X_2	**0.235**	0.891			
X_3	**-0.143**	-0.138	0.502		
X_4	**-0.026**	0.034	0.014	0.756	
X_5	**0.149**	0.315	-0.123	0.090	0.740

Matriz de Correlaciones 10% Datos Completados por Regresiòn en "*Variable* X_1"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	**0.285**	1.000			
X_3	**-0.231**	-0.206	1.000		
X_4	**-0.034**	0.042	0.023	1.000	
X_5	**0.199**	0.388	-0.202	0.120	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

Se puede apreciar que los únicos valores que cambian son las covarianzas de la variable X_1 con las demás variables, donde la covarianza entre X_1 y X_2 disminuye de 0.299 a 0.192 en la matriz con 10% de datos completados por la media en la variable X_1, mientras que la

covarianza entre X_1 y X_4 se incrementa en valor absoluto de 0.010 a 0.037.

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por regresión, el valor de las covarianzas de variable X_1 con las demás variables se incrementa, comparándolo con la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por la media.

Por otro lado, analizando el efecto que causa en la matriz de correlaciones, se nota que la mayor correlación se da entre las variables X_2 y X_5, es decir 0.388, seguida por 0.335 entre las variables X_1 y X_2. En la matriz de correlaciones con 10% de datos completados por la media, la correlación entre X_1 y X_2 disminuye a 0.236, mientras que en la matriz de datos completados por regresión ésta tiene un ligero incremento a 0.285. Se puede apreciar también que en general las variables no están fuertemente correlacionadas entre sí.

4.2.2 Distribución Normal*: Tres datos faltantes*, *dos* en la variable X_1 y *uno* en la variable X_4 (2% de la matriz), tamaño de muestra n=30

Continuando con la matriz de datos anterior, pero ahora se tienen dos datos faltantes en la variable X_1 y *uno* en la variable X_4 , datos cuyas columnas son muestras tomadas de cinco poblaciones todas ellas Normal, independientes e idénticamente distribuidas, con parámetros μ

=5 y σ^2=1. Los datos faltantes son los siguientes: $X_{10,1}$=4.168. $X_{18,4}$=3.651 y el $X_{24,1}$=5.712. Nótese que el 2% de datos faltantes en la matriz, constituye 7% de datos faltantes en la columna correspondiente a X_1 y 3% de datos faltantes en la columna X_4

Tabla 4.6

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5, 1)

Tamaño de muestra n=30

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	**5.118**	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
4.168	4.941	4.649	4.626	4.927
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
6.624	6.692	4.008	5.056	6.489
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.406	3.991	4.258	**3.651**	5.663
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
5.712	3.126	4.440	4.539	4.405
6.290	5.428	5.444	4.738	4.850
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.205 \\ 4.970 \\ 4.984 \\ 4.608 \\ 4.955 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminación por Filas

Como los datos faltantes recayeron en las variables X_1 y X_4, se procede a prescindir de las filas diez, dieciocho y veinticuatro. La matriz de datos resultante con filas eliminadas se muestra en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Matriz de datos con tres filas eliminadas

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	**5.118**	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
6.624	6.692	4.008	5.056	6.489
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
6.290	5.428	5.444	4.738	4.850
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias para las veintisiete filas restantes es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.291 \\ 5.076 \\ 5.043 \\ 4.645 \\ 4.950 \end{pmatrix}$$

CUADRO 4.8

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.891				
X_2	0.299	0.891			
X_3	-0.152	-0.138	0.502		
X_4	-0.010	0.034	0.014	0.756	
X_5	0.197	0.315	-0.123	0.090	0.740

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.335	1.000			
X_3	-0.227	-0.206	1.000		
X_4	-0.012	0.042	0.023	1.000	
X_5	0.242	**0.388**	-0.202	0.120	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas (3 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.811				
X_2	0.291	0.815			
X_3	-0.227	-0.226	0.521		
X_4	-0.078	-0.007	-0.014	0.807	
X_5	0.278	**0.339**	-0.129	0.125	0.795

Matriz de Correlaciones (3 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.358	1.000			
X_3	-0.350	-0.348	1.000		
X_4	-0.097	-0.009	-0.022	1.000	
X_5	0.347	0.422	-0.201	0.156	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

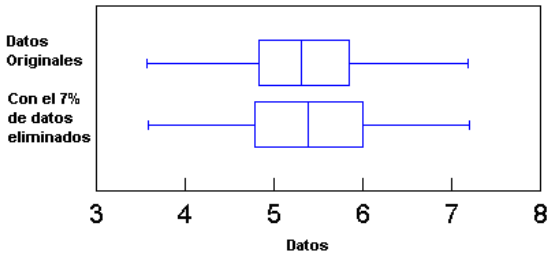
CUADRO 4.9

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados
Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)
Método de Eliminación por Filas
Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz
Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_1" y "*Variable* X_4"

Estimadores "*Variable* X_1"

Estimadores		Datos Originales	Con el 7% de datos eliminadas en X_1
n		30	27
Media		5,205	5,291
Mediana		5,205	5,294
Moda		3,410	3,559
Varianza		0,891	0,811
Desviación Estándar		0,944	0,900
Error Estándar		0,172	0,173
Coeficiente de Asimetría		-0,161	-0,133
Curtosis		-0,460	-0,279
Rango		3,780	3,624
Mínimo		3,410	3,559
Máximo		7,180	7,183
Percentiles	25	4,553	4,813
	50	5,204	5,294
	75	5,827	5,858

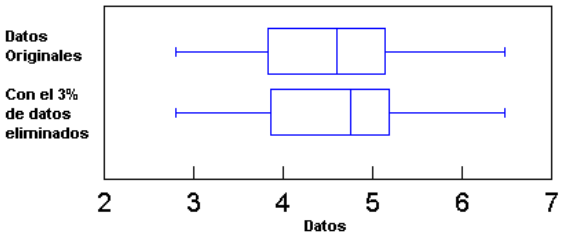
Diagrama de Cajas "*Variable* X_1"



Estimadores "*Variable* X_4"

Estimadores		Datos Originales	Con el 3% de datos eliminadas en X_4
n		30	27
Media		4,608	4,645
Mediana		4,583	4,738
Moda		2,800	2,800
Varianza		0,756	0,807
Desviación Estándar		0,870	0,898
Error Estándar		0,159	0,173
Coeficiente de Asimetría		0,266	0,187
Curtosis		-0,447	-0,589
Rango		3,680	3,680
Mínimo		2,800	2,800
Máximo		6,470	6,470
Percentiles	25	3,828	3,832
	50	4,583	4,738
	75	5,155	5,234

Diagrama de Cajas "*Variable* X_4"



Elaborado por: G. Cuenca

Método de Imputación por la Media y Regresión

La matriz de datos resultante con dos valores completados por imputación por la media en la variable X_1 y uno en X_4, se muestra en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5, 1)

Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	**5.118**	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
5.196	4.941	4.649	4.626	4.927
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
6.624	6.692	4.008	5.056	6.489
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.406	3.991	4.258	**4.641**	5.663
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
5.196	3.126	4.440	4.539	4.405
6.290	5.428	5.444	4.738	4.850
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

Por otro lado, matriz de datos resultante con dos valores completados por imputación por regresión en la variable X_1 y uno en X_4, se puede ver en la Tabla 4.9.

Tabla 4.9

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Normal (5, 1)

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
4.813	3.396	5.569	3.812	5.806
5.726	5.257	4.744	2.798	5.232
4.412	3.944	4.623	5.986	4.010
7.183	6.415	4.704	4.481	6.340
4.864	4.195	3.525	5.327	5.290
5.114	5.529	4.766	5.234	6.479
6.067	5.219	**5.118**	5.022	6.138
5.059	4.078	5.315	3.996	4.316
4.904	2.829	6.444	4.053	3.708
3.543	4.941	4.649	4.626	4.927
5.294	3.989	5.623	3.814	4.669
3.664	5.615	5.799	3.944	4.156
5.714	5.508	5.941	6.473	5.498
6.624	6.692	4.008	5.056	6.489
4.308	5.591	5.212	3.783	4.454
5.858	4.356	5.238	4.959	4.153
6.254	5.380	3.992	3.872	4.754
3.406	3.991	4.258	**3.872**	5.663
3.559	4.981	6.082	4.739	4.146
5.571	4.952	4.869	5.954	3.799
4.600	5.000	5.390	5.129	4.880
5.690	4.682	5.088	5.657	4.935
5.816	6.095	4.365	3.832	5.485
5.238	3.126	4.440	4.539	4.405
6.290	5.428	5.444	4.738	4.850
5.669	5.896	4.050	3.787	4.565
6.191	5.731	5.781	3.681	4.921
3.798	5.578	5.569	5.931	6.535
4.980	5.040	4.178	5.011	4.394
4.843	5.677	4.734	4.355	3.653

Elaborado por: G. Cuenca

En la Tabla 4.10 se realiza una comparación entre el valor real y el valor con imputación por la media y regresión. La diferencia en valor absoluto

entre el dato observado de cada variable es menor en el Método de Imputación por Regresión, es decir los datos estimados por medio de la imputación por regresión, están más cercanos a los verdaderos valores, que los de la imputación por la media.

Tabla 4.10

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Imputación por Media y Regresión en dos valores de la variable X_1

Dato Observado	Resultado de Imputación por la Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción|
4.168	5.196	1.028	3.543	0.625
5.712	5.196	0.516	5.238	0.474

Imputación por Media y Regresión en un valor de la variable X_4

Dato Observado	Resultado de Imputación por la Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción|
3.651	4.641	0.990	3.872	0.221

Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.10, se pueden observar los resultados de realizar la imputación por medio de la media y regresión en la variable X_1:

CUADRO 4.10

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Método de Imputación por la Media y Regresión

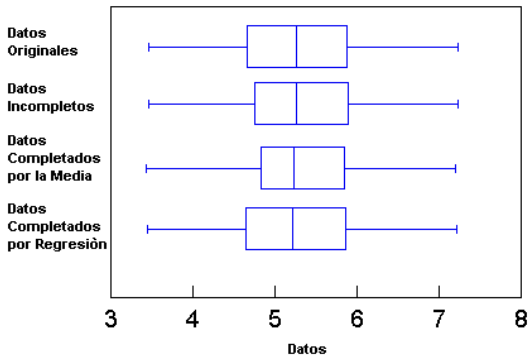
Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_1" y "*Variable* X_4"

Estimadores "*Variable* X_1"

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		30	28	30	30
Media		5,205	5,224	5,224	5,168
Mediana		5,205	5,204	5,196	5,176
Moda		3,410	3,410	5,200	3,410
Varianza		0,891	0,908	0,845	0,939
Desviación Estándar		0,944	0,953	0,919	0,969
Error Estándar		0,172	0,180	0,168	0,177
Coeficiente de Asimetría		-0,161	-0,188	-0,188	-0,174
Curtosis		-0,460	-0,392	-0,196	-0,479
Rango		3,780	3,780	3,780	3,780
Mínimo		3,410	3,410	3,410	3,410
Máximo		7,180	7,180	7,180	7,180
Percentiles	25	4,553	4,653	4,760	4,553
	50	5,204	5,204	5,196	5,176
	75	5,827	5,848	5,827	5,827

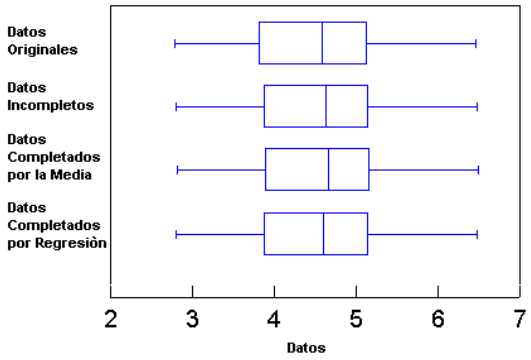
Diagrama de Cajas "*Variable* X_1"



Estimadores "*Variable* X_4"

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		30	29	30	30
Media		4,608	4,641	4,641	4,615
Mediana		4,583	4,626	4,634	4,583
Moda		2,800	2,800	2,800	3,870
Varianza		0,756	0,750	0,724	0,743
Desviación Estándar		0,870	0,866	0,851	0,862
Error Estándar		0,159	0,161	0,155	0,157
Coeficiente de Asimetría		0,266	0,209	0,213	0,274
Curtosis		-0,447	-0,393	-0,297	-0,398
Rango		3,680	3,680	3,680	3,680
Mínimo		2,800	2,800	2,800	2,800
Máximo		6,470	6,470	6,470	6,470
Percentiles	25	3,828	3,852	3,862	3,862
	50	4,583	4,626	4,634	4,583
	75	5,155	5,182	5,155	5,155

Diagrama de Cajas "*Variable* X_4"



Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias con dos datos completados por la media en X_1 y uno en X_4 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.224 \\ 4.970 \\ 4.984 \\ 4.641 \\ 4.955 \end{pmatrix}$$

El vector de medias con dos datos completados por regresión en X_1 y uno en X_4 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.168 \\ 4.970 \\ 4.984 \\ 4.615 \\ 4.955 \end{pmatrix}$$

El efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas* y *matriz de correlaciones*, el completar 2% de datos faltantes en una matriz de tamaño 30, por medio de la imputación por media y regresión, se presenta en el Cuadro 4.11.

CUADRO 4.11

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Normal (5,1)

Método de Imputación por la Media y Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.891				
X_2	0.299	0.891			
X_3	-0.152	-0.138	0.502		
X_4	-0.010	0.034	0.014	0.756	
X_5	0.197	0.315	-0.123	0.090	0.740

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.335	1.000			
X_3	-0.227	-0.206	1.000		
X_4	-0.012	0.042	0.023	1.000	
X_5	0.242	**0.388**	-0.202	0.120	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 10% Datos Completados por Media en "*Variable* X_1" y "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	**0.845**				
X_2	**0.330**	0.891			
X_3	**-0.154**	-0.138	0.502		
X_4	**-0.070**	**0.001**	**-0.011**	**0.724**	
X_5	**0.205**	0.315	-0.123	**0.114**	0.740

Matriz de Correlaciones 10% Datos Completados por Media en "*Variable* X_1" y "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.381	1.000			
X_3	-0.236	-0.206	1.000		
X_4	-0.089	0.001	-0.018	1.000	
X_5	0.260	0.388	-0.202	0.156	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 10% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_1" y "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	**0.939**				
X_2	**0.329**	0.891			
X_3	**-0.136**	-0.138	0.502		
X_4	**-0.022**	**0.027**	**0.009**	**0.743**	
X_5	**0.206**	0.315	-0.123	**0.095**	0.740

Matriz de Correlaciones 10% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_1" y "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.360	1.000			
X_3	-0.197	-0.206	1.000		
X_4	-0.027	0.033	0.014	1.000	
X_5	0.247	0.388	-0.202	0.128	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

4.2.3 Distribución Poisson: *Ocho datos faltantes* en una sola variable (5% de la matriz), tamaño de muestra n=30

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de cinco poblaciones todas ellas Poisson, independientes e idénticamente distribuìdas, con parámetro $\lambda = 6$, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{30\mathrm{x}5}$, *i= 1,2,....30* y *j= 1,2,3,4,5* y se supone que tiene el 5% de datos faltantes, es decir ocho datos, los que

recayeron en la variable X_5 y son: el $X_{3,5}$=6, $X_{7,5}$=3, $X_{10,5}$=3, $X_{14,5}$=4, $X_{18,5}$=5, $X_{21,5}$=5, $X_{25,5}$=9 y el $X_{28,5}$=7.

Nótese que el 5% de datos faltantes en la matriz, constituye 27% de datos faltantes en la columna que corresponde a X_5. (Ver Tabla 4.11)

Los resultados obtenidos para este caso se presentan desde la Tabla 4.11 hasta el Cuadro 4.16

Tabla 4.11

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Tamaño de muestra n=30

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
3	10	8	4	2
3	6	7	8	5
6	8	3	10	**6**
6	4	7	10	8
11	5	7	2	4
4	6	9	5	3
9	5	7	6	**3**
3	8	9	6	5
5	2	10	6	8
9	7	4	7	**3**
8	4	7	10	4
3	9	2	8	2
6	9	6	4	4
5	10	6	3	**4**
7	5	6	11	7
5	8	3	5	3
8	11	6	7	8
9	12	7	2	**5**
6	4	8	6	12
5	12	7	9	8
3	2	8	9	**5**
8	9	4	3	10
8	10	4	6	7
4	4	6	7	8
3	8	5	0	**9**
5	9	4	7	11
5	7	8	5	4
4	4	5	2	**7**
8	0	7	6	5
5	8	7	4	9

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.800 \\ 6.867 \\ 6.233 \\ 5.933 \\ 5.967 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminación por Filas

Puesto que los datos faltantes recayeron en la variable X_5 y son: el $X_{3,5}$=6, $X_{7,5}$=3, $X_{10,5}$=3, $X_{14,5}$=4, $X_{18,5}$=5, $X_{25,5}$=9 y el $X_{28,5}$=7, se procede a prescindir de las filas que tienen estos valores “faltantes”, donde la matriz de datos resultante con filas eliminadas se muestra en la Tabla 4.12.

Tabla 4.12

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de datos con ocho filas eliminadas

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
3	10	8	4	2
3	6	7	8	5
6	4	7	10	8
11	5	7	2	4
4	6	9	5	3
3	8	9	6	5
5	2	10	6	8
8	4	7	10	4
3	9	2	8	2
6	9	6	4	4
7	5	6	11	7
5	8	3	5	3
8	11	6	7	8
6	4	8	6	12
5	12	7	9	8
8	9	4	3	10
8	10	4	6	7
4	4	6	7	8
5	9	4	7	11
5	7	8	5	4
8	0	7	6	5
5	8	7	4	9

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias para las veinte y dos filas restantes es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.727 \\ 6.818 \\ 6.455 \\ 6.318 \\ 6.227 \end{pmatrix}$$

Como era de esperarse el vector de medias de los datos originales y de los datos con filas eliminadas no coinciden.

Ahora analicemos el efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas*, y *matriz de correlaciones*, la eliminación de ocho filas, con un tamaño de muestra *n*=30.(Ver Cuadro 4.12)

CUADRO 4.12

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=30 y 2% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.993				
X_2	-0.062	9.361			
X_3	-0.469	-2.140	3.771		
X_4	-0.221	-2.009	-0.156	7.582	
X_5	-0.110	-0.246	-0.061	0.067	7.275

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.009	1.000			
X_3	-0.108	-0.360	1.000		
X_4	-0.036	-0.238	-0.029	1.000	
X_5	-0.018	-0.030	-0.012	0.009	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas (8 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.494				
X_2	-1.242	9.394			
X_3	-0.537	-2.532	4.069		
X_4	-0.719	-1.082	-0.294	5.465	
X_5	1.208	-0.290	-0.013	0.877	8.374

Matriz de Correlaciones (8 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.191	1.000			
X_3	-0.126	-0.410	1.000		
X_4	-0.145	-0.151	-0.062	1.000	
X_5	0.197	-0.033	-0.002	0.130	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

CUADRO 4.13

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Eliminación por Filas

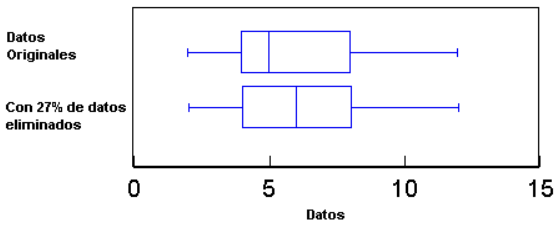
Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_5"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Con el 27% de datos eliminadas en X_5
n		30	22
Media		5,967	6,227
Mediana		5,000	6,000
Moda		4,000	8,000
Varianza		7,275	8,374
Desviación Estándar		2,697	2,894
Error Estándar		0,492	0,617
Coeficiente de Asimetría		0,456	0,296
Curtosis		-0,633	-0,858
Rango		10,000	10,000
Mínimo		2,000	2,000
Máximo		12,000	12,000
Percentiles	25	4,000	4,000
	50	5,000	6,000

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

Método de Imputación por la Media y Regresión

A continuación se aplica el método de imputación por media y regresión a la misma matriz de datos utilizada en el método de eliminación por filas, es decir se completan datos en la variable X_5 que presenta ocho valores faltantes que son: $X_{3,5}$=6, $X_{7,5}$=3, $X_{10,5}$=3, $X_{14,5}$=4, $X_{18,5}$=5, $X_{25,5}$=9 y el $X_{28,5}$=7. La matriz de datos resultante con ocho valores completados por imputación por la media en la variable X_5 se muestra en la Tabla 4.13.

Tabla 4.13

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
3	10	8	4	2
3	6	7	8	5
6	8	3	10	**6.227**
6	4	7	10	8
11	5	7	2	4
4	6	9	5	3
9	5	7	6	**6.227**
3	8	9	6	5
5	2	10	6	8
9	7	4	7	**6.227**
8	4	7	10	4
3	9	2	8	2
6	9	6	4	4
5	10	6	3	**6.227**
7	5	6	11	7
5	8	3	5	3
8	11	6	7	8
9	12	7	2	**6.227**
6	4	8	6	12
5	12	7	9	8
3	2	8	9	**6.227**
8	9	4	3	10
8	10	4	6	7
4	4	6	7	8
3	8	5	0	**6.227**
5	9	4	7	11
5	7	8	5	4
4	4	5	2	**6.227**
8	0	7	6	5
5	8	7	4	9

Elaborado por: G. Cuenca

Mientras que la matriz de datos resultante, con ocho valores completados por imputación utilizando regresión en la variable X_5 se puede ver en la Tabla 4.14.

Tabla 4.14

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes que provienen de una distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
3	10	8	4	2
3	6	7	8	5
6	8	3	10	**6.287**
6	4	7	10	8
11	5	7	2	4
4	6	9	5	3
9	5	7	6	**5.110**
3	8	9	6	5
5	2	10	6	8
9	7	4	7	**3.420**
8	4	7	10	4
3	9	2	8	2
6	9	6	4	4
5	10	6	3	**4.310**
7	5	6	11	7
5	8	3	5	3
8	11	6	7	8
9	12	7	2	**6.005**
6	4	8	6	12
5	12	7	9	8
3	2	8	9	**5.106**
8	9	4	3	10
8	10	4	6	7
4	4	6	7	8
3	8	5	0	**8.873**
5	9	4	7	11
5	7	8	5	4
4	4	5	2	**5.517**
8	0	7	6	5
5	8	7	4	9

Elaborado por: G. Cuenca

En la Tabla 4.15 se realiza una comparación entre el dato observado y el dato con imputación por la media y regresión.

Tabla 4.15

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

27% de datos completados en X_1 por la Media

Dato Observado	Resultado de Imputación por Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|
6	6.227	0.227
3	6.227	3.227
3	6.227	3.227
4	6.227	2.227
5	6.227	1.227
5	6.227	1.227
9	6.227	2.773
7	6.227	0.773

27% de datos completados en X_1 por Regresión

Dato Observado	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción
6	6.287	0.287
3	5.110	2.110
3	3.420	0.420
4	4.310	0.310
5	6.005	1.005
5	5.106	0.106
9	8.873	0.127
7	5.517	1.483

Elaborado por: G. Cuenca

Por medio del Cuadro 4.14, podemos apreciar el número de imputaciones sucesivas por medio del Método de Regresión que se realiza a los ocho datos faltantes en la variable $X_{5.}$

CUADRO 4.14

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{3,5}$=6

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	6.878	0.878
2	6.754	0.754
3	6.632	0.632
4	6.576	0.576
5	6.471	0.471
6	6.323	0.323
7	6.287	0.287

Imputaciones sucesivas para $X_{7,5}$=3

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	6.119	3.119
2	6.032	3.032
3	5.971	2.971
4	5.862	2.862
5	5.531	2.531
6	5.204	2.204
7	5.110	2.110

Imputaciones sucesivas para $X_{10,5}$=3

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	5.429	2.429
2	5.210	2.210
3	4.973	1.973
4	4.415	1.415
5	4.206	1.206
6	3.843	0.843
7	3.420	0.420

Imputaciones sucesivas para $X_{14,5}$=4

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	5.184	1.184
2	5.003	1.003
3	4.852	0.852
4	4.725	0.725
5	4.612	0.612
6	4.561	0.561
7	4.310	0.310

Elaborado por: G. Cuenca

Continúa…

Viene…

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{18,5}$=5

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	6.751	1.751
2	6.623	1.623
3	6.541	1.541
4	6.432	1.432
5	6.317	1.317
6	6.210	1.210
7	6.005	1.005

Imputaciones sucesivas para $X_{21,5}$=5

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	5.749	0.749
2	5.663	0.663
3	5.549	0.549
4	5.432	0.432
5	5.316	0.316
6	5.257	0.257
7	5.106	0.106

Imputaciones sucesivas para $X_{25,5}$=9

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	8.215	0.785
2	8.351	0.649
3	8.532	0.468
4	8.673	0.327
5	8.725	0.275
6	8.801	0.199
7	8.873	0.127

Imputaciones sucesivas para $X_{28,5}$=7

Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	4.364	2.636
2	4.713	2.287
3	4.846	2.154
4	5.112	1.888
5	5.235	1.765
6	5.418	1.582
7	5.517	1.483

Elaborado por: G. Cuenca

CUADRO 4.15

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Imputación por la Media y Regresión

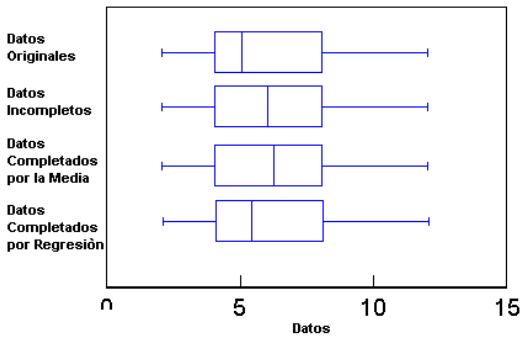
Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_5"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		30	22	30	30
Media		5,966	6,227	6,227	6,054
Mediana		5,000	6,000	6,227	5,314
Moda		4,000	8,000	6,230	8,000
Varianza		7,275	8,375	6,064	6,779
Desviación Estándar		2,697	2,894	2,462	2,604
Error Estándar		0,492	0,617	0,450	0,475
Coeficiente de Asimetría		0,456	0,296	0,339	0,471
Curtosis		-0,633	-0,858	0,010	-0,429
Rango		10,000	10,000	10,000	10,000
Mínimo		2,000	2,000	2,000	2,000
Máximo		12,000	12,000	12,000	12,000
Percentiles	25	4,000	4,000	4,000	4,000
	50	5,000	6,000	6,227	5,314

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias con ocho "datos completados" por la media en X_5 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.800 \\ 6.867 \\ 6.233 \\ 5.933 \\ 6.227 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector de medias con ocho "datos completados" utilizando regresión en X_5 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.800 \\ 6.867 \\ 6.233 \\ 5.933 \\ 6.054 \end{pmatrix}$$

CUADRO 4.16

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias independientes con distribución Poisson $\lambda = 6$

Método de Imputación por la Media y Regresión
Tamaño de muestra n=30 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.993				
X_2	-0.062	9.361			
X_3	-0.469	-2.140	3.771		
X_4	-0.221	-2.009	-0.156	7.582	
X_5	-0.110	-0.246	-0.061	0.067	7.275

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.009	1.000			
X_3	-0.108	-0.360	1.000		
X_4	-0.036	-0.238	-0.029	1.000	
X_5	-0.018	-0.030	-0.012	0.009	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 27% Datos Completados por Media en "*Variable* X_5"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.993				
X_2	-0.062	9.361			
X_3	-0.469	-2.140	3.771		
X_4	-0.221	-2.009	-0.156	7.582	
X_5	0.875	-0.210	-0.009	0.635	6.064

Matriz de Correlaciones 27% Datos Completados por Media en "*Variable* X_5"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.009	1.000			
X_3	-0.108	-0.360	1.000		
X_4	-0.036	-0.238	-0.029	1.000	
X_5	0.159	-0.028	-0.002	0.094	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 27% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_5"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.993				
X_2	-0.062	9.361			
X_3	-0.469	-2.140	3.771		
X_4	-0.221	-2.009	-0.156	7.582	
X_5	0.367	-0.033	0.030	0.198	6.779

Matriz de Correlaciones 27% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_5"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.009	1.000			
X_3	-0.108	-0.360	1.000		
X_4	-0.036	-0.238	-0.029	1.000	
X_5	0.063	-0.004	0.006	0.028	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

4.2.4 Distribución Exponencial: *Trece datos faltantes* en una sola variable (5% de la matriz), tamaño de muestra n=50

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de cinco poblaciones todas ellas Exponencial, independientes e idénticamente distribuìdas, con parámetro $\beta = 2$, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{50\mathrm{x}5}$, *i= 1,2,....50* y *j= 1,2,3,4,5* y se supone que tiene el 5% de datos faltantes, es decir trece datos, los que recayeron en la variable X_2 y son: el $X_{3,2}$=0.335, $X_{6,2}$=2.326, $X_{10,2}$=0.158, $X_{13,2}$=2.019, $X_{18,2}$=1.525, $X_{25,2}$=0.169, $X_{28,2}$=0.606, $X_{31,2}$=4.334, $X_{33,2}$=0.950, $X_{33,2}$=0.950, $X_{37,2}$=4.403, $X_{41,2}$=0.775, $X_{46,2}$=0.337 y $X_{49,2}$=2.209.

Nótese que el 5% de datos faltantes en la matriz, constituye 26% de datos faltantes en la columna que corresponde a X_2.(Ver Tabla 4.16).

Los resultados correspondientes a este caso se presentan desde la Tabla 4.16 hasta el Cuadro 4.19.

Tabla 4.16

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Tamaño de muestra n=50

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0.308	5.836	3.978	0.967	3.134
0.399	4.329	0.284	1.314	0.790
2.807	**0.335**	2.222	2.019	2.838
0.216	3.516	1.435	0.514	0.656
1.008	6.595	1.681	0.377	1.833
3.936	**2.326**	2.690	2.289	1.863
3.649	0.404	0.034	1.035	1.776
0.249	2.899	0.070	0.492	3.798
0.043	1.064	0.106	6.787	0.260
1.017	**0.158**	1.589	0.309	7.656
2.033	2.217	2.207	0.764	0.158
2.927	3.164	9.718	0.442	0.916
1.598	**2.019**	3.594	0.172	5.409
0.883	0.049	0.377	1.893	0.916
2.811	0.666	0.882	1.502	0.565
1.519	0.882	2.265	4.860	0.524
1.397	0.490	7.271	0.156	0.426
5.182	**1.525**	2.069	0.776	1.220
0.532	2.920	0.592	0.889	1.447
6.186	2.292	2.417	0.008	1.636
3.602	0.475	3.416	1.388	0.935
0.504	0.910	1.758	1.688	5.108
3.137	0.832	0.285	0.375	1.217
2.758	1.241	0.940	4.296	3.130
1.850	**0.169**	5.794	1.026	2.619
1.465	0.496	1.812	3.017	2.464
1.350	2.237	2.395	1.839	0.392
0.941	**0.606**	3.764	2.400	1.776
0.938	1.652	2.348	0.913	1.281
0.018	1.049	11.453	0.113	0.166
2.048	**4.334**	1.654	10.276	1.940
2.575	2.284	0.782	0.405	0.896
0.777	**0.950**	0.390	0.740	3.500
1.352	0.223	0.560	0.038	0.482
2.569	0.074	3.632	5.326	2.012
1.094	7.818	1.188	6.204	0.505
0.390	**4.403**	1.288	0.602	2.145
0.121	1.818	0.168	0.399	0.512
1.622	4.662	1.633	2.688	3.823
1.720	2.455	6.211	0.702	3.818
0.008	**0.775**	0.072	2.432	0.896
0.975	0.041	8.616	4.995	4.742
0.115	1.835	1.188	0.266	0.148
0.184	0.395	0.136	5.116	1.447
0.409	4.056	0.214	0.600	3.625
0.743	**0.337**	0.963	4.158	2.572
2.351	2.916	0.714	1.625	4.066
1.166	5.402	0.126	1.047	7.526
0.903	**2.209**	1.588	0.904	2.928
0.525	1.106	3.467	1.260	0.336

El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.538 \\ 2.029 \\ 2.281 \\ 1.889 \\ 2.097 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminación por Filas

Puesto que los datos faltantes recayeron en la variable X_2 y son: el $X_{3,2}$=0.335, $X_{6,2}$=2.326, $X_{10,2}$=0.158, $X_{13,2}$=2.019, $X_{18,2}$=1.525, $X_{25,2}$=0.169, $X_{28,2}$=0.606, $X_{31,2}$=4.334, $X_{33,2}$=0.950, $X_{33,2}$=0.950, $X_{37,2}$=4.403, $X_{41,2}$=0.775, $X_{46,2}$=0.337 y $X_{49,2}$=2.209, se procede a prescindir de las filas que tienen estos valores “faltantes”, donde la matriz de datos resultante con filas eliminadas se muestra en la Tabla 4.17.

Tabla 4.17

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de datos con trece filas eliminadas

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0.308	5.836	3.978	0.967	3.134
0.399	4.329	0.284	1.314	0.790
0.216	3.516	1.435	0.514	0.656
1.008	6.595	1.681	0.377	1.833
3.649	0.404	0.034	1.035	1.776
0.249	2.899	0.070	0.492	3.798
0.043	1.064	0.106	6.787	0.260
2.033	2.217	2.207	0.764	0.158
2.927	3.164	9.718	0.442	0.916
0.883	0.049	0.377	1.893	0.916
2.811	0.666	0.882	1.502	0.565
1.519	0.882	2.265	4.860	0.524
1.397	0.490	7.271	0.156	0.426
0.532	2.920	0.592	0.889	1.447
6.186	2.292	2.417	0.008	1.636
3.602	0.475	3.416	1.388	0.935
0.504	0.910	1.758	1.688	5.108
3.137	0.832	0.285	0.375	1.217
2.758	1.241	0.940	4.296	3.130
1.465	0.496	1.812	3.017	2.464
1.350	2.237	2.395	1.839	0.392
0.938	1.652	2.348	0.913	1.281
0.018	1.049	11.453	0.113	0.166
2.575	2.284	0.782	0.405	0.896
1.352	0.223	0.560	0.038	0.482
2.569	0.074	3.632	5.326	2.012
1.094	7.818	1.188	6.204	0.505
0.121	1.818	0.168	0.399	0.512
1.622	4.662	1.633	2.688	3.823
1.720	2.455	6.211	0.702	3.818
0.975	0.041	8.616	4.995	4.742
0.115	1.835	1.188	0.266	0.148
0.184	0.395	0.136	5.116	1.447
0.409	4.056	0.214	0.600	3.625
2.351	2.916	0.714	1.625	4.066
1.166	5.402	0.126	1.047	7.526
0.525	1.106	3.467	1.260	0.336

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias para las treinta y siete filas restantes es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.479 \\ 2.197 \\ 2.334 \\ 1.792 \\ 1.823 \end{pmatrix}$$

El efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas*, y *matriz de correlaciones*, la eliminación de trece filas, con un tamaño de muestra *n*=50, se puede ver en el Cuadro 4.17.

CUADRO 4.17

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.852				
X_2	-0.355	3.437			
X_3	0.249	-0.651	6.516		
X_4	-0.164	0.072	-0.517	4.472	
X_5	-0.124	0.309	-0.189	-0.225	3.241

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.141	1.000			
X_3	0.072	-0.138	1.000		
X_4	-0.057	0.018	-0.096	1.000	
X_5	-0.050	0.092	-0.041	-0.059	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas (13 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.769				
X_2	-0.484	3.850			
X_3	0.123	-0.786	8.060		
X_4	-0.279	-0.361	-0.466	3.644	
X_5	-0.034	0.821	-0.264	0.152	3.002

Matriz de Correlaciones (13 Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.186	1.000			
X_3	0.033	-0.141	1.000		
X_4	-0.110	-0.096	-0.086	1.000	
X_5	-0.015	0.242	-0.054	0.046	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

Método de Imputación por la Media y Regresión

La matriz de datos resultante con trece valores completados por imputación por la media y regresión en la variable X_2 se muestra en la Tabla 4.18 y 4.19 respectivamente.

Tabla 4.18

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0,308	5,836	3,978	0,967	3,134
0,399	4,329	0,284	1,314	0,790
2,807	**2.197**	2,222	2,019	2,838
0,216	3,516	1,435	0,514	0,656
1,008	6,595	1,681	0,377	1,833
3,936	**2.197**	2,690	2,289	1,863
3,649	0,404	0,034	1,035	1,776
0,249	2,899	0,070	0,492	3,798
0,043	1,064	0,106	6,787	0,260
1,017	**2.197**	1,589	0,309	7,656
2,033	2,217	2,207	0,764	0,158
2,927	3,164	9,718	0,442	0,916
1,598	**2.197**	3,594	0,172	5,409
0,883	0,049	0,377	1,893	0,916
2,811	0,666	0,882	1,502	0,565
1,519	0,882	2,265	4,860	0,524
1,397	0,490	7,271	0,156	0,426
5,182	**2.197**	2,069	0,776	1,220
0,532	2,920	0,592	0,889	1,447
6,186	2,292	2,417	0,008	1,636
3,602	0,475	3,416	1,388	0,935
0,504	0,910	1,758	1,688	5,108
3,137	0,832	0,285	0,375	1,217
2,758	1,241	0,940	4,296	3,130
1,850	**2.197**	5,794	1,026	2,619
1,465	0,496	1,812	3,017	2,464
1,350	2,237	2,395	1,839	0,392
0,941	**2.197**	3,764	2,400	1,776
0,938	1,652	2,348	0,913	1,281
0,018	1,049	11,453	0,113	0,166
2,048	2.197	1,654	10,276	1,940
2,575	2,284	0,782	0,405	0,896
0,777	**2.197**	0,390	0,740	3,500
1,352	0,223	0,560	0,038	0,482
2,569	0,074	3,632	5,326	2,012
1,094	7,818	1,188	6,204	0,505
0,390	**2.197**	1,288	0,602	2,145
0,121	1,818	0,168	0,399	0,512
1,622	4,662	1,633	2,688	3,823
1,720	2,455	6,211	0,702	3,818
0,008	**2.197**	0,072	2,432	0,896
0,975	0,041	8,616	4,995	4,742
0,115	1,835	1,188	0,266	0,148
0,184	0,395	0,136	5,116	1,447
0,409	4,056	0,214	0,600	3,625
0,743	**2.197**	0,963	4,158	2,572
2,351	2,916	0,714	1,625	4,066
1,166	5,402	0,126	1,047	7,526
0,903	**2,197**	1,588	0,904	2,928
0,525	1,106	3,467	1,260	0,336

Tabla 4.19

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0.308	5.836	3.978	0.967	3.134
0.399	4.329	0.284	1.314	0.790
2.807	**2.070**	2.222	2.019	2.838
0.216	3.516	1.435	0.514	0.656
1.008	6.595	1.681	0.377	1.833
3.936	**1.403**	2.690	2.289	1.863
3.649	0.404	0.034	1.035	1.776
0.249	2.899	0.070	0.492	3.798
0.043	1.064	0.106	6.787	0.260
1.017	**3.682**	1.589	0.309	7.656
2.033	2.217	2.207	0.764	0.158
2.927	3.164	9.718	0.442	0.916
1.598	**3.246**	3.594	0.172	5.409
0.883	0.049	0.377	1.893	0.916
2.811	0.666	0.882	1.502	0.565
1.519	0.882	2.265	4.860	0.524
1.397	0.490	7.271	0.156	0.426
5.182	**1.151**	2.069	0.776	1.220
0.532	2.920	0.592	0.889	1.447
6.186	2.292	2.417	0.008	1.636
3.602	0.475	3.416	1.388	0.935
0.504	0.910	1.758	1.688	5.108
3.137	0.832	0.285	0.375	1.217
2.758	1.241	0.940	4.296	3.130
1.850	**1.978**	5.794	1.026	2.619
1.465	0.496	1.812	3.017	2.464
1.350	2.237	2.395	1.839	0.392
0.941	**2.117**	3.764	2.400	1.776
0.938	1.652	2.348	0.913	1.281
0.018	1.049	11.453	0.113	0.166
2.048	**0.907**	1.654	10.276	1.940
2.575	2.284	0.782	0.405	0.896
0.777	**3.181**	0.390	0.740	3.500
1.352	0.223	0.560	0.038	0.482
2.569	0.074	3.632	5.326	2.012
1.094	7.818	1.188	6.204	0.505
0.390	**3.011**	1.288	0.602	2.145
0.121	1.818	0.168	0.399	0.512
1.622	4.662	1.633	2.688	3.823
1.720	2.455	6.211	0.702	3.818
0.008	**2.484**	0.072	2.432	0.896
0.975	0.041	8.616	4.995	4.742
0.115	1.835	1.188	0.266	0.148
0.184	0.395	0.136	5.116	1.447
0.409	4.056	0.214	0.600	3.625
0.743	**2.395**	0.963	4.158	2.572
2.351	2.916	0.714	1.625	4.066
1.166	5.402	0.126	1.047	7.526
0.903	**2.891**	1.588	0.904	2.928
0.525	1.106	3.467	1.260	0.336

En la Tabla 4.20 se realiza una comparación entre el dato observado y el dato con imputación por la media y regresión.

Tabla 4.20

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

26% de datos completados en X_2 ***por la Media***

Dato Observado	Resultado de Imputación por Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|
0.335	2.197	1.862
2.326	2.197	0.129
0.158	2.197	2.039
2.019	2.197	0.178
1.525	2.197	0.672
0.169	2.197	2.028
0.606	2.197	1.591
4.334	2.197	2.137
0.950	2.197	1.247
4.403	2.197	2.206
0.775	2.197	1.422
0.337	2.197	1.860
2.090	2.197	0.107

26% de datos completados en X_2 ***por Regresión***

Dato Observado	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción
0,335	2,070	1,735
2,326	1,403	0,923
0,158	3,682	3,524
2,019	3,246	1,227
1,525	1,151	0,374
0,169	1,978	1,809
0,606	2,117	1,511
4,334	0,907	3,427
0,950	3,181	2,231
4,403	3,011	1,392
0,775	2,484	1,709
0,337	2,395	2,058
2,090	2,891	0,801

Elaborado por: G. Cuenca

CUADRO 4.18

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Método de Imputación por la Media y Regresión

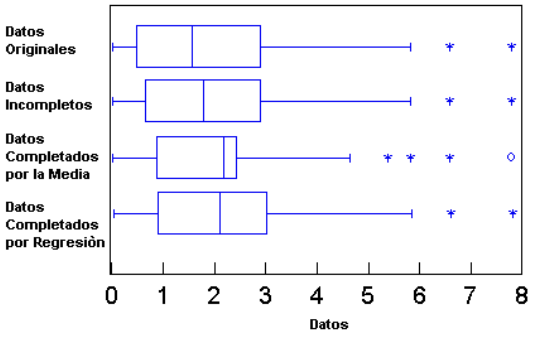
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_2"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		50	37	50	50
Media		2,029	2,197	2,197	2,236
Mediana		1,589	1,818	2,197	2,094
Moda		0,040	0,040	2,200	0,040
Varianza		3,437	3,850	2,828	3,011
Desviación Estándar		1,854	1,962	1,682	1,735
Error Estándar		0,262	0,323	0,238	0,245
Coeficiente de Asimetría		1,222	1,164	1,338	1,158
Curtosis		1,115	0,879	2,207	1,487
Rango		7,780	7,780	7,780	7,780
Mínimo		0,040	0,040	0,040	0,040
Máximo		7,820	7,820	7,820	7,820
Percentiles	25	0,495	0,581	0,903	0,901
	50	1,589	1,818	2,197	2,094
	75	2,917	3,042	2,566	3,049

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias con trece datos completados por la media en X_2 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.538 \\ 2.197 \\ 2.281 \\ 1.889 \\ 2.097 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector de medias con trece datos completados por la regresión en X_2 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.538 \\ 2.236 \\ 2.281 \\ 1.889 \\ 2.097 \end{pmatrix}$$

El efecto que causa en la *matriz de varianzas* y *covarianzas* y *matriz de correlaciones*, el completar 5% de datos faltantes en una matriz de tamaño 50, por medio de la imputación por media y regresión, se presenta en el Cuadro 4.19.

CUADRO 4.19

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias independientes con distribución Exponencial $\beta = 2$

Método de Imputación por la Media y Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.852				
X_2	-0.355	3.437			
X_3	0.249	-0.651	6.516		
X_4	-0.164	0.072	-0.517	4.472	
X_5	-0.124	0.309	-0.189	-0.225	3.241

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.141	1.000			
X_3	0.072	-0.138	1.000		
X_4	-0.057	0.018	-0.096	1.000	
X_5	-0.050	0.092	-0.041	-0.059	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 26% Datos Completados por Media en "*Variable* X_2"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.852				
X_2	-0.356	2.828			
X_3	0.249	-0.578	6.516		
X_4	-0.164	-0.265	-0.517	4.472	
X_5	-0.124	0.603	-0.189	-0.225	3.241

Matriz de Correlaciones 26% Datos Completados por Media en "*Variable* X_2"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.155	1.000			
X_3	0.072	-0.135	1.000		
X_4	-0.057	-0.075	-0.096	1.000	
X_5	-0.050	0.199	-0.041	-0.059	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 26% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_2"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.852				
X_2	-0.560	3.011			
X_3	0.249	-0.657	6.516		
X_4	-0.164	-0.597	-0.517	4.472	
X_5	-0.124	0.901	-0.189	-0.225	3.241

Matriz de Correlaciones 26% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_2"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	-0.237	1.000			
X_3	0.072	-0.148	1.000		
X_4	-0.057	-0.163	-0.096	1.000	
X_5	-0.050	0.289	-0.041	-0.059	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

4.3 Matrices de Datos con variables aleatorias dependientes

En esta sección se realiza la comparación de los Métodos de Imputación, utilizando matrices de datos con variables aleatorias dependientes, con las distribuciones Normal, Poisson y Exponencial.

4.3.1 Distribución Normal: *Trece datos faltantes* en una sola variable (5% de la matriz), tamaño de muestra n=50

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de cinco poblaciones todas ellas Normal, dependientes e idénticamente distribuidas, con parámetros μ=10 y σ^2=1, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{50x5}$, *i= 1,2,....50* y *j= 1,2,3,4,5* y se supone que tiene el 5% de datos faltantes, es decir trece datos, los que recayeron en la variable X_3 y son: el $X_{2,3}$=9.010, $X_{5,3}$=11.221, $X_{6,3}$=10.102, $X_{9,3}$=9.927, $X_{11,3}$=10.718, $X_{17,3}$=11.504, $X_{21,3}$=12.263, $X_{23,3}$=10.329, $X_{29,3}$=10.655, $X_{32,3}$=9.547, $X_{37,3}$=9.509, $X_{41,3}$=9.189 y el $X_{46,3}$=9.549 . Nótese que el 5% de datos faltantes en la matriz, constituye 26% de datos faltantes en la columna que corresponde a X_3.(Ver Tabla 4.21)

Tabla 4.21

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10, 1)

Tamaño de muestra n=50

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
10.795	10.399	10.777	10.610	11.217
9.866	9.975	**9.010**	9.863	10.929
7.841	7.267	8.513	8.214	8.712
11.869	10.340	11.380	10.312	11.007
10.350	12.547	**11.221**	10.324	10.532
9.299	10.392	**10.102**	10.320	9.449
10.534	9.264	10.164	9.067	9.447
10.325	11.979	11.486	10.526	11.554
10.288	10.920	**9.927**	9.554	11.840
9.232	9.984	10.538	9.633	9.045
11.463	10.285	**10.718**	9.156	9.243
9.427	10.861	9.573	9.717	8.939
10.678	9.843	10.905	10.302	9.628
9.580	9.948	9.478	10.324	9.885
9.714	9.214	9.334	10.042	9.996
8.282	8.433	9.356	9.677	8.955
11.562	10.166	**11.504**	10.953	10.491
9.588	10.713	10.476	11.278	11.123
9.649	10.292	9.565	10.365	9.811
10.100	10.191	9.732	10.977	9.444
12.278	11.190	**12.263**	10.723	11.435
9.723	11.318	11.123	11.680	10.760
10.240	9.289	**10.329**	9.904	9.946
9.526	9.516	11.707	10.888	10.849
9.059	9.980	8.240	10.071	10.326
8.777	9.674	9.730	10.410	9.548
10.328	10.406	10.584	10.678	10.698
10.047	9.038	9.562	9.427	9.446
10.290	9.460	**10.655**	9.544	9.785
9.312	10.242	9.415	10.194	9.982
9.330	8.964	9.607	9.561	9.740
9.819	9.472	**9.547**	9.324	9.188
9.774	9.301	10.327	10.016	9.132
9.706	9.902	10.165	10.196	10.329
9.645	9.857	10.916	10.587	9.147
11.296	11.196	10.420	10.252	10.928
9.854	9.483	**9.509**	9.731	10.447
9.163	9.153	11.430	10.506	10.708
9.435	9.901	9.737	10.184	10.011
10.232	9.714	9.208	9.834	9.961
9.658	8.187	**9.189**	8.847	9.840
9.695	9.276	10.903	10.868	10.161
11.174	12.345	11.321	11.366	11.804
9.630	11.485	11.574	12.158	11.666
9.131	10.067	9.754	9.340	9.765
10.164	9.141	**9.549**	9.524	10.820
9.455	10.444	9.792	10.016	10.999
10.790	9.637	9.035	9.795	9.584
11.428	10.079	11.551	10.164	10.742
10.463	9.852	9.813	9.842	10.429

El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.997 \\ 10.012 \\ 10.214 \\ 10.137 \\ 10.188 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminación por Filas

Debido a que los datos faltantes recayeron en la variable X_3 y son: el $X_{2,3}$=9.010, $X_{5,3}$=11.221, $X_{6,3}$=10.102, $X_{9,3}$=9.927, $X_{11,3}$=10.718, $X_{17,3}$=11.504, $X_{21,3}$=12.263, $X_{23,3}$=10.329, $X_{29,3}$=10.655, $X_{32,3}$=9.547, $X_{37,3}$=9.509, $X_{41,3}$=9.189 y el $X_{46,3}$=9.549, se procede a prescindir de las filas que tienen estos valores “faltantes”, donde la matriz de datos resultante con filas eliminadas se muestra en la Tabla 4.22.

Tabla 4.22

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10, 1)

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de datos con trece filas eliminadas

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
10.795	10.399	10.777	10.610	11.217
7.841	7.267	8.513	8.214	8.712
11.869	10.340	11.380	10.312	11.007
10.534	9.264	10.164	9.067	9.447
10.325	11.979	11.486	10.526	11.554
9.232	9.984	10.538	9.633	9.045
9.427	10.861	9.573	9.717	8.939
10.678	9.843	10.905	10.302	9.628
9.580	9.948	9.478	10.324	9.885
9.714	9.214	9.334	10.042	9.996
8.282	8.433	9.356	9.677	8.955
9.588	10.713	10.476	11.278	11.123
9.649	10.292	9.565	10.365	9.811
10.100	10.191	9.732	10.977	9.444
9.723	11.318	11.123	11.680	10.760
9.526	9.516	11.707	10.888	10.849
9.059	9.980	8.240	10.071	10.326
8.777	9.674	9.730	10.410	9.548
10.328	10.406	10.584	10.678	10.698
10.047	9.038	9.562	9.427	9.446
9.312	10.242	9.415	10.194	9.982
9.330	8.964	9.607	9.561	9.740
9.774	9.301	10.327	10.016	9.132
9.706	9.902	10.165	10.196	10.329
9.645	9.857	10.916	10.587	9.147
11.296	11.196	10.420	10.252	10.928
9.163	9.153	11.430	10.506	10.708
9.435	9.901	9.737	10.184	10.011
10.232	9.714	9.208	9.834	9.961
9.695	9.276	10.903	10.868	10.161
11.174	12.345	11.321	11.366	11.804
9.630	11.485	11.574	12.158	11.666
9.131	10.067	9.754	9.340	9.765
9.455	10.444	9.792	10.016	10.999
10.790	9.637	9.035	9.795	9.584
11.428	10.079	11.551	10.164	10.742
10.463	9.852	9.813	9.842	10.429

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias para las treinta y siete filas restantes es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.858 \\ 10.002 \\ 10.194 \\ 10.245 \\ 10.148 \end{pmatrix}$$

El vector de medias de los datos originales y de los datos con filas eliminadas no coincide.

Ahora analicemos en el Cuadro 4.20, el efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas*, y *matriz de correlaciones*, la eliminación de trece filas, con un tamaño de muestra *n*=50.

CUADRO 4.20

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10, 1)

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.758				
X_2	0.387	0.953			
X_3	0.439	0.465	0.828		
X_4	0.135	0.439	0.396	0.517	
X_5	0.317	0.483	0.363	0.327	0.668

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.455	1.000			
X_3	0.554	0.524	1.000		
X_4	0.215	0.625	0.606	1.000	
X_5	0.445	0.606	0.488	0.556	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Trece Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.711				
X_2	0.399	0.898			
X_3	0.357	0.414	0.812		
X_4	0.163	0.470	0.411	0.533	
X_5	0.338	0.540	0.445	0.401	0.678

Matriz de Correlaciones (Trece Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.499	1.000			
X_3	0.470	0.484	1.000		
X_4	0.266	0.680	0.625	1.000	
X_5	0.487	0.693	0.600	0.667	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

Se puede apreciar que la mayor covarianza en la matriz de datos originales se da entre las variables X_2 y X_5 es decir 0.483; mientras que en la matriz con tres filas eliminadas este valor aumenta a 0.540.

En la matriz de correlaciones de datos originales, la mayor correlación se da entre las variables X_2 y X_4, es decir 0.625, cuyo valor se incrementa a 0.680 en la matriz de correlaciones con trece filas eliminadas. Se puede apreciar también que la mayor correlación en la matriz de datos con trece filas eliminadas se da entre las variables X_2 y X_5, es decir 0.693. En general, se puede decir que las variables tienen una correlación fuerte.

También se realiza el análisis de la variable que presenta datos faltantes, en este caso la variable X_3. (Ver Cuadro 4.21)

CUADRO 4.21

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

Método de Eliminación por Filas

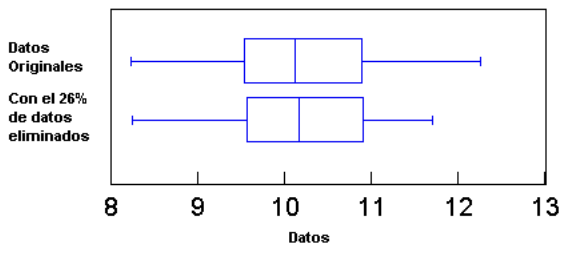
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_3"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Con el 26% de datos eliminadas en X_3
n		50	37
Media		10,214	10,194
Mediana		10,133	10,164
Moda		8,240	8,240
Varianza		0,828	0,812
Desviación Estándar		0,910	0,901
Error Estándar		0,129	0,148
Coeficiente de Asimetría		0,173	-0,012
Curtosis		-0,639	-0,759
Rango		4,020	3,470
Mínimo		8,240	8,240
Máximo		12,260	11,710
Percentiles	25	9,549	9,564
	50	10,133	10,164
	75	10,907	10,911

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.21, podemos apreciar que con el 26% de datos eliminados en la tercera columna de la matriz de datos (Variable X_3**)**, el valor de la media aumentó de 10.214 a 10.194 , la varianza disminuyó de 0.828 a 0.812.

Método de Imputación por la Media y Regresión

A continuación se aplica el método de imputación por media y regresión a la misma matriz de datos utilizada en el método de eliminación por filas, es decir se completan datos en la variable X_3 que presenta trece valores faltantes que son: el $X_{2,3}$=9.010, $X_{5,3}$=11.221, $X_{6,3}$=10.102, $X_{9,3}$=9.927, $X_{11,3}$=10.718, $X_{17,3}$=11.504, $X_{21,3}$=12.263, $X_{23,3}$=10.329, $X_{29,3}$=10.655, $X_{32,3}$=9.547, $X_{37,3}$=9.509, $X_{41,3}$=9.189 y el $X_{46,3}$=9.549.

Por medio del *Método de Imputación por Media*, se procede a calcular la media aritmética de la variable X_3 con los trece datos faltantes, cuyo valor es 10.194, entonces reemplazamos en $X_{2,3}$, $X_{5,3}$, $X_{6,3}$, $X_{9,3}$, $X_{11,3}$, $X_{17,3}$, $X_{21,3}$, $X_{23,3}$, $X_{29,3}$, $X_{32,3}$, $X_{37,3}$, $X_{41,3}$ y en $X_{46,3}$.

La matriz de datos resultante con trece valores completados por *imputación por la media* y *regresión* en la variable X_3 se muestra en la Tabla 4.23 y 4.24 respectivamente.

Tabla 4.23

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10, 1)

Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
10.795	10.399	10.777	10.610	11.217
9.866	9.975	**10.194**	9.863	10.929
7.841	7.267	8.513	8.214	8.712
11.869	10.340	11.380	10.312	11.007
10.350	12.547	**10.194**	10.324	10.532
9.299	10.392	**10.194**	10.320	9.449
10.534	9.264	10.164	9.067	9.447
10.325	11.979	11.486	10.526	11.554
10.288	10.920	**10.194**	9.554	11.840
9.232	9.984	10.538	9.633	9.045
11.463	10.285	**10.194**	9.156	9.243
9.427	10.861	9.573	9.717	8.939
10.678	9.843	10.905	10.302	9.628
9.580	9.948	9.478	10.324	9.885
9.714	9.214	9.334	10.042	9.996
8.282	8.433	9.356	9.677	8.955
11.562	10.166	**10.194**	10.953	10.491
9.588	10.713	10.476	11.278	11.123
9.649	10.292	9.565	10.365	9.811
10.100	10.191	9.732	10.977	9.444
12.278	11.190	**10.194**	10.723	11.435
9.723	11.318	11.123	11.680	10.760
10.240	9.289	**10.194**	9.904	9.946
9.526	9.516	11.707	10.888	10.849
9.059	9.980	8.240	10.071	10.326
8.777	9.674	9.730	10.410	9.548
10.328	10.406	10.584	10.678	10.698
10.047	9.038	9.562	9.427	9.446
10.290	9.460	**10.194**	9.544	9.785
9.312	10.242	9.415	10.194	9.982
9.330	8.964	9.607	9.561	9.740
9.819	9.472	**10.194**	9.324	9.188
9.774	9.301	10.327	10.016	9.132
9.706	9.902	10.165	10.196	10.329
9.645	9.857	10.916	10.587	9.147
11.296	11.196	10.420	10.252	10.928
9.854	9.483	**10.194**	9.731	10.447
9.163	9.153	11.430	10.506	10.708
9.435	9.901	9.737	10.184	10.011
10.232	9.714	9.208	9.834	9.961
9.658	8.187	**10.194**	8.847	9.840
9.695	9.276	10.903	10.868	10.161
11.174	12.345	11.321	11.366	11.804
9.630	11.485	11.574	12.158	11.666
9.131	10.067	9.754	9.340	9.765
10.164	9.141	**10.194**	9.524	10.820
9.455	10.444	9.792	10.016	10.999
10.790	9.637	9.035	9.795	9.584
11.428	10.079	11.551	10.164	10.742
10.463	9.852	9.813	9.842	10.429

Tabla 4.24

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10, 1)

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
10.795	10.399	10.777	10.610	11.217
9.866	9.975	**9.110**	9.863	10.929
7.841	7.267	8.513	8.214	8.712
11.869	10.340	11.380	10.312	11.007
10.350	12.547	**11.215**	10.324	10.532
9.299	10.392	**10.112**	10.320	9.449
10.534	9.264	10.164	9.067	9.447
10.325	11.979	11.486	10.526	11.554
10.288	10.920	**9.953**	9.554	11.840
9.232	9.984	10.538	9.633	9.045
11.463	10.285	**10.709**	9.156	9.243
9.427	10.861	9.573	9.717	8.939
10.678	9.843	10.905	10.302	9.628
9.580	9.948	9.478	10.324	9.885
9.714	9.214	9.334	10.042	9.996
8.282	8.433	9.356	9.677	8.955
11.562	10.166	**11.510**	10.953	10.491
9.588	10.713	10.476	11.278	11.123
9.649	10.292	9.565	10.365	9.811
10.100	10.191	9.732	10.977	9.444
12.278	11.190	**12.253**	10.723	11.435
9.723	11.318	11.123	11.680	10.760
10.240	9.289	**10.333**	9.904	9.946
9.526	9.516	11.707	10.888	10.849
9.059	9.980	8.240	10.071	10.326
8.777	9.674	9.730	10.410	9.548
10.328	10.406	10.584	10.678	10.698
10.047	9.038	9.562	9.427	9.446
10.290	9.460	**10.652**	9.544	9.785
9.312	10.242	9.415	10.194	9.982
9.330	8.964	9.607	9.561	9.740
9.819	9.472	**9.545**	9.324	9.188
9.774	9.301	10.327	10.016	9.132
9.706	9.902	10.165	10.196	10.329
9.645	9.857	10.916	10.587	9.147
11.296	11.196	10.420	10.252	10.928
9.854	9.483	**9.507**	9.731	10.447
9.163	9.153	11.430	10.506	10.708
9.435	9.901	9.737	10.184	10.011
10.232	9.714	9.208	9.834	9.961
9.658	8.187	**9.181**	8.847	9.840
9.695	9.276	10.903	10.868	10.161
11.174	12.345	11.321	11.366	11.804
9.630	11.485	11.574	12.158	11.666
9.131	10.067	9.754	9.340	9.765
10.164	9.141	**9.539**	9.524	10.820
9.455	10.444	9.792	10.016	10.999
10.790	9.637	9.035	9.795	9.584
11.428	10.079	11.551	10.164	10.742
10.463	9.852	9.813	9.842	10.429

Tabla 4.25

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

26% de datos completados en X_3 por la Media

Dato Observado	Resultado de Imputación por Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|
9.010	10.194	1,184
11.221	10.194	1,027
10.102	10.194	0,092
9.927	10.194	0,267
10.718	10.194	0,524
11.504	10.194	1,310
12.263	10.194	2,069
10.329	10.194	0,135
10.655	10.194	0,461
9.547	10.194	0,647
9.509	10.194	0,685
9.189	10.194	1,005
9.549	10.194	0,645

26% de datos completados en X_3 por Regresión

Dato Observado	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
9.010	9.110	0,100
11.221	11.215	0,006
10.102	10.112	0,010
9.927	9.931	0,004
10.718	10.709	0,009
11.504	11.510	0,006
12.263	12.253	0,010
10.329	10.333	0,004
10.655	10.652	0,003
9.547	9.545	0,002
9.509	9.507	0,002
9.189	9.181	0,008
9.549	9.539	0,010

Elaborado por: G. Cuenca

Se puede notar, por medio de la Tabla 4.25 que la diferencia en valor absoluto entre el dato observado de cada variable y el resultado de predicción, es menor en el *Método de Imputación por Regresión.*

CUADRO 4.22

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

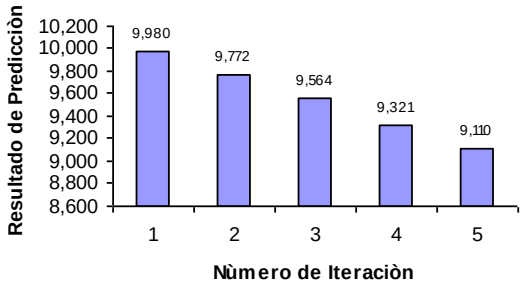
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{2,3}$=9.010

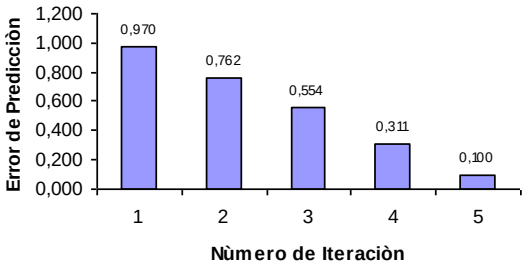
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	9.980	0,970
2	9.772	0,762
3	9.564	0,554
4	9.321	0,311
5	9.110	0,100

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	9.549
Error Estándar	0.155

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.539
Error Estándar	0.155

Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.22, se puede ver que el primer resultado de predicción es 9.980 ± 0.155, y el último es 9.110 ± 0.155, donde la media de los resultados de predicción es 9.549 ± 0.155.

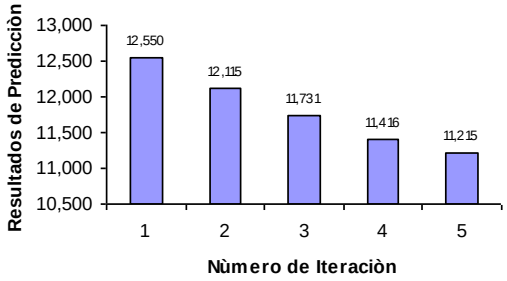
CUADRO 4.23

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{5,3}$=11.221

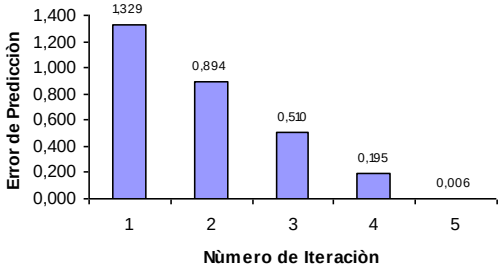
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	12.550	1,329
2	12.115	0,894
3	11.731	0,510
4	11.416	0,195
5	11.215	0,006

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	11.805
Error Estándar	0.240

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.587
Error Estándar	0.239

Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.23, se puede ver que el primer dato resultado de predicción es 12.550 ± 0.240, y el último es 11.215 ± 0.240, donde la media de los resultados de predicción es 11.805 ± 0.240 y la media del error de predicción es 0.587 ± 0.240.

CUADRO 4.24

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

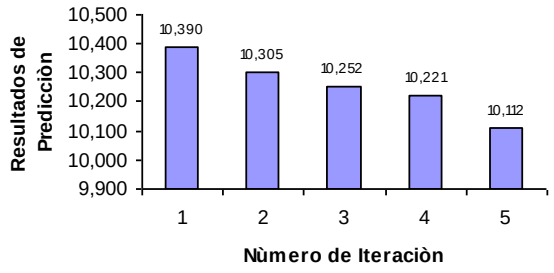
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{6,3}$=10.102

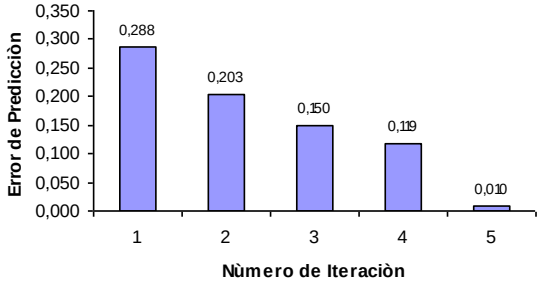
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	10.390	0,288
2	10.305	0,203
3	10.252	0,150
4	10.221	0,119
5	10.112	0,010

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	10.256
Error Estándar	0.046

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.154
Error Estándar	0.046

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.24, nos muestra que el primer resultado de predicción es 10.390 ± 0.046, y el último es 10.112 ± 0.046, donde la media de los resultados de predicción es 10.256 ± 0.046 y la media del error de predicción es 0.154 ± 0.046.

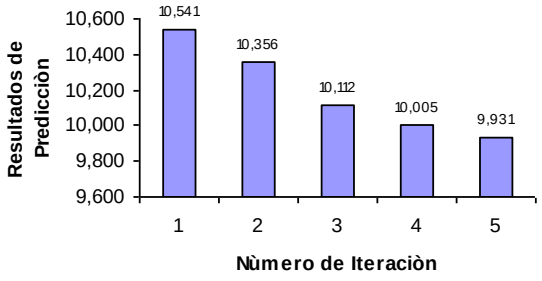
CUADRO 4.25

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{9,3}$=9.927

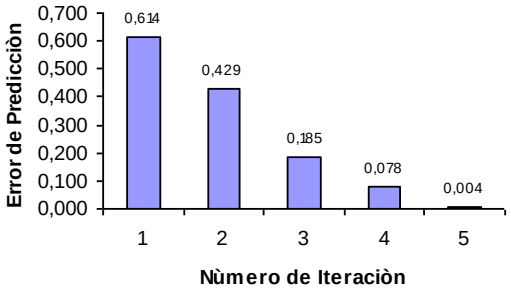
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	10.541	0,614
2	10.356	0,429
3	10.112	0,185
4	10.005	0,078
5	9.931	0,004

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	10.189
Error Estándar	0.114

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.262
Error Estándar	0.114

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.25, nos muestra que el primer resultado de predicción es 10.541 ± 0.114, y el último es 9.931 ± 0.114, donde la media de los resultados de predicción es 10.189 ± 0.114 y la media del error de predicción es 0.262 ± 0.114.

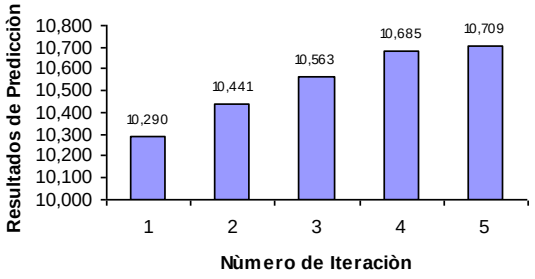
CUADRO 4.26

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{11,3}$=10.718

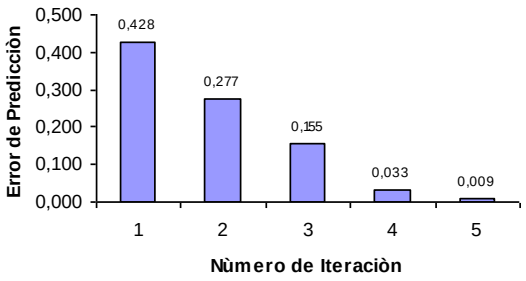
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	10.290	0,428
2	10.441	0,277
3	10.563	0,155
4	10.685	0,033
5	10.709	0,009

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	10.538
Error Estándar	0.078

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.184
Error Estándar	0.078

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.26, nos muestra que el primer resultado de predicción es 10.290 ± 0.078, y el último es 10.709 ± 0.078, donde la media de los resultados de predicción es 10.538 ± 0.078 y la media del error de predicción es 0.184 ± 0.078.

CUADRO 4.27

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

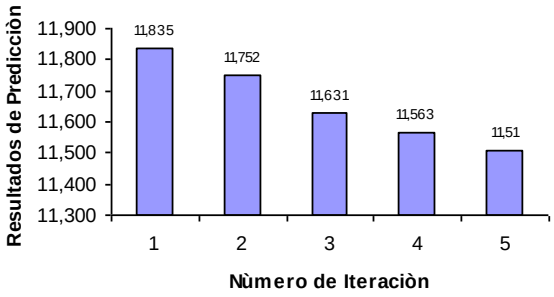
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{17,3}$=11.504

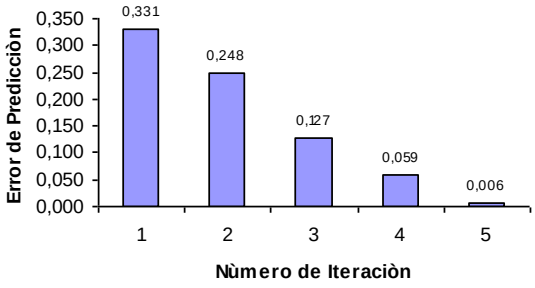
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	11.835	0,331
2	11.752	0,248
3	11.631	0,127
4	11.563	0,059
5	11.510	0,006

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	11.658
Error Estándar	0.060

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.154
Error Estándar	0.060

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.27, nos muestra que el primer resultado de predicción es 11.835 ± 0.060, y el último es 11.510 ± 0.060, donde la media de los resultados de predicción es 11.658 ± 0.060 y la media del error de predicción es 0.154 ± 0.060.

CUADRO 4.28

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

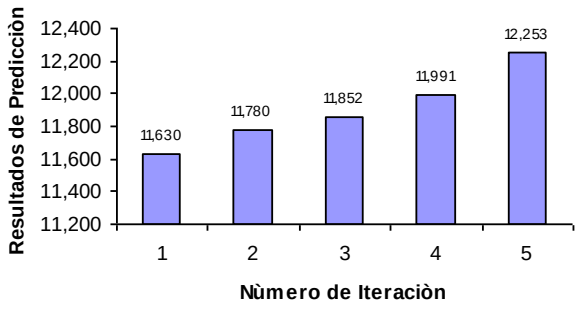
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{21,3}$=12.263

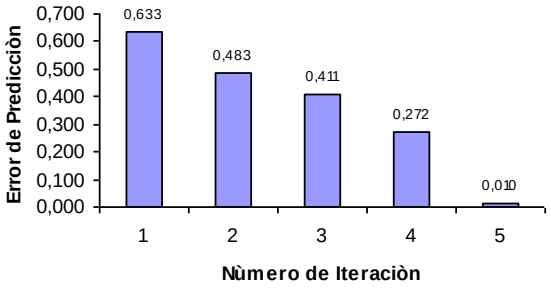
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	11.630	0,633
2	11.780	0,483
3	11.852	0,411
4	11.991	0,272
5	12.253	0,010

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	11.901
Error Estándar	0.105

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.362
Error Estándar	0.105

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.28, nos muestra que el primer resultado de predicción es 11.630 ± 0.150, y el último es 12.253 ± 0.150, donde la media de los resultados de predicción es 11.901 ± 0.150 y la media del error de predicción es 0.362 ± 0.0105.

CUADRO 4.29

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

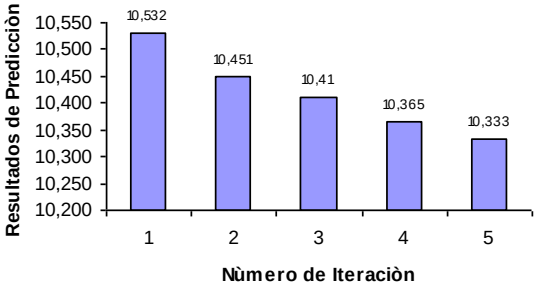
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{23,3}$=10.329

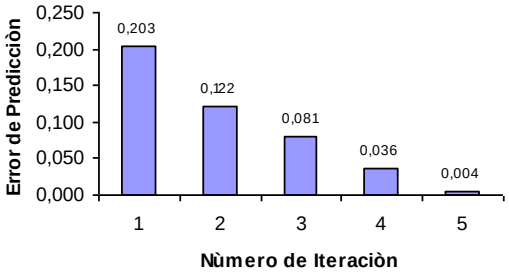
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	10.532	0,203
2	10.451	0,122
3	10.410	0,081
4	10.365	0,036
5	10.333	0,004

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	10.418
Error Estándar	0.035

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.089
Error Estándar	0.035

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.29, nos muestra que el primer resultado de predicción es 10.532 ± 0.035, y el último es 10.333 ± 0.035, donde la media de los resultados de predicción es 10.418 ± 0.035 y la media del error de predicción es 0.089 ± 0.035.

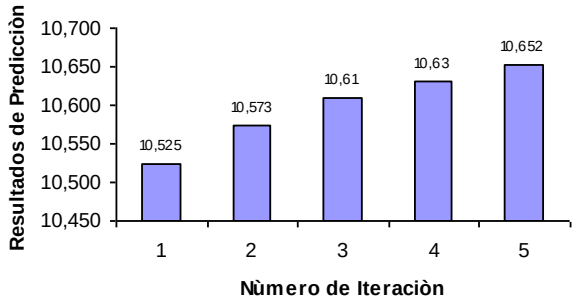
CUADRO 4.30

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)
Método de Imputación por Regresión
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{29,3}$=10.655

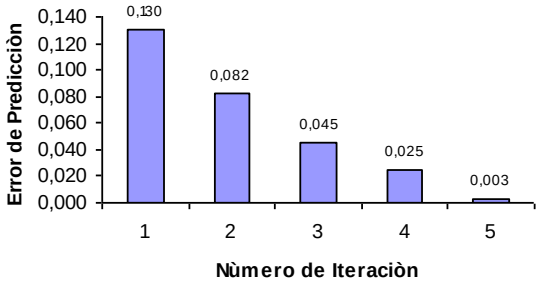
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	10.525	0,130
2	10.573	0,082
3	10.610	0,045
4	10.630	0,025
5	10.652	0,003

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	10.598
Error Estándar	0.022

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.026
Error Estándar	0.022

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.30, nos muestra que el primer resultado de predicción es 10.525 ± 0.022, y el último es 10.652 ± 0.022, donde la media de los resultados de predicción es 10.598 ± 0.022 y la media del error de predicción es 0.026 ± 0.022.

CUADRO 4.31

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

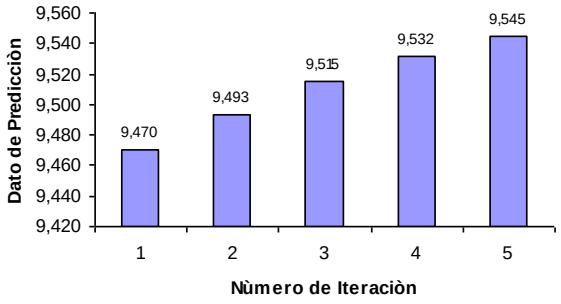
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{32,3}$=9.547

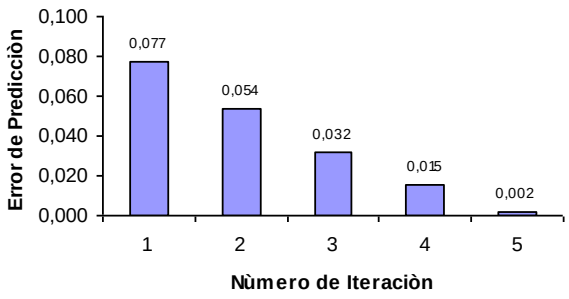
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	9.470	0,077
2	9.493	0,054
3	9.515	0,032
4	9.532	0,015
5	9.545	0,002

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	9.511
Error Estándar	0.013

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.036
Error Estándar	0.013

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.31, nos muestra que el primer resultado de predicción es 9.470 ± 0.013, y el último es 9.545 ± 0.013, donde la media de los resultados de predicción es 9.511 ± 0.013 y la media del error de predicción es 0.036 ± 0.013.

CUADRO 4.32

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

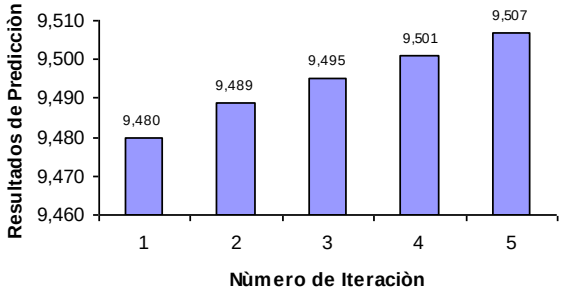
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{37,3}$=9.509

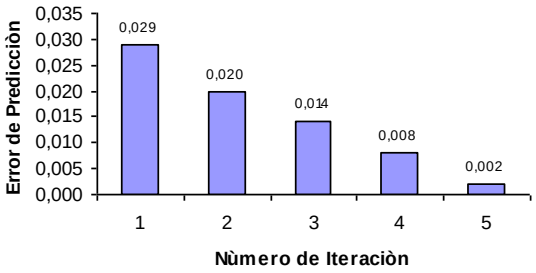
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	9.480	0,029
2	9.489	0,020
3	9.495	0,014
4	9.501	0,008
5	9.507	0,002

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	9.494
Error Estándar	0.005

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.015
Error Estándar	0.005

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.32, nos muestra que el primer resultado de predicción es 9.480 ± 0.005, y el último es 9.507 ± 0.005, donde la media de los resultados de predicción es 9.494 ± 0.005 y la media del error de predicción es 0.015±0.005.

CUADRO 4.33

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

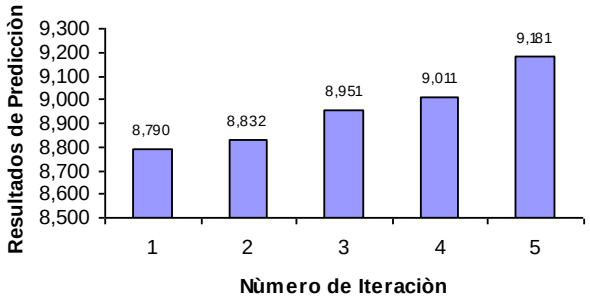
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{41,3}$=9.189

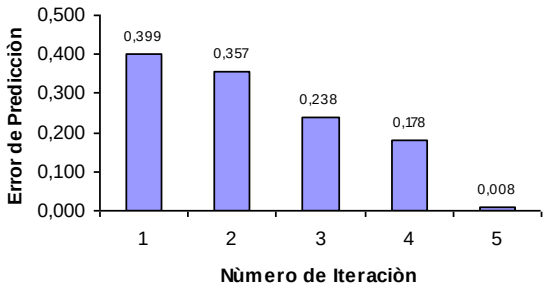
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	8.790	0,399
2	8.832	0,357
3	8.951	0,238
4	9.011	0,178
5	9.181	0,008

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	8.953
Error Estándar	0.069

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.236
Error Estándar	0.069

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.33, nos muestra que el primer resultado de predicción es 8.790 ± 0.399, y el último es 9.181 ± 0.399, donde la media de los resultados de predicción es 8.953 ± 0.069 y la media del error de predicción es 0.253 ± 0.069.

CUADRO 4.34

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

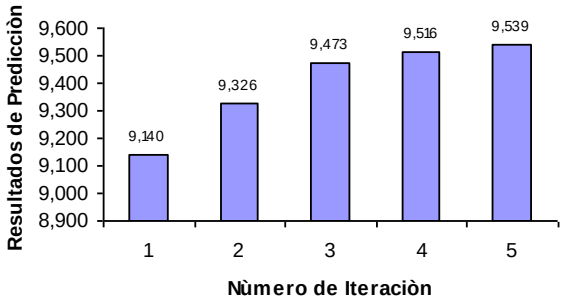
Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Imputaciones sucesivas para $X_{46,3}$=9.549

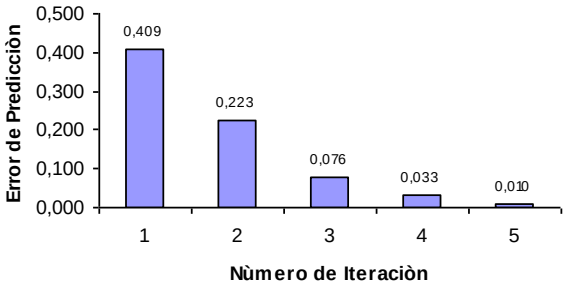
Iteración	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
1	9.140	0,409
2	9.326	0,223
3	9.473	0,076
4	9.516	0,033
5	9.539	0,010

Distribución del Resultado de Predicción



Estimadores	Resultado de Predicción
Número de Iteración	5
Media	9.399
Error Estándar	0.075

Distribución del Error de Predicción



Estimadores	Error de Predicción
Número de Iteración	5
Media	0.150
Error Estándar	0.075

Elaborado por: G. Cuenca

El Cuadro 4.34, nos muestra que el primer resultado de predicción es 9.140 ± 0.075, y el último es 9.539 ± 0.075, donde la media de los datos de predicción es 9.399 ± 0.075 y la media del error de predicción es 0.150

± 0.075. Todos los resultados de predicción de los cuadros anteriores, tienden al dato observado.

CUADRO 4.35

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)

Método de Imputación por la Media y Regresión

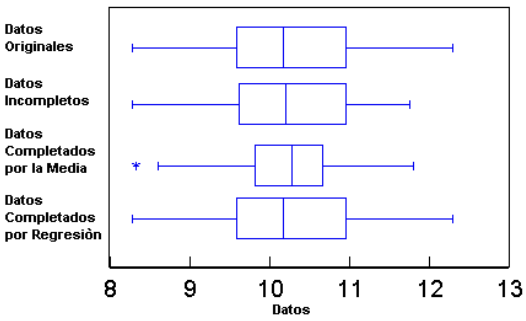
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_3"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		50	37	50	50
Media		10,214	10,194	10,194	10,216
Mediana		10,133	10,164	10,194	10,138
Moda		8,240	8,240	10,190	8,240
Varianza		0,828	0,812	0,597	0,823
Desviación Estándar		0,910	0,901	0,773	0,907
Error Estándar		0,129	0,148	0,109	0,128
Coeficiente de Asimetría		0,173	-0,012	-0,013	0,175
Curtosis		-0,639	-0,759	0,074	-0,638
Rango		4,020	3,470	3,470	4,010
Mínimo		8,240	8,240	8,240	8,240
Máximo		12,260	11,710	11,710	12,250
Percentiles	25	9,549	9,564	9,699	9,544
	50	10,133	10,164	10,194	10,138
	75	10,907	10,915	10,632	10,908

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

Al realizar la imputación por la media y regresión se obtuvieron los siguientes resultados (Ver Cuadro 4.35):

El valor de la media de los "datos completados" por *la media* disminuye. comparándolo con los "datos originales" y completados por *regresión.*

El valor de la varianza de los “datos completados” por la *media* disminuye de 0.828 a 0.597, mientras que en los “datos completados” por regresión este valor se incrementa a 0.823, comparándolo con el valor anterior y es muy cercano al valor de la varianza de los datos originales.

El vector de medias con trece datos completados por la media en X_3 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.997 \\ 10.012 \\ 10.194 \\ 10.137 \\ 10.188 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector de medias con trece datos completados por la regresión en X_3 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.997 \\ 10.012 \\ 10.216 \\ 10.137 \\ 10.188 \end{pmatrix}$$

El efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas* y *matriz de correlaciones*, el completar 5% de datos faltantes en una matriz de tamaño 50, por medio de la *imputación por media y regresión*, se presenta en el Cuadro 4.36.

CUADRO 4.36

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Normal (10,1)
Método de Imputación por la Media y Regresión
Tamaño de muestra n=50 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.758				
X_2	0.387	0.953			
X_3	0.439	0.465	0.828		
X_4	0.135	0.439	0.396	0.517	
X_5	0.317	0.483	0.363	0.327	0.668

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.455	1.000			
X_3	0.554	0.524	1.000		
X_4	0.215	0.625	0.606	1.000	
X_5	0.445	0.606	0.488	0.556	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 26% Datos Completados por Media en "*Variable* X_3"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.758				
X_2	0.387	0.953			
X_3	0.262	0.304	0.597		
X_4	0.135	0.439	0.302	0.517	
X_5	0.317	0.483	0.327	0.327	0.668

Matriz de Correlaciones 26% Datos Completados por Media en "*Variable* X_3"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.455	1.000			
X_3	0.390	0.403	1.000		
X_4	0.215	0.625	0.544	1.000	
X_5	0.445	0.606	0.518	0.556	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 26% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_3"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0.758				
X_2	0.387	0.953			
X_3	0.438	0.466	0.823		
X_4	0.135	0.439	0.396	0.517	
X_5	0.317	0.483	0.365	0.327	0.668

Matriz de Correlaciones 26% Datos Completados por Regresiòn en "*Variable* X_3"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.455	1.000			
X_3	0.554	0.526	1.000		
X_4	0.215	0.625	0.607	1.000	
X_5	0.445	0.606	0.493	0.556	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

Analizando el Cuadro 4.36 se puede notar que la covarianza entre X_2 y X_3 disminuye de 0.465 a 0.304 en la matriz con 26% de "datos completados" por la media en la variable X_3, así como también la covarianza entre X_3 y X_4 disminuye 0.396 a 0.302.

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por regresión, el valor de las covarianzas de variable X_3 con las demás variables se incrementa, comparándolo con la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por la media.

Por otro lado, analizando el efecto que causa en la matriz de correlaciones, podemos apreciar en el Cuadro 4.36 que la mayor correlación se da entre las variables X_2 y X_4, es decir 0.625, seguida por 0.606 entre las variables X_2 y X_5. En la matriz de correlaciones con 26% de datos completados por la media, la correlación entre X_1 y X_3 disminuye de 0.554 a 0.390, mientras que en la matriz de datos completados por regresión, este valor es igual al de la matriz de datos originales es decir 0.554.

4.3.2 Distribución Poisson: *Cincuenta datos faltantes* en una sola variable (10% de la matriz), tamaño de muestra n=100

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de cinco poblaciones todas ellas Poisson, dependientes e idénticamente distribuidas, con parámetro $\lambda = 10$, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{100\mathrm{x}5}$, *i= 1,2,....100* y *j= 1,2,3,4,5* y se supone que tiene el 10% de datos faltantes, es decir cincuenta datos, los que recayeron en la variable X_4 y son: el $X_{1,1}$=11, $X_{2,1}$=15, $X_{4,1}$=15, $X_{5,1}$=9, $X_{8,1}$=8, $X_{9,1}$=13, $X_{10,1}$=8, $X_{12,1}$=11, $X_{15,1}$=13, $X_{16,1}$=10, $X_{18,1}$=9, $X_{22,1}$=10, $X_{23,1}$=12, $X_{24,1}$=12, $X_{25,1}$=10, $X_{26,1}$=10, $X_{27,1}$=19, $X_{28,1}$=9, $X_{30,1}$=8, $X_{33,1}$=11, $X_{34,1}$=10, $X_{36,1}$=10, $X_{39,1}$=9, $X_{41,1}$=8, $X_{44,1}$=9, $X_{45,1}$=8,

$X_{47,1}$=11, $X_{49,1}$=10, $X_{51,1}$=9, $X_{54,1}$=6, $X_{55,1}$=12, $X_{58,1}$=8, $X_{60,1}$=8, $X_{62,1}$=10, $X_{64,1}$=12, $X_{67,1}$=9, $X_{69,1}$=9, $X_{70,1}$=12, $X_{72,1}$=10, $X_{75,1}$=8, $X_{79,1}$=4, $X_{82,1}$=12, $X_{85,1}$=14, $X_{88,1}$=15, $X_{90,1}$=9, $X_{93,1}$=13, $X_{95,1}$=11, $X_{97,1}$=11, $X_{99,1}$=11 y $X_{100,1}$=8. Nótese que el 10% de datos faltantes en la matriz, constituye 50% de datos faltantes en la columna que corresponde a X_4.

Tabla 4.26
Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Tamaño de muestra n=100

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
11	10	9	**11**	9
15	16	14	**15**	14
9	7	8	6	6
11	12	13	**15**	13
9	9	8	**9**	9
10	11	11	12	10
10	12	11	12	11
9	9	9	**8**	9
13	11	12	**13**	12
9	8	9	**8**	8
11	13	13	12	11
11	11	12	**11**	10
9	8	10	9	10
10	12	11	11	9
13	13	14	**13**	12
10	9	11	**10**	12
8	8	7	7	8
8	7	7	**9**	9
11	13	12	11	12
14	12	13	14	11
8	9	10	10	8
12	11	11	**10**	12
11	10	13	**12**	11
13	11	11	**12**	13
9	9	11	**10**	11
9	10	11	**10**	11
8	8	8	**9**	10
10	11	12	**9**	8
11	13	11	12	13
7	9	9	**8**	7
9	10	11	10	11
10	9	8	9	8
10	11	9	**11**	9
11	10	9	**10**	11

Elaborado por: G. Cuenca

Continúa…

Viene…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Tamaño de muestra n=100

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
10	13	13	11	13
11	9	8	**10**	8
12	10	9	10	8
10	10	12	13	12
10	12	12	**9**	11
10	14	11	12	14
9	8	10	**8**	11
10	12	11	11	9
9	7	8	8	9
11	8	11	**9**	8
8	11	10	**8**	11
8	9	8	10	10
11	12	10	**11**	11
12	11	10	13	12
12	12	13	**10**	10
6	8	7	7	8
9	10	10	**9**	9
10	12	9	10	9
7	8	6	7	6
7	6	9	**6**	8
11	10	12	**12**	14
10	12	11	10	10
9	8	9	9	7
10	9	10	**8**	10
10	14	10	14	14
8	11	9	**8**	10
5	5	8	7	8
10	11	12	**10**	11
8	8	9	10	9
18	10	11	**12**	10
10	9	12	13	9
12	13	12	11	11
9	12	11	**9**	8
14	8	14	10	9
8	11	11	**9**	12
11	10	8	**12**	11
11	9	8	11	11
11	8	9	**10**	9
10	12	13	11	10
11	9	10	11	12
11	8	11	**8**	8
10	11	12	10	11
11	12	13	10	10
9	9	10	9	8
4	5	5	**4**	4
8	10	5	8	11
9	11	12	9	8
9	13	11	**12**	10
12	12	9	11	10

Elaborado por: G. Cuenca

Viene…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Tamaño de muestra n=100

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
9	6	7	8	6
10	11	14	**14**	12
13	11	13	14	12
8	9	7	7	8
13	15	13	**15**	14
15	14	11	12	11
9	8	12	**9**	10
8	9	9	10	11
10	11	10	13	12
9	8	12	**13**	10
12	10	11	9	11
11	12	10	**11**	11
13	11	9	10	9
13	11	13	**11**	13
11	10	13	14	13
10	10	11	**11**	12
8	10	9	**8**	9

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.120 \\ 10.200 \\ 10.360 \\ 10.270 \\ 10.140 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminación por Filas

Debido a que los datos faltantes recayeron en la variable X_4, se procede a prescindir de las filas que tienen estos valores “faltantes”, donde la matriz de datos resultante con filas eliminadas se muestra en la Tabla 4.27.

Tabla 4.27

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

Matriz de datos con cincuenta filas eliminadas

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
9	7	8	6	6
10	11	11	12	10
10	12	11	12	11
11	13	13	12	11
9	8	10	9	10
10	12	11	11	9
8	8	7	7	8
11	13	12	11	12
14	12	13	14	11
8	9	10	10	8
11	13	11	12	13
9	10	11	10	11
10	9	8	9	8
10	13	13	11	13
12	10	9	10	8
10	10	12	13	12
10	14	11	12	14
10	12	11	11	9
9	7	8	8	9
8	9	8	10	10
12	11	10	13	12
6	8	7	7	8
10	12	9	10	9
7	8	6	7	6
10	12	11	10	10
9	8	9	9	7
10	14	10	14	14
5	5	8	7	8
8	8	9	10	9
10	9	12	13	9
12	13	12	11	11
14	8	14	10	9
11	9	8	11	11
10	12	13	11	10
11	9	10	11	12
10	11	12	10	11
11	12	13	10	10
9	9	10	9	8
8	10	5	8	11
9	11	12	9	8
12	12	9	11	10
9	6	7	8	6
13	11	13	14	12
8	9	7	7	8
15	14	11	12	11
8	9	9	10	11
10	11	10	13	12
12	10	11	9	11
13	11	9	10	9
11	10	13	14	13

El vector de medias para las cincuenta filas restantes es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.040 \\ 10.280 \\ 10.140 \\ 10.360 \\ 9.980 \end{pmatrix}$$

Se analiza el efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas*, y *matriz de correlaciones*, la eliminación de cincuenta filas, con un tamaño de muestra *n*=100.(Ver Cuadro 4.37)

CUADRO 4.37

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.349				
X_2	2.400	4.364			
X_3	2.421	2.493	4.091		
X_4	2.927	2.986	2.851	4.563	
X_5	2.023	2.679	2.343	**3.113**	3.920

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.551	1.000			
X_3	0.574	0.590	1.000		
X_4	0.657	0.669	0.660	1.000	
X_5	0.490	0.648	0.585	0.736	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Cincuenta Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	3.835				
X_2	2.356	4.655			
X_3	2.443	2.572	4.490		
X_4	2.455	2.897	2.928	4.194	
X_5	1.613	2.863	2.146	3.069	3.979

Matriz de Correlaciones (Cincuenta Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.558	1.000			
X_3	0.589	0.563	1.000		
X_4	0.612	0.656	0.675	1.000	
X_5	0.413	0.665	0.508	0.751	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

Se puede apreciar que la mayor covarianza en la matriz de datos originales se da entre las variables X_4 y X_5 es decir 3.113; mientras que en la matriz con cincuenta filas eliminadas este valor aumenta a 3.069.

En la matriz de correlaciones de datos originales, la mayor correlación se da entre las variables X_4 y X_5, es decir 0.736, cuyo valor se incrementa a 0.751 en la matriz de correlaciones con cincuenta filas eliminadas y por lo tanto se convierte en la mayor correlación.

CUADRO 4.38

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Eliminación por Filas

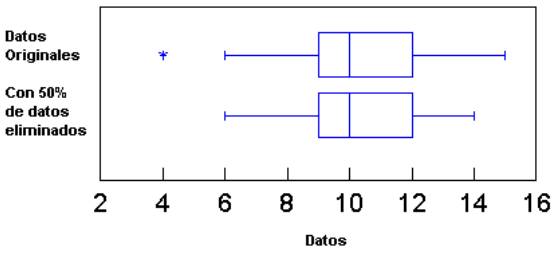
Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_4"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Con el 50% de datos eliminadas en X_4
n		100	50
Media		10,270	10,360
Mediana		10,000	10,000
Moda		10,000	10,000
Varianza		4,563	4,194
Desviación Estándar		2,136	2,048
Error Estándar		0,214	0,290
Coeficiente de Asimetría		0,039	-0,080
Curtosis		0,058	-0,500
Rango		11,000	8,000
Mínimo		4,000	6,000
Máximo		15,000	14,000
Percentiles	25	9,000	9,000
	50	10,000	10,000
	75	12,000	12,000

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.38, podemos apreciar que con el 50% de datos eliminados en la cuarta columna de la matriz de datos (Variable X_4), el valor de la media aumentó de 10.270 a 10.360. La varianza de la variable X_4, con 50% de datos eliminados disminuyó de 4.536 a 4.194.

Método de Imputación por la Media y Regresión

A continuación se aplica el *método de imputación por media y regresión* a la misma matriz de datos utilizada en el método de eliminación por filas, es decir se completan datos en la variable X_4 que presenta cincuenta valores faltantes que son: el $X_{1,1}$=11, $X_{2,1}$=15, $X_{4,1}$=15, $X_{5,1}$=9, $X_{8,1}$=8, $X_{9,1}$=13, $X_{10,1}$=8, $X_{12,1}$=11, $X_{15,1}$=13, $X_{16,1}$=10, $X_{18,1}$=9, $X_{22,1}$=10, $X_{23,1}$=12, $X_{24,1}$=12, $X_{25,1}$=10, $X_{26,1}$=10, $X_{27,1}$=19, $X_{28,1}$=9, $X_{30,1}$=8, $X_{33,1}$=11, $X_{34,1}$=10, $X_{36,1}$=10, $X_{39,1}$=9, $X_{41,1}$=8, $X_{44,1}$=9, $X_{45,1}$=8, $X_{47,1}$=11, $X_{49,1}$=10, $X_{51,1}$=9, $X_{54,1}$=6, $X_{55,1}$=12, $X_{58,1}$=8, $X_{60,1}$=8, $X_{62,1}$=10, $X_{64,1}$=12, $X_{67,1}$=9, $X_{69,1}$=9, $X_{70,1}$=12, $X_{72,1}$=10, $X_{75,1}$=8, $X_{79,1}$=4, $X_{82,1}$=12, $X_{85,1}$=14, $X_{88,1}$=15, $X_{90,1}$=9, $X_{93,1}$=13, $X_{95,1}$=11, $X_{97,1}$=11, $X_{99,1}$=11 y $X_{100,1}$=8.

Por medio del *Método de Imputación por Media*, se procede a calcular la media aritmética de la variable X_4 con los cincuenta datos faltantes, cuyo valor es 10.360 y se reemplaza en los datos faltantes descritos anteriormente. La matriz de datos resultante con cincuenta valores completados por *imputación por la media* y *regresión* en la variable X_4 se muestra en la Tabla 4.28 y 4.29 respectivamente.

Tabla 4.28

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
11	10	9	**10.360**	9
15	16	14	**10.360**	14
9	7	8	6	6
11	12	13	**10.360**	13
9	9	8	**10.360**	9
10	11	11	12	10
10	12	11	12	11
9	9	9	**10.360**	9
13	11	12	**10.360**	12
9	8	9	**10.360**	8
11	13	13	12	11
11	11	12	**10.360**	10
9	8	10	9	10
10	12	11	11	9
13	13	14	**10.360**	12
10	9	11	**10.360**	12
8	8	7	7	8
8	7	7	**10.360**	9
11	13	12	11	12
14	12	13	14	11
8	9	10	10	8
12	11	11	**10.360**	12
11	10	13	**10.360**	11
13	11	11	**10.360**	13
9	9	11	**10.360**	11
9	10	11	**10.360**	11
8	8	8	**10.360**	10
10	11	12	**10.360**	8
11	13	11	12	13
7	9	9	**10.360**	7
9	10	11	10	11
10	9	8	9	8
10	11	9	**10.360**	9
11	10	9	**10.360**	11
10	13	13	11	13
11	9	8	**10.360**	8
12	10	9	10	8
10	10	12	13	12
10	12	12	**10.360**	11
10	14	11	12	14
9	8	10	**10.360**	11
10	12	11	11	9
9	7	8	8	9
11	8	11	**10.360**	8
8	11	10	**10.360**	11
8	9	8	10	10
11	12	10	**10.360**	11
12	11	10	13	12
12	12	13	**10.360**	10

Continúa…

Viene…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Imputación por la Media

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
6	8	7	7	8
9	10	10	**10.360**	9
10	12	9	10	9
7	8	6	7	6
7	6	9	**10.360**	8
11	10	12	**10.360**	14
10	12	11	10	10
9	8	9	9	7
10	9	10	**10.360**	10
10	14	10	14	14
8	11	9	**10.360**	10
5	5	8	7	8
10	11	12	**10.360**	11
8	8	9	10	9
18	10	11	**10.360**	10
10	9	12	13	9
12	13	12	11	11
9	12	11	**10.360**	8
14	8	14	10	9
8	11	11	**10.360**	12
11	10	8	**10.360**	11
11	9	8	11	11
11	8	9	**10.360**	9
10	12	13	11	10
11	9	10	11	12
11	8	11	**10.360**	8
10	11	12	10	11
11	12	13	10	10
9	9	10	9	8
4	5	5	**10.360**	4
8	10	5	8	11
9	11	12	9	8
9	13	11	**10.360**	10
12	12	9	11	10
9	6	7	8	6
10	11	14	**10.360**	12
13	11	13	14	12
8	9	7	7	8
13	15	13	**10.360**	14
15	14	11	12	11
9	8	12	**10.360**	10
8	9	9	10	11
10	11	10	13	12
9	8	12	**10.360**	10
12	10	11	9	11
11	12	10	**10.360**	11
13	11	9	10	9
13	11	13	**10.360**	13
11	10	13	14	13
10	10	11	**10.360**	12
8	10	9	**10.360**	9

Tabla 4.29

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
11	10	9	**10,979**	9
15	16	14	**15,064**	14
9	7	8	6	6
11	12	13	**14,987**	13
9	9	8	**9,057**	9
10	11	11	12	10
10	12	11	12	11
9	9	9	**8,514**	9
13	11	12	**12,995**	12
9	8	9	**8,091**	8
11	13	13	12	11
11	11	12	**11,015**	10
9	8	10	9	10
10	12	11	11	9
13	13	14	**13,048**	12
10	9	11	**10,031**	12
8	8	7	7	8
8	7	7	**8,982**	9
11	13	12	11	12
14	12	13	14	11
8	9	10	10	8
12	11	11	**10,018**	12
11	10	13	**11,924**	11
13	11	11	**12,081**	13
9	9	11	**10,005**	11
9	10	11	**10,012**	11
8	8	8	**9,071**	10
10	11	12	**9,100**	8
11	13	11	12	13
7	9	9	**8,005**	7
9	10	11	10	11
10	9	8	9	8
10	11	9	**10,985**	9
11	10	9	**10,972**	11
10	13	13	11	13
11	9	8	**9,901**	8
12	10	9	10	8
10	10	12	13	12
10	12	12	**9,172**	11
10	14	11	12	14
9	8	10	**8,051**	11
10	12	11	11	9
9	7	8	8	9
11	8	11	**9,053**	8
8	11	10	**8,003**	11
8	9	8	10	10
11	12	10	**11,072**	11
12	11	10	13	12

Continúa…

Sigue…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Imputación por Regresión

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
12	12	13	**10,030**	10
6	8	7	7	8
9	10	10	**9,022**	9
10	12	9	10	9
7	8	6	7	6
7	6	9	**5,987**	8
11	10	12	**12,101**	14
10	12	11	10	10
9	8	9	9	7
10	9	10	**7,983**	10
10	14	10	14	14
8	11	9	**8,003**	10
5	5	8	7	8
10	11	12	**10,002**	11
8	8	9	10	9
18	10	11	**11,978**	10
10	9	12	13	9
12	13	12	11	11
9	12	11	**9,062**	8
14	8	14	10	9
8	11	11	**9,051**	12
11	10	8	**11,971**	11
11	9	8	11	11
11	8	9	**10,101**	9
10	12	13	11	10
11	9	10	11	12
11	8	11	**8,106**	8
10	11	12	10	11
11	12	13	10	10
9	9	10	9	8
4	5	5	**4,031**	4
8	10	5	8	11
9	11	12	9	8
9	13	11	**11,931**	10
12	12	9	11	10
9	6	7	8	6
10	11	14	**13,920**	12
13	11	13	14	12
8	9	7	7	8
13	15	13	**14,933**	14
15	14	11	12	11
9	8	12	**9,010**	10
8	9	9	10	11
10	11	10	13	12
9	8	12	**12,915**	10
12	10	11	9	11
11	12	10	**10,993**	11
13	11	9	10	9
13	11	13	**11,061**	13
11	10	13	14	13
10	10	11	**11,076**	12
8	10	9	**8,003**	9

Tabla 4.30

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

50% de datos completados en X_3 ***por la Media***

Dato Observado	Resultado de Imputación por Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|
11	10.360	0,64
15	10.360	4,64
15	10.360	4,64
9	10.360	1,36
8	10.360	2,36
13	10.360	2,64
8	10.360	2,36
11	10.360	0,64
13	10.360	2,64
10	10.360	0,36
9	10.360	1,36
10	10.360	0,36
12	10.360	1,64
12	10.360	1,64
10	10.360	0,36
10	10.360	0,36
9	10.360	1,36
9	10.360	1,36
8	10.360	2,36
11	10.360	0,64
10	10.360	0,36
10	10.360	0,36
9	10.360	1,36
8	10.360	2,36
9	10.360	1,36
8	10.360	2,36
11	10.360	0,64
10	10.360	0,36
9	10.360	1,36
6	10.360	4,36
12	10.360	1,64
8	10.360	2,36
8	10.360	2,36
10	10.360	0,36
12	10.360	1,64
9	10.360	1,36
9	10.360	1,36
12	10.360	1,64
10	10.360	0,36
8	10.360	2,36
4	10.360	6,36
12	10.360	1,64
14	10.360	3,64
15	10.360	4,64
9	10.360	1,36
13	10.360	2,64
11	10.360	0,64
11	10.360	0,64
11	10.360	0,64
8	10.360	2,36

Viene…

Variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

50% de datos completados en X_3 *por Regresión*

Dato Observado	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
11	10.979	0,021
15	15.064	0,064
15	14.987	0,013
9	9.057	0,057
8	8.514	0,514
13	12.995	0,005
8	8.091	0,091
11	11.015	0,015
13	13.048	0,048
10	10.031	0,031
9	8.982	0,018
10	10.018	0,018
12	11.924	0,076
12	12.081	0,081
10	10.005	0,005
10	10.012	0,012
9	9.071	0,071
9	9.100	0,100
8	8.005	0,005
11	10.985	0,015
10	10.972	0,972
10	8.901	1,099
9	9.172	0,172
8	8.051	0,051
9	9.053	0,053
8	8.003	0,003
11	11.072	0,072
10	10.030	0,030
9	9.022	0,022
6	5.987	0,013
12	12.101	0,101
8	7.983	0,017
8	8.003	0,003
10	10.002	0,002
12	11.978	0,022
9	9.062	0,062
9	9.051	0,051
12	11.971	0,029
10	10.101	0,101
8	8.106	0,106
4	4.031	0,031
12	11.931	0,069
14	13.920	0,080
15	14.933	0,067
9	9.010	0,010
13	12.915	0,085
11	10.993	0,007
11	11.061	0,061
11	11.076	0,076
8	8.003	0,003

Se puede notar, por medio de la Tabla 4.30 que la diferencia en valor absoluto entre el valor observado de cada variable, es menor en el *Método de Imputación por Regresión.*

CUADRO 4.39

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Imputación por la Media y Regresión

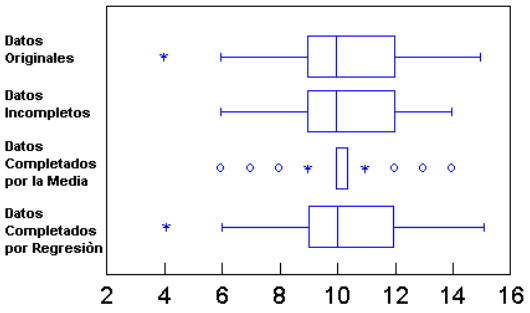
Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_4"

Estimadores

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		100	50	100	100
Media		10,270	10,360	10,360	10,295
Mediana		10,000	10,000	10,360	10,004
Moda		10,000	10,000	10,360	10,000
Varianza		4,563	4,194	2,076	4,510
Desviación Estándar		2,136	2,048	1,441	2,124
Error Estándar		0,214	0,290	0,144	0,212
Coeficiente de Asimetría		0,039	-0,080	-0,111	0,016
Curtosis		0,058	-0,500	2,022	0,087
Rango		11,000	8,000	8,000	11,030
Mínimo		4,000	6,000	6,000	4,030
Máximo		15,00	14,000	14,000	15,060
Percentiles	25	9,000	9,000	10,000	9,000
	50	10,000	10,000	10,360	10,004
	75	12,000	12,000	10,360	11,961

Diagrama de Cajas



Elaborado por: G. Cuenca

Al realizar la imputación por la media y regresión se obtuvieron los siguientes resultados (Ver Cuadro 4.39):

El valor de la media de los "datos completados" por *la media* aumenta, comparándolo con los "datos originales" y completados por *regresión.*

El valor de la varianza de los “datos completados” por la *media* disminuye de 4.563 a 2.076, mientras que en los datos completados por regresión este valor se incrementa a 4.510, comparándolo con el valor anterior y es muy cercano al valor de la varianza de los “datos originales”.

El vector de medias con cincuenta datos completados por la media en X_4 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.120 \\ 10.200 \\ 10.360 \\ 10.360 \\ 10.140 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector de medias con cincuenta datos completados por la regresión en X_4 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.120 \\ 10.200 \\ 10.360 \\ 10.295 \\ 10.140 \end{pmatrix}$$

El efecto que causa en la *matriz de varianzas* y *covarianzas* y *matriz de correlaciones*, el completar 10% de datos faltantes en una matriz de tamaño 100, por medio de la imputación por media y regresión, se presenta en el Cuadro 4.40.

CUADRO 4.40

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Poisson $\lambda = 10$

Método de Imputación por la Media y Regresión
Tamaño de muestra n=100 y 10% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.349				
X_2	2.400	4.364			
X_3	2.421	2.493	4.091		
X_4	2.927	2.986	2.851	4.563	
X_5	2.023	2.679	2.343	**3.113**	3.920

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.551	1.000			
X_3	0.574	0.590	1.000		
X_4	0.657	0.669	0.660	1.000	
X_5	0.490	0.648	0.585	0.736	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 50% Datos Completados por Media en "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.349				
X_2	2.400	4.364			
X_3	2.421	2.493	4.091		
X_4	1.215	1.434	1.449	2.076	
X_5	2.023	2.679	2.343	1.519	3.920

Matriz de Correlaciones 50% Datos Completados por Media en "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.551	1.000			
X_3	0.574	0.590	1.000		
X_4	0.404	0.476	0.497	1.000	
X_5	0.490	0.648	0.585	0.532	1.000

Matriz de Varianzas y Covarianzas 50% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	4.349				
X_2	2.400	4.364			
X_3	2.421	2.493	4.091		
X_4	2.931	2.976	2.834	4.510	
X_5	2.023	2.679	2.343	3.118	3.920

Matriz de Correlaciones 50% Datos Completados por Regresiòn en "*Variable* X_4"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1.000				
X_2	0.551	1.000			
X_3	0.574	0.590	1.000		
X_4	0.662	0.671	0.660	1.000	
X_5	0.490	0.648	0.585	0.742	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

La covarianza entre X_4 y X_5 disminuye de 3.113 a 1.159 en la matriz con 50% de "datos completados" por la media en la variable X_4, así como también disminuye la covarianza entre X_4 con las otras variables.

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por regresión, el valor de las covarianzas de variable X_4 con las demás variables se incrementa, comparándolo con la matriz de varianzas y covarianzas de los "datos completados" por *la media.*

Por otro lado, analizando el efecto que causa en la matriz de correlaciones, podemos apreciar en le Cuadro 4.40 que también los únicos valores que cambian son los de la correlación de X_4 con las demás variables, puesto que a esta variable se le completó datos por medio de los métodos de imputación; donde la mayor correlación se da entre las variables X_4 y X_5, es decir 0.736, seguida por 0.669 entre las variables X_2 y X_4. En la matriz de correlaciones con 50% de datos completados por la media, la correlación entre X_4 y X_5 disminuye de 0.736 a 0.532, mientras que en la matriz de datos completados por regresión, este valor es 0.742.

4.3.3 Distribución Exponencial: *Cincuenta datos faltantes*: Veinticinco en X_3 y veinticinco en X_8 (10% de la matriz), tamaño de muestra n=100

Se tiene una matriz de datos cuyas columnas son muestras tomadas de diez poblaciones todas ellas Exponencial, dependientes e idénticamente distribuidas, con parámetro $\beta = 4$, $\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{100\mathrm{x}10}$, *i= 1,2,....100* y *j= 1,2,3,…,10* y se supone que tiene el 5% de datos faltantes, es decir

cincuenta datos, los que recayeron en las variables X_3 y X_8 y son: el $X_{3,3}$=2.851, $X_{9,3}$=1.414, $X_{15,3}$=1.069, $X_{18,3}$=6.462, $X_{21,3}$=3.914, $X_{24,3}$=1.131, $X_{31,3}$=6.562, $X_{33,3}$=2.254, $X_{39,3}$=1.689, $X_{42,3}$=1.432, $X_{43,3}$=3.693, $X_{47,3}$=3.960, $X_{48,3}$=3.420, $X_{52,3}$=2.683, $X_{55,3}$=6.730, $X_{58,3}$=0.860, $X_{59,3}$=6.406, $X_{67,3}$=3.578, $X_{69,3}$=5.157, $X_{71,3}$=4.083, $X_{74,3}$=2.061, $X_{79,3}$=1.148, $X_{81,3}$=3.359, $X_{84,3}$=1.913, $X_{86,3}$=1.351, $X_{6,8}$=2.390, $X_{12,8}$=1.060, $X_{17,8}$=1.383, $X_{23,8}$=1.219, $X_{30,8}$=2.582, $X_{34,8}$=5.997, $X_{37,8}$=3.952, $X_{41,8}$=19.664, $X_{46,8}$=5.859, $X_{50,8}$=5.255, $X_{53,8}$=9.518, $X_{60,8}$=2.947, $X_{61,8}$=2.566, $X_{62,8}$=0.929, $X_{63,8}$=4.580, $X_{75,8}$=2.080, $X_{77,8}$=3.767, $X_{87,8}$=4.930, $X_{88,8}$=6.314, $X_{92,8}$=0.704, $X_{93,8}$=5.413, $X_{97,8}$=3.183, $X_{98,8}$=4.859, $X_{99,8}$=4.800 y $X_{100,8}$=5.525.

Nótese que el 5% de datos faltantes en la matriz, constituye 25% de datos faltantes en la columna que corresponde a X_3 y 25% de datos faltantes en la columna X_8 (Ver Tabla 4.31)

Tabla 4.31

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Tamaño de muestra n=100

X_1	X_2	$\boldsymbol{X_3}$	X_4	X_5	X_6	X_7	$\boldsymbol{X_8}$	X_9	X_{10}
6.726	6.168	3.447	4.124	4.017	4.550	5.149	4.957	6.743	3.346
1.168	1.763	0.622	2.786	4.782	3.397	3.994	1.921	1.714	2.373
3.238	4.557	2.851	3.335	0.641	10.599	10.406	11.662	0.222	10.237
0.283	0.163	0.814	2.302	1.101	2.715	0.470	0.462	0.814	2.980
3.054	1.277	3.099	1.934	0.206	1.929	0.575	1.089	0.289	1.435
3.483	3.547	3.129	5.710	3.334	3.645	5.478	2.390	4.686	3.469
0.668	1.180	3.188	2.429	4.009	3.122	2.252	1.105	4.255	2.085
2.576	2.268	3.545	1.127	2.069	3.408	3.349	3.863	2.491	3.414
4.385	1.285	1.414	1.937	1.812	2.162	2.081	4.421	4.249	4.599
1.589	1.276	2.751	0.819	2.093	2.700	2.421	2.740	2.224	2.820
0.706	1.523	4.851	1.602	4.022	1.399	1.671	2.287	4.115	1.108
1.721	3.194	1.051	3.420	1.406	3.575	1.586	1.060	1.712	3.696
1.535	1.701	1.466	1.192	2.600	3.875	2.265	1.995	1.767	3.724
3.876	1.856	1.723	1.872	2.278	1.143	1.079	2.902	1.891	2.860
0.737	2.047	1.069	2.488	1.351	1.041	2.934	2.882	1.617	1.052
2.750	5.298	2.372	5.287	5.913	4.634	4.520	3.012	4.673	3.123
1.373	1.996	3.664	1.678	3.197	1.797	2.731	1.383	2.728	1.343
3.386	1.849	6.462	5.218	6.036	2.054	6.604	2.182	1.310	2.984
4.755	3.972	1.879	3.576	2.127	2.750	1.792	1.623	2.187	3.749
2.650	2.213	1.241	2.986	2.135	1.215	1.608	1.562	1.126	1.524
5.571	3.181	3.914	5.382	3.060	3.755	1.035	4.237	5.737	5.339
1.530	2.504	2.470	2.068	1.122	0.344	3.872	1.045	3.311	1.349
4.779	4.420	3.471	4.447	0.445	4.719	3.270	1.219	4.179	3.091
2.452	4.650	1.131	2.951	4.005	0.832	2.911	2.574	2.371	1.803
2.565	2.414	0.923	2.062	5.526	2.385	1.990	2.036	2.973	2.421
1.439	3.829	1.334	1.294	1.279	2.422	2.949	2.741	1.932	2.659
3.888	1.524	3.675	4.748	7.131	7.411	7.808	1.854	5.252	5.882
1.603	1.507	4.001	2.180	1.244	1.084	2.942	1.930	2.045	1.612
2.633	1.371	1.907	2.073	1.416	1.304	2.665	3.206	1.354	1.596
2.086	1.962	1.252	1.197	1.661	1.713	2.182	2.582	2.399	2.791
2.800	1.987	6.562	1.832	6.257	1.129	6.075	7.053	1.242	6.120
7.423	6.601	6.400	3.976	3.149	1.643	7.398	7.141	4.436	6.879
3.786	6.453	2.254	6.418	6.050	5.496	3.591	6.079	1.401	3.806
1.755	6.641	1.837	5.535	3.645	5.206	3.588	5.997	3.233	1.775
0.804	2.132	5.803	3.424	2.305	3.475	7.773	7.824	2.168	4.732
1.661	1.418	2.400	3.917	4.567	1.186	1.240	3.133	1.511	1.656
4.292	4.003	3.284	4.179	3.924	4.342	4.589	3.952	1.153	4.109
4.955	2.839	4.372	3.730	3.567	3.045	3.825	5.077	3.874	2.255
4.301	1.327	1.689	2.704	3.954	2.647	4.671	2.970	1.283	2.873
2.509	1.469	3.747	3.180	7.432	4.313	7.123	4.382	7.261	4.588
1.275	9.904	1.865	1.178	6.441	3.053	1.436	19.664	0.179	1.579
4.694	3.156	1.432	7.665	6.024	4.361	4.524	2.119	6.514	2.655
0.705	3.267	3.693	0.557	2.272	2.904	1.237	2.449	1.013	2.028
2.262	4.162	3.531	1.048	1.417	1.594	3.558	1.702	1.956	1.286
3.973	3.493	1.691	3.246	2.600	4.683	3.667	4.641	3.274	4.739
1.411	1.568	0.709	1.908	2.580	1.461	2.729	5.859	2.888	0.146
2.416	1.431	3.960	1.198	1.046	2.869	6.104	3.508	4.971	6.288
3.240	1.273	3.420	1.785	3.923	4.030	2.579	4.832	3.118	4.303
1.458	2.949	2.079	3.588	1.777	3.941	1.778	1.587	1.203	1.796
4.904	5.356	5.279	5.169	10.262	5.529	10.492	5.255	5.913	10.542

Elaborado por: G. Cuenca

Continúa…

Sigue…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Tamaño de muestra n=100

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0.919	4.446	1.333	4.688	2.057	4.830	0.712	4.278	0.169	4.367
0.177	3.187	2.683	2.848	0.209	2.757	0.875	2.298	2.544	2.163
6.596	7.337	7.012	6.574	7.968	6.449	9.439	9.518	11.604	11.447
0.511	0.453	2.859	3.076	0.471	1.660	3.090	3.111	2.044	3.462
7.019	5.192	6.730	1.971	7.147	1.580	7.974	5.108	3.734	3.566
5.082	5.470	6.423	10.571	10.914	6.174	5.790	4.342	6.142	7.809
5.216	0.577	0.070	4.630	5.805	6.604	6.580	2.890	6.806	0.555
5.508	5.838	0.860	1.988	0.277	8.785	3.236	0.196	8.269	9.167
7.531	7.868	6.406	6.971	10.050	5.283	10.384	5.845	6.612	5.274
1.219	2.384	2.895	1.906	5.324	2.125	4.701	2.947	2.949	2.660
7.965	5.846	8.665	5.610	5.002	4.962	4.533	2.566	6.117	4.267
0.773	2.720	1.633	2.129	1.205	0.556	0.720	0.929	0.521	0.184
0.449	2.003	4.027	2.725	2.785	2.466	4.397	4.580	4.170	2.684
6.455	7.185	7.863	3.065	4.945	2.619	1.508	1.379	1.302	1.192
4.833	1.780	2.271	2.454	1.586	2.595	2.939	1.324	1.128	4.257
1.653	2.624	0.779	0.238	0.172	1.338	2.313	1.290	1.440	2.493
5.029	3.679	3.578	4.295	3.063	5.534	4.939	4.058	5.257	4.231
3.027	6.997	3.002	3.647	1.625	2.274	1.651	3.216	4.641	1.289
4.947	4.069	5.157	4.715	5.132	4.946	4.934	0.827	4.110	4.323
1.047	1.023	4.330	3.551	4.398	2.603	1.513	1.317	4.113	1.171
2.160	3.286	4.083	5.008	5.835	4.443	5.692	6.458	6.420	6.410
3.437	4.315	2.402	3.724	4.977	2.237	3.348	3.577	4.924	3.505
2.650	4.631	4.361	2.749	4.810	4.374	2.653	2.303	2.003	4.456
4.387	4.031	2.061	1.303	2.059	3.308	2.004	4.271	4.820	3.195
3.349	2.733	2.041	4.734	3.214	3.010	2.136	2.080	1.895	2.561
5.950	5.100	5.241	8.751	8.797	5.607	6.784	5.941	8.083	5.750
2.180	4.490	1.422	3.254	2.905	3.984	4.586	3.767	4.684	5.501
1.096	3.067	1.154	3.048	2.318	2.521	2.126	1.073	4.016	4.150
2.541	3.118	1.148	1.888	3.642	1.282	3.155	0.424	3.997	1.188
1.782	2.558	1.205	1.638	2.784	3.678	3.476	1.468	1.700	1.718
5.260	2.272	3.359	1.292	4.339	4.104	2.877	3.287	3.006	2.248
3.872	3.320	1.821	3.069	1.131	3.017	1.615	1.421	3.691	2.732
0.977	5.323	3.878	5.360	1.664	1.563	3.183	1.979	1.301	3.020
1.538	0.544	1.913	1.379	4.166	1.871	2.308	4.817	3.755	1.849
3.097	3.744	2.224	2.974	2.029	3.689	3.154	0.622	2.684	3.376
2.264	1.749	1.351	1.056	2.011	1.089	1.400	1.754	2.505	2.449
1.922	1.135	2.030	2.992	1.665	1.782	3.061	4.930	3.322	3.144
5.309	1.632	5.489	0.409	6.785	5.881	5.931	6.314	7.342	5.589
2.024	2.555	3.541	3.185	1.807	1.535	2.964	3.691	1.676	1.626
1.962	1.450	2.667	3.870	4.081	1.627	3.066	4.395	4.515	3.001
3.514	6.951	1.244	2.751	2.468	2.018	2.323	1.230	4.707	1.959
0.750	0.800	0.449	1.177	1.890	1.178	2.311	0.704	0.035	1.687
0.537	1.374	1.158	5.727	1.508	5.355	1.709	5.413	1.359	1.518
10.796	10.465	10.521	8.610	8.558	8.599	8.032	10.596	8.551	8.123
1.056	1.232	2.367	1.325	0.526	1.676	2.971	2.542	2.939	2.814
8.118	8.500	9.924	9.254	10.405	9.636	10.348	9.218	9.805	10.046
4.040	4.244	3.613	3.099	4.680	6.852	2.452	3.183	4.986	5.924
4.949	7.182	4.366	3.236	4.999	3.716	3.930	4.859	7.191	4.460
3.296	7.442	7.542	4.733	4.720	3.237	3.182	4.800	5.351	3.424
5.786	6.620	6.717	5.252	5.305	5.491	6.526	5.525	6.722	4.637

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias de los datos originales es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \\ \overline{X}_6 \\ \overline{X}_7 \\ \overline{X}_8 \\ \overline{X}_9 \\ \overline{X}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.164 \\ 3.445 \\ 3.206 \\ 3.350 \\ 3.614 \\ 3.391 \\ 3.741 \\ 3.588 \\ 3.526 \\ 3.532 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminación por Filas

Debido a que los datos faltantes recayeron en las variables X_3 y X_8 es decir en: $X_{3,3}$=2.851, $X_{9,3}$=1.414, $X_{15,3}$=1.069, $X_{18,3}$=6.462, $X_{21,3}$=3.914, $X_{24,3}$=1.131, $X_{31,3}$=6.562, $X_{33,3}$=2.254, $X_{39,3}$=1.689, $X_{42,3}$=1.432, $X_{43,3}$=3.693, $X_{47,3}$=3.960, $X_{48,3}$=3.420, $X_{52,3}$=2.683, $X_{55,3}$=6.730, $X_{58,3}$=0.860, $X_{59,3}$=6.406, $X_{67,3}$=3.578, $X_{69,3}$=5.157, $X_{71,3}$=4.083, $X_{74,3}$=2.061, $X_{79,3}$=1.148, $X_{81,3}$=3.359, $X_{84,3}$=1.913, $X_{86,3}$=1.351, $X_{6,8}$=2.390, $X_{12,8}$=1.060, $X_{17,8}$=1.383, $X_{23,8}$=1.219, $X_{30,8}$=2.582, $X_{34,8}$=5.997, $X_{37,8}$=3.952, $X_{41,8}$=19.664, $X_{46,8}$=5.859, $X_{50,8}$=5.255, $X_{53,8}$=9.518, $X_{60,8}$=2.947, $X_{61,8}$=2.566, $X_{62,8}$=0.929, $X_{63,8}$=4.580, $X_{75,8}$=2.080, $X_{77,8}$=3.767, $X_{87,8}$=4.930, $X_{88,8}$=6.314, $X_{92,8}$=0.704, $X_{93,8}$=5.413, $X_{97,8}$=3.183, $X_{98,8}$=4.859, $X_{99,8}$=4.800 y $X_{100,8}$=5.525, se procede a prescindir de las filas que tienen estos valores “faltantes”(Ver Tabla 4.32).

Tabla 4.32

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de datos con cincuenta filas eliminadas

X_1	X_2	$\boldsymbol{X_3}$	X_4	X_5	X_6	X_7	$\boldsymbol{X_8}$	X_9	X_{10}
6.726	6.168	3.447	4.124	4.017	4.550	5.149	4.957	6.743	3.346
1.168	1.763	0.622	2.786	4.782	3.397	3.994	1.921	1.714	2.373
0.283	0.163	0.814	2.302	1.101	2.715	0.470	0.462	0.814	2.980
3.054	1.277	3.099	1.934	0.206	1.929	0.575	1.089	0.289	1.435
0.668	1.180	3.188	2.429	4.009	3.122	2.252	1.105	4.255	2.085
2.576	2.268	3.545	1.127	2.069	3.408	3.349	3.863	2.491	3.414
1.589	1.276	2.751	0.819	2.093	2.700	2.421	2.740	2.224	2.820
0.706	1.523	4.851	1.602	4.022	1.399	1.671	2.287	4.115	1.108
1.535	1.701	1.466	1.192	2.600	3.875	2.265	1.995	1.767	3.724
3.876	1.856	1.723	1.872	2.278	1.143	1.079	2.902	1.891	2.860
4.755	3.972	1.879	3.576	2.127	2.750	1.792	1.623	2.187	3.749
2.650	2.213	1.241	2.986	2.135	1.215	1.608	1.562	1.126	1.524
1.530	2.504	2.470	2.068	1.122	0.344	3.872	1.045	3.311	1.349
2.565	2.414	0.923	2.062	5.526	2.385	1.990	2.036	2.973	2.421
1.439	3.829	1.334	1.294	1.279	2.422	2.949	2.741	1.932	2.659
3.888	1.524	3.675	4.748	7.131	7.411	7.808	1.854	5.252	5.882
1.603	1.507	4.001	2.180	1.244	1.084	2.942	1.930	2.045	1.612
2.633	1.371	1.907	2.073	1.416	1.304	2.665	3.206	1.354	1.596
7.423	6.601	6.400	3.976	3.149	1.643	7.398	7.141	4.436	6.879
0.804	2.132	5.803	3.424	2.305	3.475	7.773	7.824	2.168	4.732
1.661	1.418	2.400	3.917	4.567	1.186	1.240	3.133	1.511	1.656
4.955	2.839	4.372	3.730	3.567	3.045	3.825	5.077	3.874	2.255
2.509	1.469	3.747	3.180	7.432	4.313	7.123	4.382	7.261	4.588
2.262	4.162	3.531	1.048	1.417	1.594	3.558	1.702	1.956	1.286
3.973	3.493	1.691	3.246	2.600	4.683	3.667	4.641	3.274	4.739
1.458	2.949	2.079	3.588	1.777	3.941	1.778	1.587	1.203	1.796
0.919	4.446	1.333	4.688	2.057	4.830	0.712	4.278	0.169	4.367
0.511	0.453	2.859	3.076	0.471	1.660	3.090	3.111	2.044	3.462
5.082	5.470	6.423	10.571	10.914	6.174	5.790	4.342	6.142	7.809
5.216	0.577	0.070	4.630	5.805	6.604	6.580	2.890	6.806	0.555
6.455	7.185	7.863	3.065	4.945	2.619	1.508	1.379	1.302	1.192
4.833	1.780	2.271	2.454	1.586	2.595	2.939	1.324	1.128	4.257
1.653	2.624	0.779	0.238	0.172	1.338	2.313	1.290	1.440	2.493
3.027	6.997	3.002	3.647	1.625	2.274	1.651	3.216	4.641	1.289
1.047	1.023	4.330	3.551	4.398	2.603	1.513	1.317	4.113	1.171
3.437	4.315	2.402	3.724	4.977	2.237	3.348	3.577	4.924	3.505
2.650	4.631	4.361	2.749	4.810	4.374	2.653	2.303	2.003	4.456
5.950	5.100	5.241	8.751	8.797	5.607	6.784	5.941	8.083	5.750
1.096	3.067	1.154	3.048	2.318	2.521	2.126	1.073	4.016	4.150
1.782	2.558	1.205	1.638	2.784	3.678	3.476	1.468	1.700	1.718
3.872	3.320	1.821	3.069	1.131	3.017	1.615	1.421	3.691	2.732
0.977	5.323	3.878	5.360	1.664	1.563	3.183	1.979	1.301	3.020
3.097	3.744	2.224	2.974	2.029	3.689	3.154	0.622	2.684	3.376
2.024	2.555	3.541	3.185	1.807	1.535	2.964	3.691	1.676	1.626
1.962	1.450	2.667	3.870	4.081	1.627	3.066	4.395	4.515	3.001
3.514	6.951	1.244	2.751	2.468	2.018	2.323	1.230	4.707	1.959
10.796	10.465	10.521	8.610	8.558	8.599	8.032	10.596	8.551	8.123
1.056	1.232	2.367	1.325	0.526	1.676	2.971	2.542	2.939	2.814
8.118	8.500	9.924	9.254	10.405	9.636	10.348	9.218	9.805	10.046
6.726	6.168	3.447	4.124	4.017	4.550	5.149	4.957	6.743	3.346

Elaborado por: G. Cuenca

El vector de medias para las cincuenta filas restantes es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \\ \overline{X}_6 \\ \overline{X}_7 \\ \overline{X}_8 \\ \overline{X}_9 \\ \overline{X}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.082 \\ 3.270 \\ 3.158 \\ 3.353 \\ 3.366 \\ 3.161 \\ 3.450 \\ 3.059 \\ 3.346 \\ 3.222 \end{pmatrix}$$

El vector de medias de los datos originales y de los datos con filas eliminadas no coincide.

Ahora analicemos el efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas*, y *matriz de correlaciones*, la eliminación de cincuenta filas, con un tamaño de muestra *n*=100.

CUADRO 4.41

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	4.386									
X_2	2.700	4.854								
X_3	2.701	2.336	4.528							
X_4	2.165	2.247	2.041	3.978						
X_5	2.780	2.346	3.072	2.968	6.029					
X_6	2.252	1.997	1.489	2.269	2.240	4.084				
X_7	2.706	1.857	2.925	2.329	3.696	2.695	5.563			
X_8	1.637	2.954	2.226	1.497	2.897	2.173	3.059	7.626		
X_9	3.019	2.133	2.366	2.365	3.272	2.508	3.039	1.543	5.322	
X_{10}	2.552	2.045	2.371	2.044	2.521	3.192	3.685	2.716	2.939	5.072

Matriz de Varianzas y Covarianzas (Cincuenta Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	5.136									
X_2	3.729	5.163								
X_3	3.001	3.035	4.813							
X_4	2.889	2.730	2.849	4.413						
X_5	3.226	2.320	3.247	4.180	6.452					
X_6	2.606	1.939	2.009	2.879	3.690	3.844				
X_7	2.925	1.975	2.881	2.848	3.717	3.004	4.956			
X_8	3.041	2.650	3.279	2.847	2.932	2.358	3.560	4.705		
X_9	3.303	2.498	2.551	3.175	4.367	2.924	3.744	3.001	5.132	
X_{10}	2.468	2.255	2.569	2.878	3.074	2.689	3.055	2.958	2.433	3.854

Elaborado por: G. Cuenca

Analizando el Cuadro 4.41, se puede apreciar que la mayor covarianza en la matriz de datos originales se da entre las variables X_5 y X_9 es decir 3.272; mientras que en la matriz con cincuenta filas eliminadas este valor aumenta a 4.367.

CUADRO 4.42

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Eliminación por Filas

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Correlaciones (Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	1.000									
X_2	0.585	1.000								
X_3	0.606	0.498	1.000							
X_4	0.518	0.511	0.481	1.000						
X_5	0.541	0.434	0.588	0.606	1.000					
X_6	0.532	0.448	0.346	0.563	0.451	1.000				
X_7	0.548	0.357	0.583	0.495	0.638	0.565	1.000			
X_8	0.283	0.486	0.379	0.272	0.427	0.389	0.470	1.000		
X_9	0.625	0.420	0.482	0.514	0.578	0.538	0.559	0.242	1.000	
X_{10}	0.541	0.412	0.495	0.455	0.456	0.701	0.694	0.437	0.566	1.000

Matriz de Correlaciones (Cincuenta Filas Eliminadas)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	1.000									
X_2	0.724	1.000								
X_3	0.604	0.609	1.000							
X_4	0.607	0.572	0.618	1.000						
X_5	0.560	0.402	0.583	0.783	1.000					
X_6	0.586	0.435	0.467	0.699	0.741	1.000				
X_7	0.580	0.390	0.590	0.609	0.657	0.688	1.000			
X_8	0.619	0.538	0.689	0.625	0.532	0.554	0.737	1.000		
X_9	0.643	0.485	0.513	0.667	0.759	0.658	0.742	0.611	1.000	
X_{10}	0.555	0.505	0.596	0.698	0.616	0.699	0.699	0.695	0.547	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

En la matriz de correlaciones de datos originales, la mayor correlación se da entre las variables X_7 y X_{10}, es decir 0.701, cuyo valor se disminuye a 0.699 en la matriz de correlaciones con cincuenta filas eliminadas. La mayor correlación en la matriz con cincuenta filas eliminadas es entre las variables X_4 y $X_{5,}$ es decir 0.783. En general, se puede decir que la correlación entre las variables, se incrementó en la matriz con 50 filas eliminadas.

CUADRO 4.43

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Eliminación por Filas

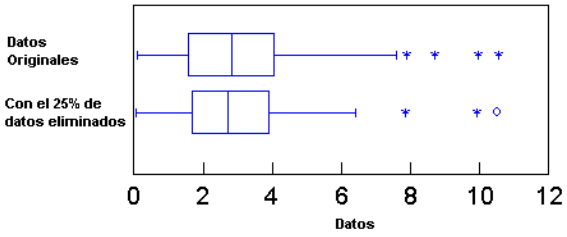
Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_3" y "*Variable* X_8"

Estimadores "*Variable* X_3"

Estimadores		Datos Originales	Con el 25% de datos eliminadas en X_3
n		100	50
Media		3,206	3,158
Mediana		2,801	2,709
Moda		0,070	3,450
Varianza		4,528	4,813
Desviación Estándar		2,128	2,194
Error Estándar		0,213	0,310
Coeficiente de Asimetría		1,194	1,559
Curtosis		1,351	2,943
Rango		10,450	10,450
Mínimo		0,070	0,070
Máximo		10,520	10,520
Percentiles	25	1,508	1,635
	50	2,801	2,709
	75	4,020	3,909

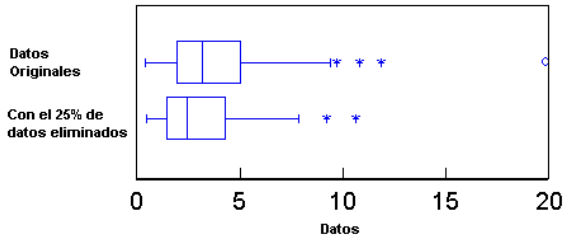
Diagrama de Cajas "*Variable* X_3"



Estimadores "*Variable* X_8"

Estimadores		Datos Originales	Con el 25% de datos eliminadas en X_8
n		100	50
Media		3,588	3,059
Mediana		2,959	2,423
Moda		0,200	4,960
Varianza		7,626	4,705
Desviación Estándar		2,762	2,169
Error Estándar		0,276	0,307
Coeficiente de Asimetría		2,576	1,619
Curtosis		11,269	2,870
Rango		19,470	10,130
Mínimo		0,200	0,460
Máximo		19,660	10,600
Percentiles	25	1,715	1,456
	50	2,959	2,423

Diagrama de Cajas "*Variable* X_8"



Elaborado por: G. Cuenca

En el Cuadro 4.43, podemos apreciar que con el 25% de datos eliminados en la tercera columna de la matriz de datos (Variable X_3**)**, el valor de la media y la mediana disminuyó de 3.206 a 3.158 y de 2.801 a 2.709, respectivamente. La varianza de la variable X_3, con 25% de datos eliminados aumentó de 4.528 a 4.813. En la variable X_8, el valor de la media y la mediana disminuyeron su valor, así como también el valor de la varianza.

Método de Imputación por la Media y Regresión

Estos métodos se aplican a la misma matriz de datos utilizada en el método de eliminación por filas, es decir se completan datos en la variable X_3 y X_8, que presentan veinte y cinco valores faltantes cada una. A través del Método de Imputación por Media, se procede a calcular la media aritmética de la variable X_3 con los veinticinco datos faltantes, cuyo valor es 3.219, entonces reemplazamos en $X_{3,3}$, $X_{9,3}$, $X_{15,3}$, $X_{18,3}$, $X_{21,3}$, $X_{24,3}$, $X_{31,3}$, $X_{33,3}$, $X_{39,3}$, $X_{42,3}$, $X_{43,3}$, $X_{47,3}$, $X_{48,3}$, $X_{52,3}$, $X_{55,3}$, $X_{58,3}$, $X_{59,3}$, $X_{67,3}$, $X_{69,3}$, $X_{71,3}$, $X_{74,3}$, $X_{79,3}$, $X_{81,3}$, $X_{84,3}$, $X_{86,3}$, también se calcula el valor de la media de la variable X_8 , 3.298, mismo que se remplaza en $X_{6,8}$, $X_{12,8}$, $X_{17,8}$, $X_{23,8}$, $X_{30,8}$, $X_{34,8}$, $X_{37,8}$, $X_{41,8}$, $X_{46,8}$, $X_{50,8}$, $X_{53,8}$, $X_{60,8}$, $X_{61,8}$, $X_{62,8}$, $X_{63,8}$, $X_{75,8}$, $X_{77,8}$, $X_{87,8}$, $X_{88,8}$, $X_{92,8}$, $X_{93,8}$, $X_{97,8}$, $X_{98,8}$, $X_{99,8}$ y en $X_{100,8}$. La matriz de datos resultante con cincuenta valores completados por *imputación por la media* y *regresión*, se muestra en la Tabla 4.33 y 4.34 respectivamente.

Tabla 4.33

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Imputación por Media

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
6.726	6.168	3,447	4.124	4.017	4.550	5.149	4.957	6.743	3.346
1.168	1.763	0,622	2.786	4.782	3.397	3.994	1.921	1.714	2.373
3.238	4.557	**3,219**	3.335	0.641	10.599	10.406	11.662	0.222	10.237
0.283	0.163	0,814	2.302	1.101	2.715	0.470	0.462	0.814	2.980
3.054	1.277	3,099	1.934	0.206	1.929	0.575	1.089	0.289	1.435
3.483	3.547	3,129	5.710	3.334	3.645	5.478	**3.298**	4.686	3.469
0.668	1.180	3,188	2.429	4.009	3.122	2.252	1.105	4.255	2.085
2.576	2.268	3,545	1.127	2.069	3.408	3.349	3.863	2.491	3.414
4.385	1.285	**3,219**	1.937	1.812	2.162	2.081	4.421	4.249	4.599
1.589	1.276	2,751	0.819	2.093	2.700	2.421	2.740	2.224	2.820
0.706	1.523	4,851	1.602	4.022	1.399	1.671	2.287	4.115	1.108
1.721	3.194	1,051	3.420	1.406	3.575	1.586	**3.298**	1.712	3.696
1.535	1.701	1,466	1.192	2.600	3.875	2.265	1.995	1.767	3.724
3.876	1.856	1,723	1.872	2.278	1.143	1.079	2.902	1.891	2.860
0.737	2.047	**3,219**	2.488	1.351	1.041	2.934	2.882	1.617	1.052
2.750	5.298	2,372	5.287	5.913	4.634	4.520	3.012	4.673	3.123
1.373	1.996	3,664	1.678	3.197	1.797	2.731	**3.298**	2.728	1.343
3.386	1.849	**3,219**	5.218	6.036	2.054	6.604	2.182	1.310	2.984
4.755	3.972	1,879	3.576	2.127	2.750	1.792	1.623	2.187	3.749
2.650	2.213	1,241	2.986	2.135	1.215	1.608	1.562	1.126	1.524
5.571	3.181	**3,219**	5.382	3.060	3.755	1.035	4.237	5.737	5.339
1.530	2.504	2,470	2.068	1.122	0.344	3.872	1.045	3.311	1.349
4.779	4.420	3,471	4.447	0.445	4.719	3.270	**3.298**	4.179	3.091
2.452	4.650	**3,219**	2.951	4.005	0.832	2.911	2.574	2.371	1.803
2.565	2.414	0,923	2.062	5.526	2.385	1.990	2.036	2.973	2.421
1.439	3.829	1,334	1.294	1.279	2.422	2.949	2.741	1.932	2.659
3.888	1.524	3,675	4.748	7.131	7.411	7.808	1.854	5.252	5.882
1.603	1.507	4,001	2.180	1.244	1.084	2.942	1.930	2.045	1.612
2.633	1.371	1,907	2.073	1.416	1.304	2.665	3.206	1.354	1.596
2.086	1.962	1,252	1.197	1.661	1.713	2.182	**3.298**	2.399	2.791
2.800	1.987	**3,219**	1.832	6.257	1.129	6.075	7.053	1.242	6.120
7.423	6.601	6,400	3.976	3.149	1.643	7.398	7.141	4.436	6.879
3.786	6.453	**3,219**	6.418	6.050	5.496	3.591	6.079	1.401	3.806
1.755	6.641	1,837	5.535	3.645	5.206	3.588	**3.298**	3.233	1.775
0.804	2.132	5,803	3.424	2.305	3.475	7.773	7.824	2.168	4.732
1.661	1.418	2,400	3.917	4.567	1.186	1.240	3.133	1.511	1.656
4.292	4.003	3,284	4.179	3.924	4.342	4.589	**3.298**	1.153	4.109
4.955	2.839	4,372	3.730	3.567	3.045	3.825	5.077	3.874	2.255
4.301	1.327	**3,219**	2.704	3.954	2.647	4.671	2.970	1.283	2.873
2.509	1.469	3,747	3.180	7.432	4.313	7.123	4.382	7.261	4.588
1.275	9.904	1,865	1.178	6.441	3.053	1.436	**3.298**	0.179	1.579
4.694	3.156	**3,219**	7.665	6.024	4.361	4.524	2.119	6.514	2.655
0.705	3.267	**3,219**	0.557	2.272	2.904	1.237	2.449	1.013	2.028
2.262	4.162	3,531	1.048	1.417	1.594	3.558	1.702	1.956	1.286
3.973	3.493	1,691	3.246	2.600	4.683	3.667	4.641	3.274	4.739
1.411	1.568	0,709	1.908	2.580	1.461	2.729	**3.298**	2.888	0.146
2.416	1.431	**3,219**	1.198	1.046	2.869	6.104	3.508	4.971	6.288
3.240	1.273	**3,219**	1.785	3.923	4.030	2.579	4.832	3.118	4.303
1.458	2.949	2,079	3.588	1.777	3.941	1.778	1.587	1.203	1.796
4.904	5.356	5,279	5.169	10.262	5.529	10.492	**3.298**	5.913	10.542

Elaborado por: G. Cuenca

Viene…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Imputación por Media

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0.919	4.446	1,333	4.688	2.057	4.830	0.712	4.278	0.169	4.367
0.177	3.187	**3,219**	2.848	0.209	2.757	0.875	2.298	2.544	2.163
6.596	7.337	7,012	6.574	7.968	6.449	9.439	**3.298**	11.604	11.447
0.511	0.453	2,859	3.076	0.471	1.660	3.090	3.111	2.044	3.462
7.019	5.192	**3,219**	1.971	7.147	1.580	7.974	5.108	3.734	3.566
5.082	5.470	6,423	10.571	10.914	6.174	5.790	4.342	6.142	7.809
5.216	0.577	0,070	4.630	5.805	6.604	6.580	2.890	6.806	0.555
5.508	5.838	**3,219**	1.988	0.277	8.785	3.236	0.196	8.269	9.167
7.531	7.868	**3,219**	6.971	10.050	5.283	10.384	5.845	6.612	5.274
1.219	2.384	2,895	1.906	5.324	2.125	4.701	**3.298**	2.949	2.660
7.965	5.846	8,665	5.610	5.002	4.962	4.533	**3.298**	6.117	4.267
0.773	2.720	1,633	2.129	1.205	0.556	0.720	**3.298**	0.521	0.184
0.449	2.003	4,027	2.725	2.785	2.466	4.397	**3.298**	4.170	2.684
6.455	7.185	7,863	3.065	4.945	2.619	1.508	1.379	1.302	1.192
4.833	1.780	2,271	2.454	1.586	2.595	2.939	1.324	1.128	4.257
1.653	2.624	0,779	0.238	0.172	1.338	2.313	1.290	1.440	2.493
5.029	3.679	**3,219**	4.295	3.063	5.534	4.939	4.058	5.257	4.231
3.027	6.997	3,002	3.647	1.625	2.274	1.651	3.216	4.641	1.289
4.947	4.069	**3,219**	4.715	5.132	4.946	4.934	0.827	4.110	4.323
1.047	1.023	4,330	3.551	4.398	2.603	1.513	1.317	4.113	1.171
2.160	3.286	**3,219**	5.008	5.835	4.443	5.692	6.458	6.420	6.410
3.437	4.315	2,402	3.724	4.977	2.237	3.348	3.577	4.924	3.505
2.650	4.631	4,361	2.749	4.810	4.374	2.653	2.303	2.003	4.456
4.387	4.031	**3,219**	1.303	2.059	3.308	2.004	4.271	4.820	3.195
3.349	2.733	2,041	4.734	3.214	3.010	2.136	**3.298**	1.895	2.561
5.950	5.100	5,241	8.751	8.797	5.607	6.784	5.941	8.083	5.750
2.180	4.490	1,422	3.254	2.905	3.984	4.586	**3.298**	4.684	5.501
1.096	3.067	1,154	3.048	2.318	2.521	2.126	1.073	4.016	4.150
2.541	3.118	**3,219**	1.888	3.642	1.282	3.155	0.424	3.997	1.188
1.782	2.558	1,205	1.638	2.784	3.678	3.476	1.468	1.700	1.718
5.260	2.272	**3,219**	1.292	4.339	4.104	2.877	3.287	3.006	2.248
3.872	3.320	1,821	3.069	1.131	3.017	1.615	1.421	3.691	2.732
0.977	5.323	3,878	5.360	1.664	1.563	3.183	1.979	1.301	3.020
1.538	0.544	**3,219**	1.379	4.166	1.871	2.308	4.817	3.755	1.849
3.097	3.744	2,224	2.974	2.029	3.689	3.154	0.622	2.684	3.376
2.264	1.749	**3,219**	1.056	2.011	1.089	1.400	1.754	2.505	2.449
1.922	1.135	2,030	2.992	1.665	1.782	3.061	**3.298**	3.322	3.144
5.309	1.632	5,489	0.409	6.785	5.881	5.931	**3.298**	7.342	5.589
2.024	2.555	3,541	3.185	1.807	1.535	2.964	3.691	1.676	1.626
1.962	1.450	2,667	3.870	4.081	1.627	3.066	4.395	4.515	3.001
3.514	6.951	1,244	2.751	2.468	2.018	2.323	1.230	4.707	1.959
0.750	0.800	0,449	1.177	1.890	1.178	2.311	**3.298**	0.035	1.687
0.537	1.374	1,158	5.727	1.508	5.355	1.709	**3.298**	1.359	1.518
10.796	10.465	10,521	8.610	8.558	8.599	8.032	10.596	8.551	8.123
1.056	1.232	2,367	1.325	0.526	1.676	2.971	2.542	2.939	2.814
8.118	8.500	9,924	9.254	10.405	9.636	10.348	9.218	9.805	10.046
4.040	4.244	3,613	3.099	4.680	6.852	2.452	**3.298**	4.986	5.924
4.949	7.182	4,366	3.236	4.999	3.716	3.930	**3.298**	7.191	4.460
3.296	7.442	7,542	4.733	4.720	3.237	3.182	**3.298**	5.351	3.424
5.786	6.620	6,717	5.252	5.305	5.491	6.526	**3.298**	6.722	4.637

Tabla 4.34

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Imputación por Regresiòn

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
6.726	6.168	3,447	4.124	4.017	4.550	5.149	4,957	6.743	3.346
1.168	1.763	0,622	2.786	4.782	3.397	3.994	1,921	1.714	2.373
3.238	4.557	**2,849**	3.335	0.641	10.599	10.406	11,662	0.222	10.237
0.283	0.163	0,814	2.302	1.101	2.715	0.470	0,462	0.814	2.980
3.054	1.277	3,099	1.934	0.206	1.929	0.575	1,089	0.289	1.435
3.483	3.547	3,129	5.710	3.334	3.645	5.478	**2,386**	4.686	3.469
0.668	1.180	3,188	2.429	4.009	3.122	2.252	1,105	4.255	2.085
2.576	2.268	3,545	1.127	2.069	3.408	3.349	3,863	2.491	3.414
4.385	1.285	**1,403**	1.937	1.812	2.162	2.081	4,421	4.249	4.599
1.589	1.276	2,751	0.819	2.093	2.700	2.421	2,740	2.224	2.820
0.706	1.523	4,851	1.602	4.022	1.399	1.671	2,287	4.115	1.108
1.721	3.194	1,051	3.420	1.406	3.575	1.586	**1,102**	1.712	3.696
1.535	1.701	1,466	1.192	2.600	3.875	2.265	1,995	1.767	3.724
3.876	1.856	1,723	1.872	2.278	1.143	1.079	2,902	1.891	2.860
0.737	2.047	**1,057**	2.488	1.351	1.041	2.934	2,882	1.617	1.052
2.750	5.298	2,372	5.287	5.913	4.634	4.520	3,012	4.673	3.123
1.373	1.996	3,664	1.678	3.197	1.797	2.731	**1,374**	2.728	1.343
3.386	1.849	**6,399**	5.218	6.036	2.054	6.604	2,182	1.310	2.984
4.755	3.972	1,879	3.576	2.127	2.750	1.792	1,623	2.187	3.749
2.650	2.213	1,241	2.986	2.135	1.215	1.608	1,562	1.126	1.524
5.571	3.181	**3,909**	5.382	3.060	3.755	1.035	4,237	5.737	5.339
1.530	2.504	2,470	2.068	1.122	0.344	3.872	1,045	3.311	1.349
4.779	4.420	3,471	4.447	0.445	4.719	3.270	**1,207**	4.179	3.091
2.452	4.650	**1,098**	2.951	4.005	0.832	2.911	2,574	2.371	1.803
2.565	2.414	0,923	2.062	5.526	2.385	1.990	2,036	2.973	2.421
1.439	3.829	1,334	1.294	1.279	2.422	2.949	2,741	1.932	2.659
3.888	1.524	3,675	4.748	7.131	7.411	7.808	1,854	5.252	5.882
1.603	1.507	4,001	2.180	1.244	1.084	2.942	1,930	2.045	1.612
2.633	1.371	1,907	2.073	1.416	1.304	2.665	3,206	1.354	1.596
2.086	1.962	1,252	1.197	1.661	1.713	2.182	**2,601**	2.399	2.791
2.800	1.987	**6,554**	1.832	6.257	1.129	6.075	7,053	1.242	6.120
7.423	6.601	6,400	3.976	3.149	1.643	7.398	7,141	4.436	6.879
3.786	6.453	**2,226**	6.418	6.050	5.496	3.591	6,079	1.401	3.806
1.755	6.641	1,837	5.535	3.645	5.206	3.588	**6,003**	3.233	1.775
0.804	2.132	5,803	3.424	2.305	3.475	7.773	7,824	2.168	4.732
1.661	1.418	2,400	3.917	4.567	1.186	1.240	3,133	1.511	1.656
4.292	4.003	3,284	4.179	3.924	4.342	4.589	**4,007**	1.153	4.109
4.955	2.839	4,372	3.730	3.567	3.045	3.825	5,077	3.874	2.255
4.301	1.327	**1,673**	2.704	3.954	2.647	4.671	2,970	1.283	2.873
2.509	1.469	3,747	3.180	7.432	4.313	7.123	4,382	7.261	4.588
1.275	9.904	1,865	1.178	6.441	3.053	1.436	**19,618**	0.179	1.579
4.694	3.156	**1,429**	7.665	6.024	4.361	4.524	2,119	6.514	2.655
0.705	3.267	**3,688**	0.557	2.272	2.904	1.237	2,449	1.013	2.028
2.262	4.162	3,531	1.048	1.417	1.594	3.558	1,702	1.956	1.286
3.973	3.493	1,691	3.246	2.600	4.683	3.667	4,641	3.274	4.739
1.411	1.568	0,709	1.908	2.580	1.461	2.729	**5,832**	2.888	0.146
2.416	1.431	**3,952**	1.198	1.046	2.869	6.104	3,508	4.971	6.288
3.240	1.273	**3,411**	1.785	3.923	4.030	2.579	4,832	3.118	4.303
1.458	2.949	2,079	3.588	1.777	3.941	1.778	1,587	1.203	1.796
4.904	5.356	5,279	5.169	10.262	5.529	10.492	**5,243**	5.913	10.542

Continúa…

Viene…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Matriz de Datos de variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Imputación por Regresiòn

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0.919	4.446	1,333	4.688	2.057	4.830	0.712	4,278	0.169	4.367
0.177	3.187	**2,689**	2.848	0.209	2.757	0.875	2,298	2.544	2.163
6.596	7.337	7,012	6.574	7.968	6.449	9.439	**9,492**	11.604	11.447
0.511	0.453	2,859	3.076	0.471	1.660	3.090	3,111	2.044	3.462
7.019	5.192	**6,713**	1.971	7.147	1.580	7.974	5,108	3.734	3.566
5.082	5.470	6,423	10.571	10.914	6.174	5.790	4,342	6.142	7.809
5.216	0.577	0,070	4.630	5.805	6.604	6.580	2,890	6.806	0.555
5.508	5.838	**0,853**	1.988	0.277	8.785	3.236	0,196	8.269	9.167
7.531	7.868	**6,397**	6.971	10.050	5.283	10.384	5,845	6.612	5.274
1.219	2.384	2,895	1.906	5.324	2.125	4.701	**3,003**	2.949	2.660
7.965	5.846	8,665	5.610	5.002	4.962	4.533	**2,572**	6.117	4.267
0.773	2.720	1,633	2.129	1.205	0.556	0.720	**0,919**	0.521	0.184
0.449	2.003	4,027	2.725	2.785	2.466	4.397	**4,489**	4.170	2.684
6.455	7.185	7,863	3.065	4.945	2.619	1.508	1,379	1.302	1.192
4.833	1.780	2,271	2.454	1.586	2.595	2.939	1,324	1.128	4.257
1.653	2.624	0,779	0.238	0.172	1.338	2.313	1,290	1.440	2.493
5.029	3.679	**3,562**	4.295	3.063	5.534	4.939	4,058	5.257	4.231
3.027	6.997	3,002	3.647	1.625	2.274	1.651	3,216	4.641	1.289
4.947	4.069	**4,993**	4.715	5.132	4.946	4.934	0,827	4.110	4.323
1.047	1.023	4,330	3.551	4.398	2.603	1.513	1,317	4.113	1.171
2.160	3.286	**4,052**	5.008	5.835	4.443	5.692	6,458	6.420	6.410
3.437	4.315	2,402	3.724	4.977	2.237	3.348	3,577	4.924	3.505
2.650	4.631	4,361	2.749	4.810	4.374	2.653	2,303	2.003	4.456
4.387	4.031	**2,075**	1.303	2.059	3.308	2.004	4,271	4.820	3.195
3.349	2.733	2,041	4.734	3.214	3.010	2.136	**2,078**	1.895	2.561
5.950	5.100	5,241	8.751	8.797	5.607	6.784	5,941	8.083	5.750
2.180	4.490	1,422	3.254	2.905	3.984	4.586	**3,642**	4.684	5.501
1.096	3.067	1,154	3.048	2.318	2.521	2.126	1,073	4.016	4.150
2.541	3.118	**1,129**	1.888	3.642	1.282	3.155	0,424	3.997	1.188
1.782	2.558	1,205	1.638	2.784	3.678	3.476	1,468	1.700	1.718
5.260	2.272	**3,347**	1.292	4.339	4.104	2.877	3,287	3.006	2.248
3.872	3.320	1,821	3.069	1.131	3.017	1.615	1,421	3.691	2.732
0.977	5.323	3,878	5.360	1.664	1.563	3.183	1,979	1.301	3.020
1.538	0.544	**1,922**	1.379	4.166	1.871	2.308	4,817	3.755	1.849
3.097	3.744	2,224	2.974	2.029	3.689	3.154	0,622	2.684	3.376
2.264	1.749	**1,348**	1.056	2.011	1.089	1.400	1,754	2.505	2.449
1.922	1.135	2,030	2.992	1.665	1.782	3.061	**4,910**	3.322	3.144
5.309	1.632	5,489	0.409	6.785	5.881	5.931	**6,289**	7.342	5.589
2.024	2.555	3,541	3.185	1.807	1.535	2.964	3,691	1.676	1.626
1.962	1.450	2,667	3.870	4.081	1.627	3.066	4,395	4.515	3.001
3.514	6.951	1,244	2.751	2.468	2.018	2.323	1,230	4.707	1.959
0.750	0.800	0,449	1.177	1.890	1.178	2.311	**0,697**	0.035	1.687
0.537	1.374	1,158	5.727	1.508	5.355	1.709	**5,407**	1.359	1.518
10.796	10.465	10,521	8.610	8.558	8.599	8.032	10,596	8.551	8.123
1.056	1.232	2,367	1.325	0.526	1.676	2.971	2,542	2.939	2.814
8.118	8.500	9,924	9.254	10.405	9.636	10.348	9,218	9.805	10.046
4.040	4.244	3,613	3.099	4.680	6.852	2.452	**3,192**	4.986	5.924
4.949	7.182	4,366	3.236	4.999	3.716	3.930	**4,846**	7.191	4.460
3.296	7.442	7,542	4.733	4.720	3.237	3.182	**4,782**	5.351	3.424
5.786	6.620	6,717	5.252	5.305	5.491	6.526	**5,493**	6.722	4.637

En la Tabla 4.35 se realiza una comparación entre el valor real y el valor con imputación por la media y regresión.

Tabla 4.35

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Comparación de los Métodos de Imputación

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

25% de datos completados en X_3 por la Media

Dato Observado	Resultado de Imputación por Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|
2.851	3.219	0,368
1.414	3.219	1,805
1.069	3.219	2,150
6.462	3.219	3,243
3.914	3.219	0,695
1.131	3.219	2,088
6.562	3.219	3,343
2.254	3.219	0,965
1.689	3.219	1,530
1.432	3.219	1,787
3.693	3.219	0,474
3.960	3.219	0,741
3.420	3.219	0,201
2.683	3.219	0,536
6.730	3.219	3,511
0.860	3.219	2,359
6.406	3.219	3,187
3.578	3.219	0,359
5.157	3.219	1,938
4.083	3.219	0,864
2.061	3.219	1,158
1.148	3.219	2,071
3.359	3.219	0,140
1.913	3.219	1,306
1.351	3.219	1,868

25% de datos completados en X_3 por Regresión

Dato Observado	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
2.851	2.849	0,002
1.414	1.403	0,011
1.069	1.057	0,012
6.462	6.399	0,063
3.914	3.909	0,005
1.131	1.098	0,033
6.562	6.554	0,008
2.254	2.226	0,028
1.689	1.673	0,016
1.432	1.429	0,003
3.693	3.688	0,005
3.960	3.952	0,008
3.420	3.411	0,009
2.683	2.689	0,006
6.730	6.713	0,017
0.860	0.853	0,007
6.406	6.397	0,009
3.578	3.562	0,016
5.157	4.993	0,164
4.083	4.052	0,031
2.061	2.075	0,014
1.148	1.129	0,019
3.359	3.347	0,012
1.913	1.922	0,009
1.351	1.348	0,003

Elaborado por: G. Cuenca

Continúa…

Viene…

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados
Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Comparación de los Métodos de Imputación
Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

25% de datos completados en X_8 por la Media

Dato Observado	Resultado de Imputación por Media	Error |Dato Observado – Resultado de Imputación por Media|
2.390	3.298	0,908
1.060	3.298	2,238
1.383	3.298	1,915
1.219	3.298	2,079
2.582	3.298	0,716
5.997	3.298	2,699
3.952	3.298	0,654
19.664	3.298	16,366
5.859	3.298	2,561
5.255	3.298	1,957
9.518	3.298	6,22
2.947	3.298	0,351
2.566	3.298	0,732
0.929	3.298	2,369
4.580	3.298	1,282
2.080	3.298	1,218
3.767	3.298	0,469
4.930	3.298	1,632
6.314	3.298	3,016
0.704	3.298	2,594
5.413	3.298	2,115
3.183	3.298	0,115
4.859	3.298	1,561
4.800	3.298	1,502
5.525	3.298	2,227

25% de datos completados en X_8 por Regresión

Dato Observado	Resultado de Predicción	Error | Dato Observado – Resultado de Predicción |
2.390	2.386	0,004
1.060	1.102	0,042
1.383	1.374	0,009
1.219	1.207	0,012
2.582	2.601	0,019
5.997	6.003	0,006
3.952	4.007	0,055
19.664	19.618	0,046
5.859	5.832	0,027
5.255	5.243	0,012
9.518	9.492	0,026
2.947	3.003	0,056
2.566	2.572	0,006
0.929	0.919	0,010
4.580	4.489	0,091
2.080	2.078	0,002
3.767	3.642	0,125
4.930	4.910	0,020
6.314	6.289	0,025
0.704	0.697	0,007
5.413	5.407	0,006
3.183	3.192	0,009
4.859	4.846	0,013
4.800	4.782	0,018
5.525	5.493	0,032

Elaborado por: G. Cuenca

Se puede notar, por medio de la Tabla 4.35 que la diferencia en valor absoluto entre el dato observado y el estimado de cada variable es menor en el Método de Imputación por Regresión.

CUADRO 4.44

Efectos de la Imputación en el Análisis de Datos Multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Imputación por la Media y Regresión

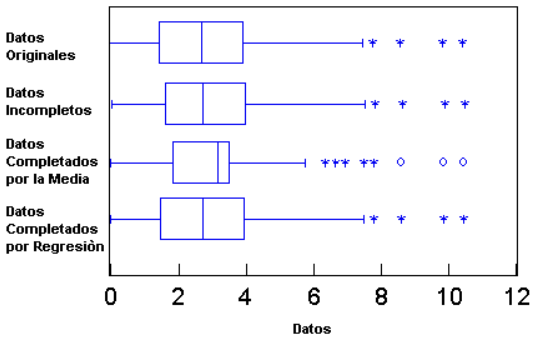
Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

Tabla y Diagrama de la "*Variable* X_3" y "*Variable* X_8"

Estimadores "*Variable* X_3"

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		100	75	100	100
Media		3,206	3,219	3,219	3,201
Mediana		2,801	2,751	3,219	2,800
Moda		0,070	0,070	3,220	0,070
Varianza		4,528	4,901	3,663	4,518
Desviación Estándar		2,128	2,214	1,914	2,126
Error Estándar		0,213	0,256	0,191	0,213
Coeficiente de Asimetría		1,194	1,294	1,486	1,198
Curtosis		1,351	1,630	3,139	1,372
Rango		10,450	10,450	10,450	10,450
Mínimo		0,070	0,070	0,070	0,070
Máximo		10,520	10,520	10,520	10,520
Percentiles	25	1,508	1,633	1,886	1,508
	50	2,801	2,751	3,219	2,800
	75	4,021	4,027	3,596	4,021

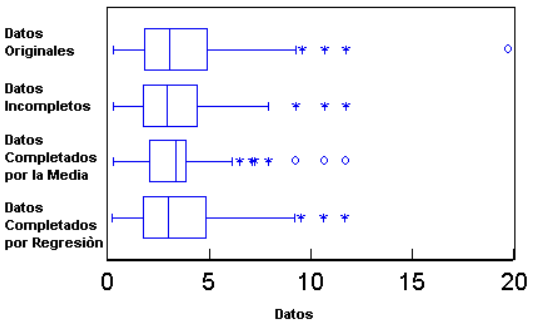
Diagrama de Cajas "*Variable* X_3"



Estimadores "*Variable* X_8"

Estimadores		Datos Originales	Datos Incompletos	Datos Completados por la Media	Datos Completados por Regresión
n		100	75	100	100
Media		3,588	3,298	3,298	3,585
Mediana		2,959	2,882	3,298	2,987
Moda		0,200	0,200	3,300	0,200
Varianza		7,626	5,164	3,860	7,599
Desviación Estándar		2,762	2,273	1,965	2,757
Error Estándar		0,276	0,262	0,197	0,276
Coeficiente de Asimetría		2,576	1,484	1,704	2,573
Curtosis		11,269	2,742	4,597	11,234
Rango		19,470	11,470	11,470	19,420
Mínimo		0,200	0,200	0,200	0,200
Máximo		19,660	11,660	11,660	19,620
Percentiles	25	1,715	1,623	1,983	1,715
	50	2,959	2,882	3,298	2,987
	75	4,813	4,382	3,820	4,808

Diagrama de Cajas "*Variable* X_8"



Elaborado por: G. Cuenca

Al realizar la imputación por la media y regresión se obtuvieron los siguientes resultados en la variable X_3 (Ver Cuadro 4.44):

El valor de la media de los “datos completados” por *la media* aumenta, comparándolo con los “datos originales” y completados por *regresión.*

El valor de la varianza de los “datos completados” por la *media* disminuye de 4.528 a 3.663, mientras que en los datos completados por regresión este valor se incrementa a 4.518, comparándolo con el valor anterior y es muy cercano al valor de la varianza de los datos originales.

Mientras que en la variable X_8, el valor de la media de los “datos completados” por *la media* aumenta, comparándolo con los “datos originales” y completados por *regresión.*

El valor de la varianza de los “datos completados” por la *media* disminuye de 7.626 a 3.860. Esta variable presenta valores atípicos.

El vector de medias con veinticinco datos completados por la media en X_3 y veinticinco en X_8 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \\ \overline{X}_6 \\ \overline{X}_7 \\ \overline{X}_8 \\ \overline{X}_9 \\ \overline{X}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.164 \\ 3.445 \\ 3.219 \\ 3.350 \\ 3.614 \\ 3.391 \\ 3.741 \\ 3.298 \\ 3.526 \\ 3.532 \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector de medias con veinticinco datos completados por la regresión en X_3 y veinticinco en X_8 es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \overline{X}_4 \\ \overline{X}_5 \\ \overline{X}_6 \\ \overline{X}_7 \\ \overline{X}_8 \\ \overline{X}_9 \\ \overline{X}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.164 \\ 3.445 \\ 3.201 \\ 3.350 \\ 3.614 \\ 3.391 \\ 3.741 \\ 3.585 \\ 3.526 \\ 3.532 \end{pmatrix}$$

El efecto que causa en la *matriz de varianzas y covarianzas* y *matriz de correlaciones*, el completar 10% de datos faltantes en una matriz de tamaño 100, por medio de la imputación por media y regresión, se presenta en el Cuadro 4.45.

CUADRO 4.45

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Imputación por Media y Regresión

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Varianzas y Covarianzas
(Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	4.386									
X_2	2.700	4.854								
X_3	2.701	2.336	4.528							
X_4	2.165	2.247	2.041	3.978						
X_5	2.780	2.346	3.072	2.968	6.029					
X_6	2.252	1.997	1.489	2.269	2.240	4.084				
X_7	2.706	1.857	2.925	2.329	3.696	2.695	5.563			
X_8	1.637	2.954	2.226	1.497	2.897	2.173	3.059	7.626		
X_9	3.019	2.133	2.366	2.365	3.272	2.508	3.039	1.543	5.322	
X_{10}	2.552	2.045	2.371	2.044	2.521	3.192	3.685	2.716	2.939	5.072

Matriz de Varianzas y Covarianzas
25% Datos Completados por Media en "*Variable* X_3" y 25% en "*Variable* X_8"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	4.386									
X_2	2.700	4.854								
X_3	2.402	2.182	3.663							
X_4	2.165	2.247	1.826	3.978						
X_5	2.780	2.346	2.401	2.968	6.029					
X_6	2.252	1.997	1.509	2.269	2.240	4.084				
X_7	2.706	1.857	2.224	2.329	3.696	2.695	5.563			
X_8	1.611	1.419	1.629	1.522	1.735	1.728	2.697	3.860		
X_9	3.019	2.133	2.404	2.365	3.272	2.508	3.039	1.139	5.322	
X_{10}	2.552	2.045	2.138	2.044	2.521	3.192	**3.685**	2.296	2.939	5.072

Matriz de Varianzas y Covarianzas
25% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_3" y 25% en "*Variable* X_8"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	4.386									
X_2	2.700	4.854								
X_3	2.697	2.335	4.518							
X_4	2.165	2.247	2.037	3.978						
X_5	2.780	2.346	3.065	2.968	6.029					
X_6	2.252	1.997	1.487	2.269	2.240	4.084				
X_7	2.706	1.857	2.919	2.329	3.696	2.695	5.563			
X_8	1.639	2.950	2.228	1.498	2.895	2.172	3.056	7.599		
X_9	3.019	2.133	2.367	2.365	3.272	2.508	3.039	1.536	5.322	
X_{10}	2.552	2.045	2.369	2.044	2.521	3.192	3.685	2.713	2.939	5.072

Elaborado por: G. Cuenca

CUADRO 4.46

Efectos de la Imputación en el análisis de datos multivariados

Variables aleatorias dependientes con distribución Exponencial $\beta = 4$

Método de Imputación por Media y Regresión

Tamaño de muestra n=100 y 5% de datos faltantes en la matriz

Matriz de Correlaciones
(Datos Originales)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	1.000									
X_2	0.585	1.000								
X_3	0.606	0.498	1.000							
X_4	0.518	0.511	0.481	1.000						
X_5	0.541	0.434	0.588	0.606	1.000					
X_6	0.532	0.448	0.346	0.563	0.451	1.000				
X_7	0.548	0.357	0.583	0.495	0.638	0.565	1.000			
X_8	0.283	0.486	0.379	0.272	0.427	0.389	0.470	1.000		
X_9	0.625	0.420	0.482	0.514	0.578	0.538	0.559	0.242	1.000	
X_{10}	0.541	0.412	0.495	0.455	0.456	0.701	0.694	0.437	0.566	1.000

Matriz de Correlaciones
25% Datos Completados por Media en "*Variable* X_3" y 25% en "*Variable* X_8"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	1.000									
X_2	0.585	1.000								
X_3	0.599	0.517	1.000							
X_4	0.518	0.511	0.478	1.000						
X_5	0.541	0.434	0.511	0.606	1.000					
X_6	0.532	0.448	0.390	0.563	0.451	1.000				
X_7	0.548	0.357	0.493	0.495	0.638	0.565	1.000			
X_8	0.392	0.328	0.433	0.388	0.360	0.435	0.582	1.000		
X_9	0.625	0.420	0.544	0.514	0.578	0.538	0.559	0.251	1.000	
X_{10}	0.541	0.412	0.496	0.455	0.456	0.701	0.694	0.519	0.566	1.000

Matriz de Correlaciones
25% Datos Completados por Regresión en "*Variable* X_3" y 25% en "*Variable* X_8"

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	1.000									
X_2	0.585	1.000								
X_3	0.606	0.499	1.000							
X_4	0.518	0.511	0.480	1.000						
X_5	0.541	0.434	0.587	0.606	1.000					
X_6	0.532	0.448	0.346	0.563	0.451	1.000				
X_7	0.548	0.357	0.582	0.495	0.638	0.565	1.000			
X_8	0.284	0.486	0.380	0.272	0.428	0.390	0.470	1.000		
X_9	0.625	0.420	0.483	0.514	0.578	0.538	0.559	0.242	1.000	
X_{10}	0.541	0.412	0.495	0.455	0.456	0.701	0.694	0.437	0.566	1.000

Elaborado por: G. Cuenca

Se puede apreciar en el Cuadro 4.45, que los únicos valores que cambian son las covarianzas de la variable X_3 y X_8 con las demás variables, donde la covarianza entre X_3 y X_5 , disminuye de 3.072 a 2.401.

En la matriz de varianzas y covarianzas de los datos completados por regresión, el valor de las covarianzas de variable X_3 y X_8 con las demás variables se incrementa, comparándolo con la matriz de varianzas y covarianzas de los “datos completados” por *la media.*

Por otro lado, analizando el efecto que causa en la matriz de correlaciones, podemos apreciar en le Cuadro 4.46 que también los únicos valores que cambian son los de la correlación de X_3 y X_8 con las demás variables, puesto que a estas variables se les completó datos por medio de los métodos de imputación; donde la mayor correlación se da entre las variables X_6 y X_{10}, es decir 0.701, seguida por 0.694 entre las variables X_7 y X_{10}. En la matriz de correlaciones con 25% de datos completados por la media en X_3 y 25% en X_8, la correlación entre X_3 y X_5 disminuye de 0.588 a 0.511, mientras que en la matriz de datos completados por regresión, este valor es 0.587, es decir tiende al valor observado.